МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ПРАКТИКЕ

Учебная компьютерная практика

Методические указания для обучающихся, документы, определяющие процедуры оценивания результатов практики

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующих этапы формирования компетенций, при прохождении практики проводится в ходе промежуточной аттестации. Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Промежуточная аттестация по практике включает подготовку и защиту отчета по практике. Результаты прохождения практики демонстрируются обучающимися руководителю в виде устного сообщения с предъявлением разработанных программ по мере выполнения. По результатам защиты представленных программ с учетом характеристики руководителя и качества представленных отчетных материалов обучающемуся выставляется соответствующая оценка.

При оценивании используется 4-балльная шкала оценок. Оценивание и учет результатов прохождения практики обучающимися проводится в соответствии Положением о порядке проведения учебной и производственной практик обучающихся в Борисоглебском филиале Воронежского государственного университета по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата), 44.03.02 Психолого-педагогическое образование (уровень бакалавриата), 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень бакалавриата).

Пример оформления отчета

Вариант №1

Задание 1

В таблице 1 приведена цена того или иного товара. В таблице 2 приведены данные о покупках товаров в магазине с несколькими равноценными отделами. Заполнить таблицы, поместив в первую из них 9, а во вторую – 15 записей.

Таблица 1

Наименование товара	Единица измерения	Цена 1 единицы

Таблица 2

Номер чека	Поставщик	Наименование товара	Количество проданного товара	Номер отдела

Решение

С помощью электронных таблиц Excel вычислить:

1) Стоимость каждой покупки.

Номер чека	**Поставщик**	**Наименование товара**	**Количество проданного товара**	**Номер отдела**	**Цена**	**Стоимость**
1	Склад №1	Яблоки	20	1	50,00	1000,00
2	Склад №2	Груши	23	2	55,00	1265,00
3	Склад №1	Газированная вода	5	3	45,00	225,00
4	Склад №2	Мороженное	17	2	27,00	459,00
5	Склад №1	Пироженное	43	3	32,00	1376,00
6	Склад №2	Вишня	52	3	105,00	5460,00
7	Склад №3	Бананы	48	4	48,00	2304,00
8	Склад №1	Минеральная вода	65	4	51,00	3315,00

9	Склад №2	Вафли	55	3	127,00	6985,00
10	Склад №1	Мороженное	54	2	27,00	1458,00
11	Склад №2	Пироженное	38	1	32,00	1216,00
12	Склад №1	Вишня	72	1	105,00	7560,00
13	Склад №3	Минеральная вода	88	4	51,00	4488,00
14	Склад №1	Вафли	92	2	127,00	11684,00
15	Склад №2	Мороженное	17	3	27,00	459,00

2) Сумму налога по каждой покупке, составляющую 20% от стоимости.

Номер чека	**Поставщик**	**Наименование товара**	**Стоимость**	**Налог 20%**
1	Склад №1	Яблоки	1000,00	200,00
2	Склад №2	Груши	1265,00	253,00
3	Склад №1	Газированная вода	225,00	45,00
4	Склад №2	Мороженное	459,00	91,80
5	Склад №1	Пироженное	1376,00	275,20
6	Склад №2	Вишня	5460,00	1092,00
7	Склад №3	Бананы	2304,00	460,80
8	Склад №1	Минеральная вода	3315,00	663,00
9	Склад №2	Вафли	6985,00	1397,00
10	Склад №1	Мороженное	1458,00	291,60
11	Склад №2	Пироженное	1216,00	243,20
12	Склад №1	Вишня	7560,00	1512,00
13	Склад №3	Минеральная вода	4488,00	897,60
14	Склад №1	Вафли	11684,00	2336,80
15	Склад №2	Мороженное	459,00	91,80

3) Стоимость каждой покупки за вычетом налога.

Номер чека	**Поставщик**	**Наименование товара**	**Стоимость**	**Налог 20%**	**Стоимость за вычетом налога**
1	Склад №1	Яблоки	1000,00	200,00	800,00
2	Склад №2	Груши	1265,00	253,00	1012,00
3	Склад №1	Газированная вода	225,00	45,00	180,00
4	Склад №2	Мороженное	459,00	91,80	367,20
5	Склад №1	Пироженное	1376,00	275,20	1100,80
6	Склад №2	Вишня	5460,00	1092,00	4368,00
7	Склад №3	Бананы	2304,00	460,80	1843,20
8	Склад №1	Минеральная вода	3315,00	663,00	2652,00
9	Склад №2	Вафли	6985,00	1397,00	5588,00
10	Склад №1	Мороженное	1458,00	291,60	1166,40
11	Склад №2	Пироженное	1216,00	243,20	972,80
12	Склад №1	Вишня	7560,00	1512,00	6048,00
13	Склад №3	Минеральная вода	4488,00	897,60	3590,40
14	Склад №1	Вафли	11684,00	2336,80	9347,20
15	Склад №2	Мороженное	459,00	91,80	367,20

4) Выручку каждого отдела.

Отдел	**Выручка**
1	7820,80

2	11892,80
3	11604,00
4	8085,60

5) Выручку по каждому наименованию товара.

Наименование товара	**Выручка, руб.**
Яблоки	800,00
Груши	1012,00
Газированная вода	180,00
Мороженное	1900,80
Пироженное	2073,60
Вишня	10416,00
Бананы	1843,20
Минеральная вода	6242,40
Вафли	14935,20

6) Общую выручку за все проданные товары.

Общая выручка за все проданные товары **39403,20**

7) Количество наименований товара с ценой 1 единицы большей, чем 100 р.

Наименование товара	**Единица измерения**	**Цена 1 единицы**
Яблоки	кг.	50
Груши	кг.	55
Газированная вода	л.	45
Мороженное	шт.	27
Пироженное	шт.	32
Вишня	кг.	105
Бананы	кг.	48
Минеральная вода	л.	51
Вафли	кг.	127

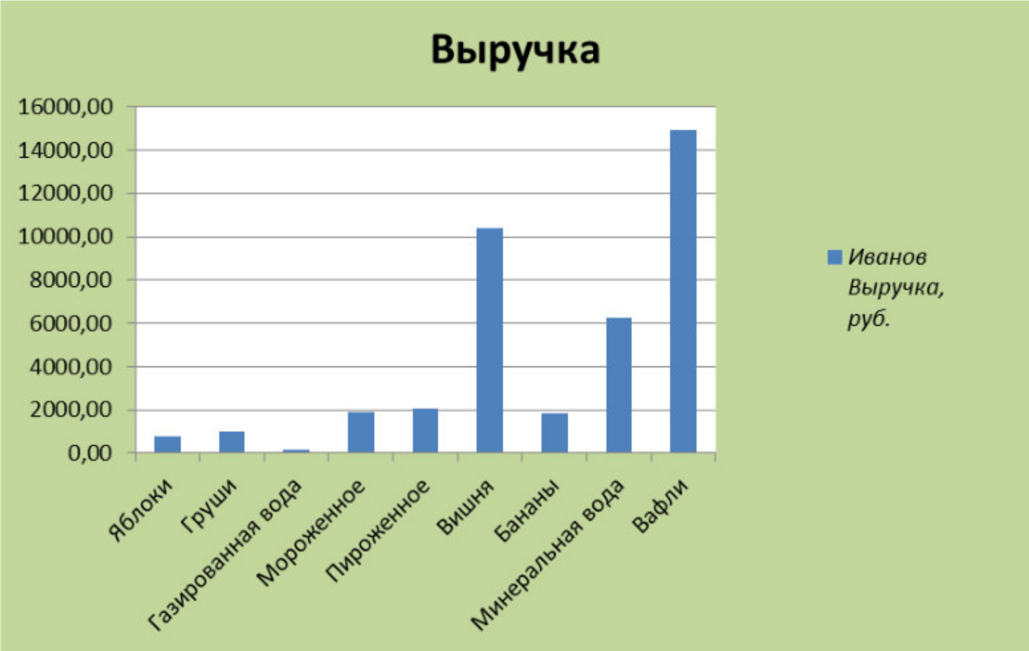
Количество наименований товара с ценой 1 единицы большей, чем 100 р. **2**

8) Максимальное количество единиц товара, проданного в одни руки.

Максимальное количество единиц товара, проданного в одни руки **92**

9) Построить диаграмму выручки в зависимости от наименования товара.

В диаграмме должны быть: легенда, название диаграммы, подписи под осями, в легенде в первую строчку добавить свою фамилию. Название всех диаграмм выполнить жирным шрифтом, легенду – курсивом. Оформить все диаграммы в цвете с помощью заливки.



10) На отдельном листе составить отчет о покупках, в который поместить: наименование товара, номер отдела, стоимость покупки.

Упорядочить отчет по отделам, а внутри каждого отдела упорядочить покупки по наименованию товара.

Отчет должен содержать суммарную выручку каждого отдела и общую выручку.

Отформатировать отчет следующим образом:

- шапку таблицы выделить более жирной рамкой и более крупным шрифтом;
- итоговые суммы набрать другим цветом, а ячейки, в которые они помещены, залить другим цветом.

Наименование товара	**Номер отдела**	**Стоимость**
Вишня	1	7560
Пироженное	1	1216
Яблоки	1	1000
	1 Итог	**9776**
Вафли	2	11684
Груши	2	1265
Мороженное	2	459
Мороженное	2	1458
	2 Итог	**14866**
Вафли	3	6985
Вишня	3	5460
Газированная вода	3	225
Мороженное	3	459
Пироженное	3	1376
	3 Итог	**14505**
Бананы	4	2304
Минеральная вода	4	3315
Минеральная вода	4	4488
	4 Итог	**10107**
	Общий итог	**49254**

Задание 2

Вычислить значения выражений: $F = \begin{cases} 5z^2, \text{если } z > 0 \\ z + 5, \text{если z} \leq 0 \end{cases}$,

$y = S - 2F$, $S = \sum z$, $z = x^5 - 25x$,

при $-2 \leq x \leq 7$, $\Delta x = 0{,}5$.

Определить:

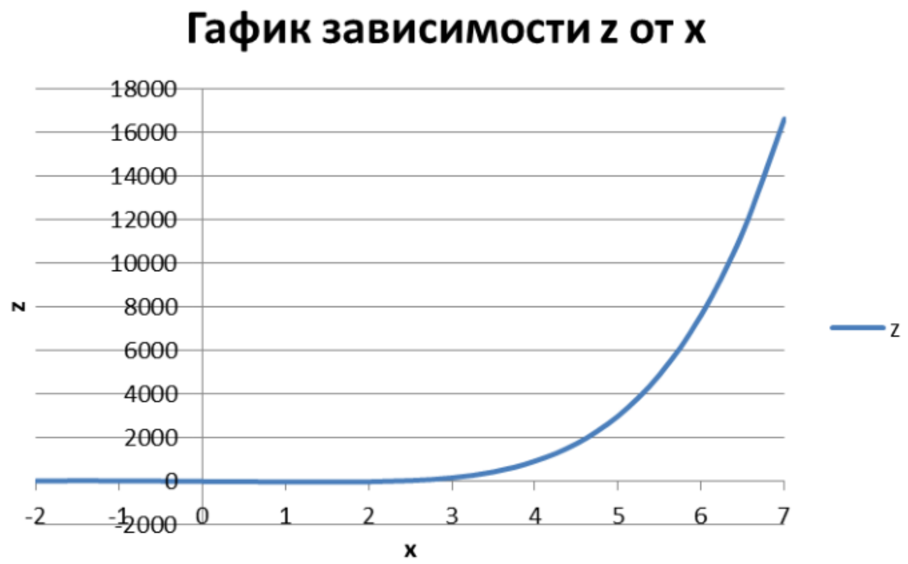
- количество y>F;
- сумму всех F;
- произведение z>10.
- максимальное значение F.

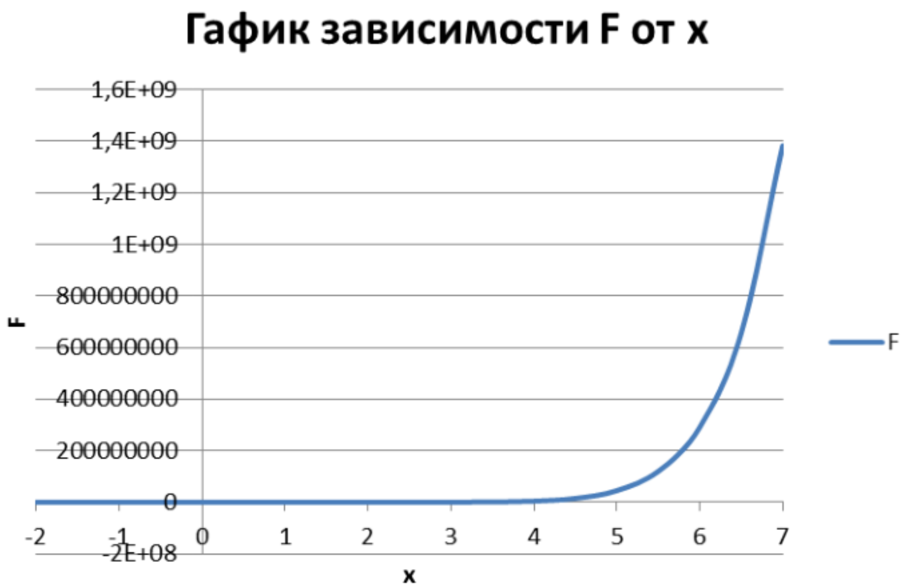
Решение

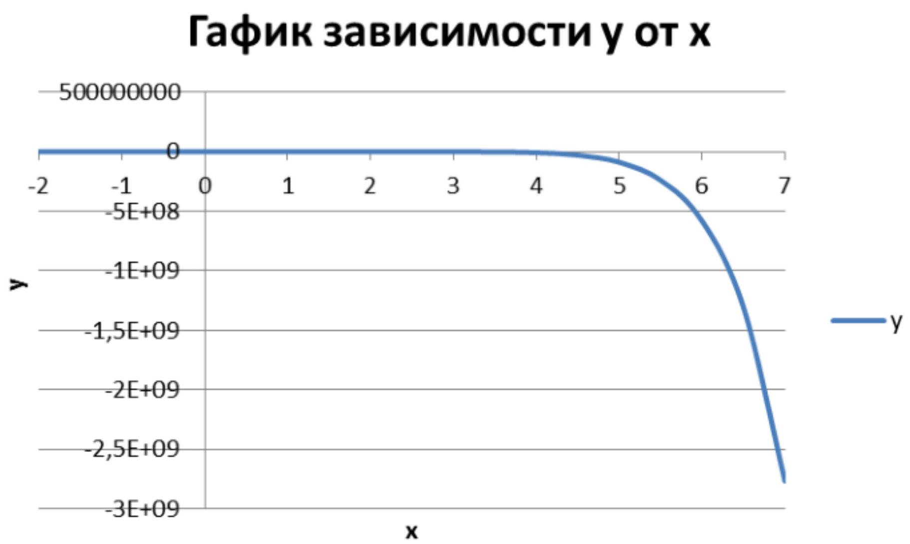
В ячейку B2 водится формула: «=Формула»;
вячейку C2 водится формула: «=Формула»;
в ячейку D2 водится формула: «=Формула»

x	z	F	y
-2	18	1620	43651,40625
-1,5	29,90625	4471,91895	37947,56836
-1	24	2880	41131,40625
-0,5	12,46875	777,348633	45336,70898
0	0	5	46881,40625
0,5	-12,4688	-7,46875	46906,34375
1	-24	-19	46929,40625
1,5	-29,9063	-24,90625	46941,21875
2	-18	-13	46917,40625
2,5	35,15625	6179,80957	34531,78711
3	168	141120	-235348,5938
3,5	437,7188	957988,521	-1869085,635
4	924	4268880	-8490868,594
4,5	1732,781	15012654,3	-29978417,2
5	3000	45000000	-89953108,59
5,5	4895,344	119821952	-239597012,9
6	7626	290779380	-581511868,6
6,5	11440,41	654414476	-1308782060
7	16632	1383117120	-2766187349
S=	46891,41		

Количество y>F: **11**
Сумма всех F: **1478925,7423**
Произведение z>10: **47896,89512**
Максимальное значение F: **1383117120**







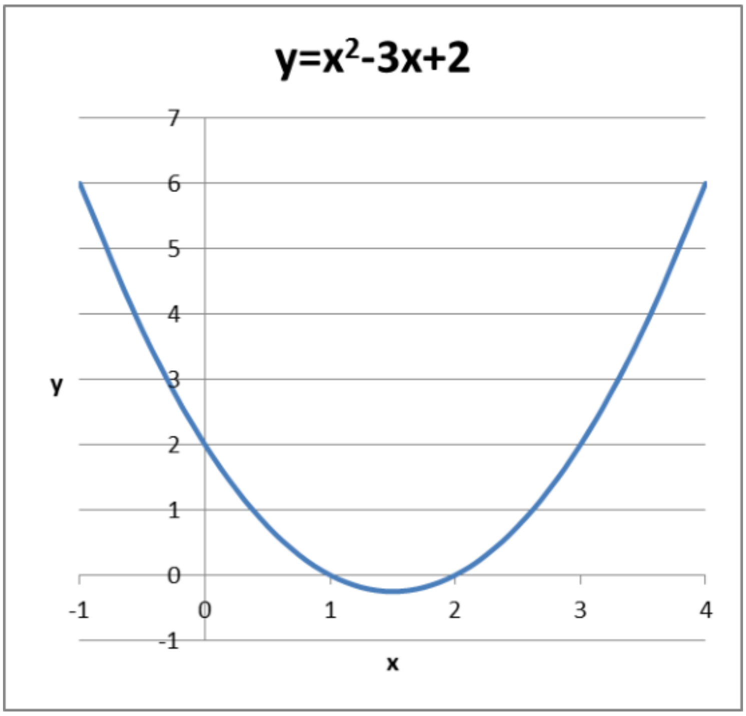
Задание 3

Построить график уравнения параболы: $y = x^2 - 3x + 2$.

График построить в диапазоне значений x от –1 до 4. Значения функции рассчитать с шагом 0,5.

Решение

x	y
-1	6
-0,5	3,75
0	2
0,5	0,75
1	0
1,5	-0,25
2	0
2,5	0,75
3	2
3,5	3,75
4	6



Задание 4

Оптовая база при продаже товаров делает ряд скидок:

- если стоимость покупаемых товаров превышает 2000 руб., то делается скидка на 10%;
- если стоимость более 3000 руб., то - скидка на 15%;
- если стоимость более 5000 руб., то - скидка на 20%;
- если стоимость более 10000 руб., то - скидка на 25%.

Создать и заполнить данными таблицу, содержащую сведения о стоимости купленных товаров различными покупателями.

Составить одну формулу позволяющую рассчитывать реальную цену в зависимости от любой стоимости покупаемых товаров. Точность расчетов – два знака после запятой. Методом копирования этой формулы произвести расчеты всех покупателей.

Решение

Величина скидки определяется по формуле:

«=Формула»

Покупатель	**Стоимость**	**Скидка**	**Реальная цена**
Иванов И.И.	1000,00	0,00%	1000,00
Иванов П.П.	2500,00	10,00%	2250,00
Иванов С.С.	3500,00	15,00%	2975,00
Петров И.И.	7000,00	20,00%	5600,00
Петров П.П.	12000,00	25,00%	9000,00
Петров С.С.	2000,00	0,00%	2000,00
Сидоров И.И.	3200,00	15,00%	2720,00
Сидоров П.П.	15000,00	25,00%	11250,00
Сидоров С.С.	500,00	0,00%	500,00

Теоретические сведения для решения задач

1. Матрицы и операции над ними

1.1. Понятие матрицы

Матрицей размера $(m \times n)$ называется совокупность $m \times n$ элементов, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или кратко $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

На пересечении i-й строки и j-го столбца, соответственно

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}) \text{ и } \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

стоит элемент матрицы a_{ij}. Любые строки и столбцы матрицы являются также матрицами.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой.

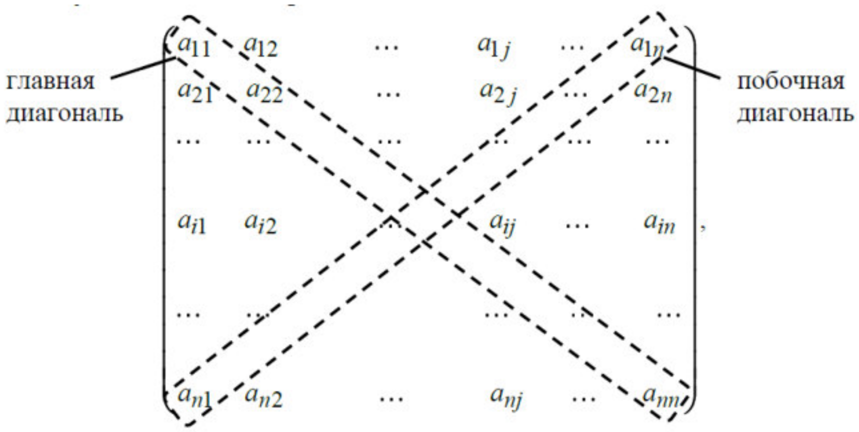
Матрица называется квадратной n-го порядка, если её число строк равно числу столбцов и равно n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы a_{ii} называются диагональными и образуют главную диагональ $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$. Если все элементы, кроме диагональных, равны нулю, то матрица называется диагональной:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

У квадратной матрицы выделяют и побочную диагональ:



Квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю, называется верхней треугольной:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

нижняя треугольная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица вида $(A\,|\,B)$, составленная из двух матриц (с одинаковым числом строк) называется расширенной:

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{array}\right)$$

Матрицы одинаковых размеров $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются равными ($A=B$), если $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Всюду далее рассматриваются матрицы с вещественными элементами.

1.2. Операции над матрицами

Произведением матрицы A на число $\lambda\in R$ называется матрица

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Суммой матриц одинаковых размеров $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называется матрица

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Матрица $(-1)\times A$ называется противоположной матрице A и обозначается $(-A)$:

$$(-A)=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Разностью матриц одинаковых размеров $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называется матрица

$$A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}$$

Свойства операций сложения и умножения на число:

1) коммутативность сложения: $A+B=B+A$;
2) ассоциативность сложения: $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $\forall A$ существует нулевая матрица O тех же размеров: $A+O=A$;
4) $\forall A$ существует противоположная матрица $(-A)$: $A+(-A)=O$;
5) дистрибутивность сложения: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B\ \ \forall\lambda\in R$;
6) $(\lambda+\gamma)A=\lambda A+\gamma A\ \ \forall\lambda,\gamma\in R$;
7) $(\lambda\gamma)A=\lambda(\gamma A)\ \ \forall\lambda,\gamma\in R$.

Если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то есть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

то можно определить операцию умножения матриц:

$$C=A\times B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C=(c_{ij})$ имеет размеры $(m\times n)$, а её элементы c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, получаются следующим образом:

$$c_{ij}=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad \dots\quad a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

то есть i-я строка матрицы A умножается на j-й столбец матрицы B и результат записывается в матрицу C на место (i,j).

Приведём пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+0\cdot 0+(-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц может дать нулевую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порядок матриц-сомножителей существен. Поэтому говорят об умножении A на B слева или справа. Если произведение AB существует, то произведение BA может не существовать. Если произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров. Если матрицы A и B квадратные, то их произведения AB и BA существуют и имеют одинаковые размеры, но в общем случае $AB\neq BA$. Действительно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ 3\cdot 1+4\cdot 5 & 3\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \\ 5\cdot 1+3\cdot 3 & 5\cdot 2+3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$. Диагональные матрицы одного порядка перестановочны.

Роль единицы в умножении матриц играет единичная матрица:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},\ AE=EA.$$

Пусть A,B,C – матрицы соответствующих размеров, $\lambda \in R$. Операция умножения матриц обладает свойствами:

1) $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность;
2) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ – дистрибутивность;
3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$;

Возведение матрицы в целую положительную степень k определено только для квадратных матриц и сводится к произведению:

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ раз},$$

при этом $A^0 = E$, $A^1 = A$.

Возведение в степень может дать нулевую матрицу:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Степени A^k и A^s одной и той же матрицы перестановочны: $A^k \cdot A^s = A^s \cdot A^k$, поэтому справедливы обычные свойства степеней:

$$A^k \cdot A^s = A^s \cdot A^k = A^{k+s},\ (A^k)^s = A^{ks}.$$

1.3. Обратная матрица

Квадратная матрица называется вырожденной (особенной), если её определитель равен нулю, и невырожденной (неособенной), если её определитель не равен нулю.

Произведение матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной матрицей. Произведение невырожденных матриц будет невырожденной матрицей.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Теорема. *Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.*

Способы вычисления обратной матрицы

<u>Способ 1.</u> Использование присоединённой матрицы.

1. Для данной матрицы A вычислить $|A|$. Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует.
2. Составить матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ элементов матрицы A.
3. Транспонируя матрицу (A_{ij}), получить присоединённую матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$.

4. Найти обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$.

Найдём обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 2\cdot(-2) - (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-2) = -1.$$

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Записываем матрицу алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записываем присоединённую матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ -6 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементарными (эквивалентными) преобразованиями матрицы называются следующие:

1. Перестановка двух строк или столбцов.
2. Умножение всех элементов одной строки или столбца на одно и то же ненулевое число.

3. Прибавление к элементам одной строки или столбца соответствующих элементов другой строки или столбца, умноженных на одно и то же ненулевое число.
4. Отбрасывание нулевой строки или столбца.
5. Транспонирование.

Способ 2. Использование элементарных преобразований.
1. Для данной матрицы A вычислить $|A|$. Если $|A|=0$, то обратная матрица не существует.
2. Составить блочную матрицу $(A\,|\,E)$.
3. Одними и теми же элементарными преобразованиями над блоками матрицы $(A\,|\,E)$ получить матрицу $(E\,|\,A^{-1})$.

Найдём обратную матрицу для

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Составляем блочную матрицу:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Проводим элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-1)\\ \oplus\end{matrix}\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\oplus\\ \times(-1)\end{matrix}\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \div 2\end{matrix}\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2\end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1}).$$

2. Определители

2.1. Определитель матрицы

С каждой квадратной матрицей A свяжем некоторое число и назовём это число определителем матрицы. Обозначение: $|A|$.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ называется число $|A|=a_{11}$.

Определителем матрицы второго порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

называется число

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначение специального определителя M_{ij}, получаемого из матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

вычёркиванием i-й строки и j-го столбца. Определитель M_{ij} имеет порядок $(n-1)$ и называется минором элемента a_{ij}.

С помощью нового обозначения имеем

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}.$$

Определителем матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

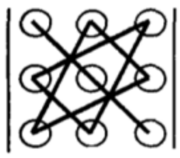
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Из последней формулы нетрудно видеть графические правила, определяющие порядок получения произведений элементов и знаки этих произведений (правила треугольников):

+



−

Например,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot(-2) - 0\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 0\cdot 1 = -1.$$

Вычисление определителей 1, 2 и 3 порядков (порядок определителя равен порядку его порождающей матрицы) с помощью определителей M_{ij} показало чередование знаков слагаемых. Поэтому определителем квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} M_{1n}.$$

Видно, что вычисляются миноры только по первой строке.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Тогда можем записать:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} M_{1n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}.$$

Данная формула называется разложением определителя по первой строке.

Определитель треугольной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

равен произведению элементов главной диагонали:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

2.2. Способы вычисления определителя

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Способ 1.</u> Разложение определителя по строке или столбцу.

Например, разложим определитель по 3-му столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-4-8) - (-4+4) + 2(-8-4) = -12.$$

Способ 2. Использование правила треугольников.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 2\cdot(-2) - (-1)\cdot(-4)\cdot(-2) - 2\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-2) = -12.$$

$$= -(-4-8) - (-4+4) + 2(-8-4) = -12.$$

Способ 3. Использование свойств определителя, когда он содержит строку или столбец с максимальным количеством нулей.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \{\text{сложим } 1 \text{ и } 3 \text{ строки}\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{разложим по } 1 \text{ строке}\} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4-8 = -12.$$

Способ 4. Использование свойств определителя после преобразования к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \oplus \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \{\text{сложим } 1 \text{ и } 3 \text{ строки}\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Основные понятия и свойства решения

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *неизвестные*, значения которых необходимо найти. Отметим, что число неизвестных в общем случае не равно числу уравнений. Величины $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – это *коэффициенты* системы. Первый индекс коэффициента указывает на номер уравнения, в котором он фигурирует, второй – на номер неизвестного, при котором этот коэффициент поставлен. Величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$, стоящие в правых частях уравнений, называются *свободными членами* системы; как и коэффициенты, они предполагаются известными.

СЛАУ (1) можно записать компактнее:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Если ввести обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

то СЛАУ может быть записана в матричном виде:

$$Ax = b. \qquad (3)$$

Здесь A – матрица СЛАУ, x – вектор-столбец неизвестных, b – вектор-столбец свободных членов.

Если в (1) хотя бы одно число $b_i \neq 0$, то такая СЛАУ называется *неоднородной*, в противном случае – *однородной*. В дальнейшем запись $Ax = b$ будет означать неоднородную систему.

Решением системы (1) называется упорядоченный набор чисел

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)^T, \qquad (4)$$

который, будучи подставленным в (1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяет всем уравнениям данной системы (отметим, что совокупность чисел (4) составляет одно, а не n решений).

СЛАУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* (противоречивой), если она не имеет таких решений.

СЛАУ называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если решений больше одного.

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица B, полученная из матрицы A добавлением столбца свободных членов:

$$B = [Ab] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

3.2. Метод Крамера

С теоретической точки зрения решение СЛАУ не представляет труда. Если матрица A квадратная и определитель $\Delta = |A| \neq 0$, то такая система всегда совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta,\ x_2 = \Delta_2 / \Delta, \dots, x_n = \Delta_n / \Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

В качестве примера решим СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = -3 \\ 5x_1 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

1. Выпишем матрицу системы и столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Находим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\times1\times3 + (-1)\times5\times5 + 1\times3\times0 - 1\times1\times5 - (-1)\times3\times3 - 2\times5\times0 = -15\,.$$

3. Находим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20\,.$$

4. Находим решение:

$$x_1 = \frac{-18}{-15} = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{-1}{-15} = \frac{1}{15}, \quad x_3 = \frac{20}{-15} = -\frac{4}{3}\,.$$

3.3. Метод Гаусса

Пример 1. Дана СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Обнулим коэффициенты при x_1 во второй и третьей строчках. Для этого умножим их на $2/3$ и 1 соответственно и сложим с первой строкой:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Теперь обнулим коэффициент при x_2 в третьей строке, умножив вторую строку на -6 и сложив с третьей:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ -x_3 = 1 \end{cases}$$

В результате мы привели исходную систему к треугольному виду, тем самым закончив первый этап алгоритма.

На втором этапе разрешим полученные уравнения в обратном порядке. Имеем:

$x_3 = -1$ из третьего,

$x_2 = 3$ из второго, подставив полученное x_3

$x_1 = 2$ из первого, подставив полученные x_2 и x_3.

Пример 2. Дана СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2 \\ 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 13x_5 + 2x_6 = 14 \\ 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 - x_6 = 18 \end{cases}$$

(все коэффициенты при x_1 равны нулю).

Покажем матричное решение. Выпишем расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & -8 & 13 & 2 & 14 \\ 0 & 6 & 3 & -6 & 6 & -1 & 18 \end{pmatrix}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -4, к третьей строке прибавим первую, умноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Выписываем по последней матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad -3x_5 - 2x_6 = 6 \end{cases}$$

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то исходная СЛАУ имеет бесконечное множество решений. Найдём структуру решений.

Из второго уравнения $x_5 = -2 - \frac{2}{3}x_6$. Полагая $x_6 = C_6 = Const$, получаем $x_5 = -2 - \frac{2}{3}C_6$. Подставим x_5 и x_6 в первое уравнение:

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4\left(-2 - \frac{2}{3}C_6\right) + C_6 = 2.$$

Полагая $x_3 = C_3$, $x_4 = C_4$, находим $x_2 = 5 - \frac{1}{2}C_3 + C_4 + \frac{5}{6}C_6$. Ясно, что $x_1 = C_1$.

Пример 3. Дана СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 6 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2), к третьей – первую, умноженную на (-4), к четвёртой – первую, умноженную на (-5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{pmatrix}$$

К третьей прибавим вторую, умноженную на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{pmatrix}$$

В третьей строке для всех $j = 1,2,3$ получили $a_{3j} = 0$, а $b_i \neq 0$. Значит, система несовместна.

4. Матричные уравнения

Пусть даны $(r \times m)$-матрица A и $(r \times n)$-матрица B. Требуется найти $(m \times n)$-матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$AX = B.$$

Если $|A| \neq 0$, то $X = A^{-1}B$.

Пусть даны $(n \times r)$-матрица A и $(m \times r)$-матрица B. Требуется найти $(m \times n)$-матрицу Y, удовлетворяющую уравнению

$$YA = B.$$

Если $|A| \neq 0$, то $Y = BA^{-1}$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решим уравнения: 1) $AX = B$, 2) $YA = B$, 3) $YA = C$.

1) Последовательно имеем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2) Уравнение $YA = B$ не имеет решения, так как матрицы A и B имеют разное число столбцов.

3)

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решим уравнение $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Последовательно имеем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача оптимизации

Предварительные сведения

Рассмотрим вещественное n-мерное евклидово пространство E^n с элементами $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, для которых термины “точка” и “вектор” будем использовать равноправно. Два элемента из E^n будем различать с помощью верхних индексов, например, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)^T$, $x^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)^T$.

Вектор первых частных производных (градиент) функции $f(x)$ имеет вид

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

(если не возникает недоразумений, вместо символа d/dx будем использовать штрих $'$). Вектор-градиент направлен в сторону возрастания значений функции в данной точке.

Для изучения задач оптимизации полезна геометрическая интерпретация, основанная на понятии линии уровня функции двух переменных $f(x_1, x_2)$.

Линией уровня функции $f(x_1, x_2)$ называется множество L_α, состоящее из тех точек, в которых значение функции постоянно: $L_\alpha = \{x \in \mathrm{E}^2 \mid f(x_1, x_2) = \alpha\}$, где $\alpha \in R$.

Поясним понятие линии уровня. В трёхмерном пространстве квадратичная функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ имеет графиком параболоид:

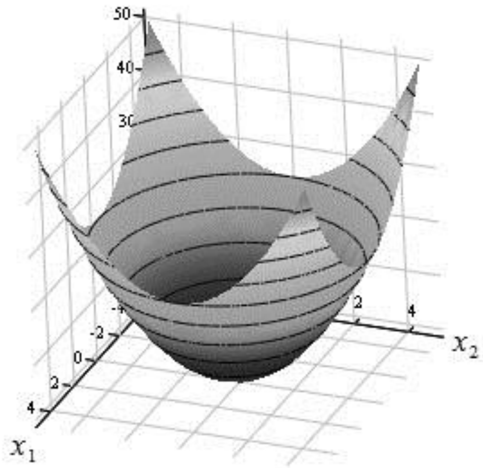


Рис. 1.

Если провести сечения параболоида плоскостями, параллельными плоскости (x_1, x_2), то на поверхности появятся окружности, как это видно на рис. 1. Если теперь спроецировать эти окружности на плоскость (x_1, x_2), то мы увидим следующее:

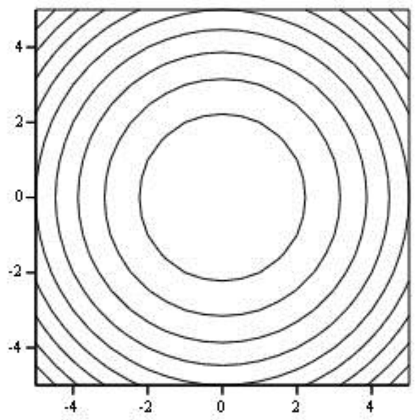


Рис. 2.

Окружности на рис. 2 и есть линии уровня функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Ясно, что если число α примет все свои значения, то окружности заполнят всю плоскость (x_1, x_2). В каждой точке линии уровня значения функции постоянны, причём для рассматриваемой функции при возрастании радиуса окружности значения функции возрастают. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что вектор-градиент функции направлен в сторону возрастания её значений. Действительно, $f^{/}(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)^T$, и, например, при $x_i = 1$ получаем координаты $f^{/}(1,1) = (2,2)^T$, а сам вектор-градиент изобразится так:

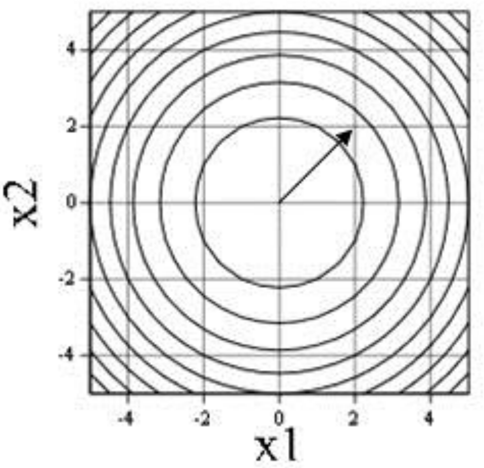


Рис. 3.

В достаточно общей ситуации линии уровня некоторой функции $f(x)$ и вектор-градиент можно изображать следующим образом:

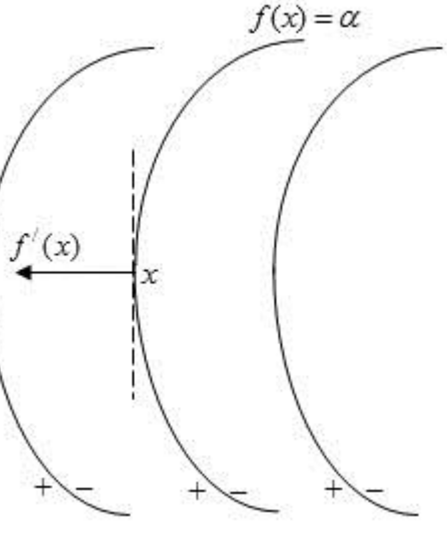


Рис. 4.

Знак "+" стоит с той стороны линии уровня L_α, где $f(x) > \alpha$, знак "–" стоит с той стороны линии уровня L_α, где $f(x) > \alpha$ (то есть обозначения "–" и "+" показывают лишь изменение значений функции от меньшего к большему). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то градиент $f^{/}(x)$ перпендикулярен к проходящей через x линии уровня (точнее, перпендикулярен касательной – на рисунке она изображена пунктиром – к линии уровня в точке x).

Постановка задачи оптимизации

Пусть в пространстве E^n заданы множество X и функция $f(x)$, определённая на X. Требуется найти точки экстремума (минимума или максимума) функции $f(x)$ на X. Краткая запись задачи на минимум (которую мы и будем далее изучать) имеет вид

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \qquad (5)$$

или (стрелка означает цель) $f(x) \to \min\limits_{x \in X}$.

Функция $f(x)$ называется *целевой* функцией, множество X – *допустимым* множеством, любой элемент $x \in X$ – *допустимой точкой* задачи (5).

Точка $x^* \in X$ называется:

- точкой *глобального* минимума функции $f(x)$ на множестве X, если
$$f(x^*) \le f(x),\ x \in X; \qquad (6)$$
- точкой *локального* минимума функции $f(x)$ на множестве X, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что
$$f(x^*) \le f(x),\ x \in X \bigcap U_\varepsilon(x^*), \qquad (7)$$
где $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathrm{E}^n \mid \| x - x^* \| < \varepsilon\}$ – шар радиуса ε с центром в точке x^*, то есть ε-окрестность точки x^*.

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ – норма элемента. Понятие нормы является обобщением понятия модуля $|\cdot|$ элемента на многомерные пространства. Евклидова норма в пространстве E^n определяется как

$$\| x \| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

а расстояние между двумя точками x^1, x^2 равно

$$\| x^1 - x^2 \| = \sqrt{(x^1 - x^2)^T (x^1 - x^2)} = \sqrt{\langle x^1 - x^2, x^1 - x^2 \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i^2)^2}$$

(сравните с расстоянием $|x - y|$ на вещественной прямой R, определённым для любых $x, y \in R$ как модуль разности). Существуют и другие нормы, например, кубическая, полиэдральная. Норма вектора интерпретируется как его длина.

Если неравенство (6) или (7) выполняется как строгое при $x \ne x^*$, то x^* называется точкой *строгого* минимума в глобальном или локальном смысле.

Решения задачи (5), то есть точки минимума и максимума функции f на X, называют также *точками экстремума*, а саму задачу (5) – экстремальной задачей.

Задача на максимум $g(x) \to \max\limits_{x \in X}$ сводится к задаче на минимум следующим образом: $h(x) = -g(x) \to \min\limits_{x \in X}$. Задача на минимум (5) эквивалентна задаче на максимум в следующем смысле:

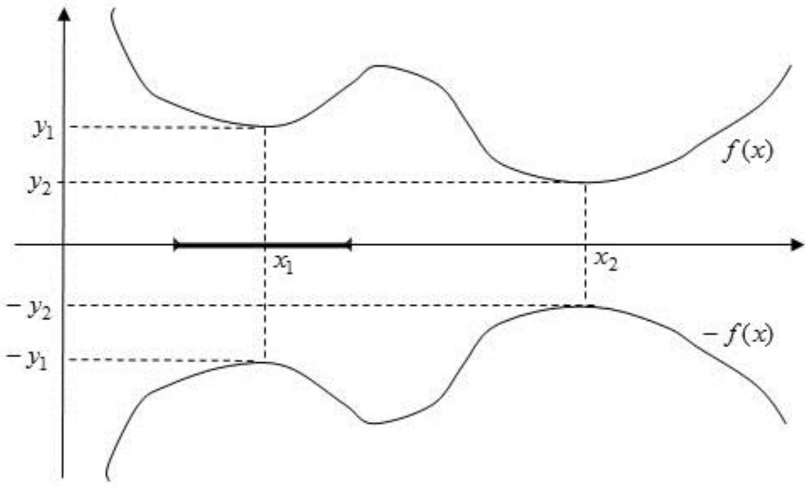


Рис. 5.

На графике в точке x_2 функция $f(x)$ имеет глобальный минимум, а в точке x_1 – локальный (окрестность точки выделена жирным). Эти же точки являются соответственно глобальным и локальным максимумами функции $-f(x)$.

Задача математического программирования

Наиболее общим классом задач условной оптимизации являются задачи математического программирования:

$$f(x) \to \min_{x \in X}, \tag{8}$$

$$X = \{x \subset \mathrm{E}^n \mid g_j(x) \le 0,\ \ j = \overline{1,k},\ \ h_j(x) \le 0,\ \ j = \overline{k+1,m}\}.$$

Ограничения-неравенства могут выполняться как строгие неравенства и как равенства. Ограничения, которые выполняются в некоторой точке как равенства, называются *активными*, а как неравенства – *пассивными*.

Проиллюстрируем постановку задачи следующим примером:

$$f(x) = x_2 \to \min,$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$

$$g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \le 0,$$

$$h(x) = x_1 + x_2 = 0.$$

Геометрически целевая функция представляет собой прямую, параллельную оси x_1 (на рис. 8 пунктирная прямая), первое ограничение – круг единичного радиуса, второе ограничение – внутренняя часть параболы, ветви которой направлены вправо, третье – прямая, являющаяся биссектрисой второго и четвёртого координатных углов. Пересечение всех этих множеств и образует допустимое множество (жирный отрезок на прямой $h(x) = 0$):

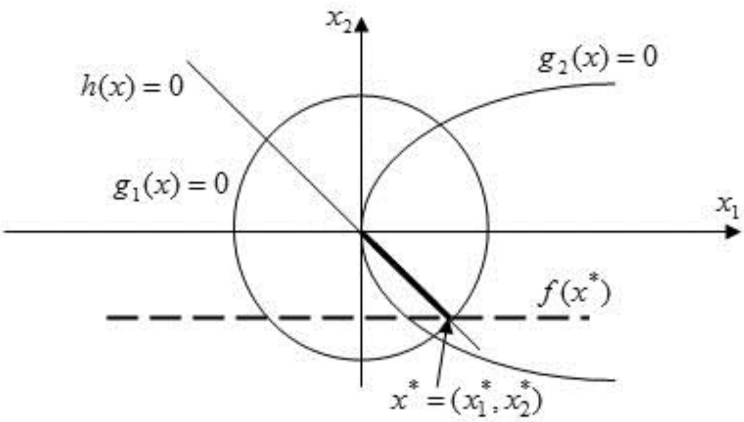


Рис. 6.

Решением задачи является “нижняя” угловая точка пересечения окружности $g_1(x)=0$ и прямой $h(x)=0$. Ограничения $g_1(x)\le 0$ и $h(x)=0$ активны (точка x^* лежит на границе допустимого множества, а значит $g_1(x^*)=0$ и $h(x^*)=0$), ограничение $g_2(x)\le 0$ пассивно, так как для него $g_2(x^*)<0$.

Составим функцию Лагранжа задачи (8)

$$L(x,\lambda_0,\lambda,\mu)=\lambda_0 f(x)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)+\sum_{j=k+1}^{m}\mu_j h_j(x).$$

Теорема. *Пусть в задаче* (8) *функции* f, g_j $(j=\overline{1,k})$ *дифференцируемы в точке* $x^*\in X$, *функции* h_j $(j=\overline{k+1,m})$ *непрерывно дифференцируемы в некоторой её окрестности. Если* x^* *– локальный минимум задачи* (8), *то существуют такие не все равные нулю числа* $\lambda_0\ge 0$, $\lambda_j\ge 0$ $(j=\overline{1,k})$, μ_j $(j=\overline{k+1,m})$, *что*

$$L'_x(x^*,\lambda_0,\lambda,\mu)=0, \qquad (9)$$

$$\lambda_j g_j(x^*)=0,\ \ j=\overline{1,k}. \qquad (10)$$

В задаче на минимум множители $\lambda_1\ge 0,\ldots,\lambda_k\ge 0$ (в задаче на максимум они неположительны), а множители $\mu_{k+1},\ldots,\mu_m$, соответствующие ограничениям-равенствам, могут иметь любой знак. Условие (10) называется *условием дополняющей нежёсткости*. Оно означает, что множители Лагранжа, соответствующие пассивным ограничениям-неравенствам, должны обращаться в нуль.

Решим задачу

$$f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2\to\min,$$
$$3x_1+2x_2\le 7,\ -2x_1+3x_2\ge 8.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\big((x_1-3)^2+(x_2-4)^2\big)+$$
$$+\lambda_1(3x_1+2x_2-7)+\lambda_2(8+2x_1-3x_2).$$

Найдём частные производные, приравняем их к нулю и к полученной системе добавим условия дополняющей нежёсткости:

$$L'_{x_1}(x,\lambda_0,\lambda)=2\lambda_0(x_1-3)+3\lambda_1+2\lambda_2=0,$$
$$L'_{x_2}(x,\lambda_0,\lambda)=2\lambda_0(x_2-4)+2\lambda_1-3\lambda_2=0,$$

$$\lambda_1(3x_1+2x_2-7)=0,\ \lambda_2(8+2x_1-3x_2)=0,$$
$$\lambda_i \ge 0,\ |\lambda_1|+|\lambda_2| \ne 0.$$

Пусть $\lambda_0=0$, тогда

$$3\lambda_1+2\lambda_2=0,$$
$$2\lambda_1-3\lambda_2=0.$$

Решая уравнения, находим $\lambda_1=\lambda_2=0$, что невозможно.

Пусть $\lambda_0=0.5$, тогда имеем систему

$$x_1-3+3\lambda_1+2\lambda_2=0,$$
$$x_2-4+2\lambda_1-3\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1(3x_1+2x_2-7)=0,$$
$$\lambda_2(8+2x_1-3x_2)=0.$$

Если $\lambda_1=\lambda_2=0$, то имеем точку $x_1=3$, $x_2=4$, однако она не удовлетворяет обоим ограничениям.

Если $\lambda_1=0$, $\lambda_2\ne 0$, то из системы уравнений

$$x_1-3+2\lambda_2=0,$$
$$x_2-4-3\lambda_2=0,$$
$$8+2x_1-3x_2=0$$

находим точку $x_1=35/13$, $x_2=58/13$ однако она не удовлетворяет первому ограничению.

Если $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2=0$, то из системы уравнений

$$x_1-3+3\lambda_1=0,$$
$$x_2-4+2\lambda_1=0,$$
$$3x_1+2x_2-7=0$$

находим точку $x_1=9/13$, $x_2=32/13$ однако она не удовлетворяет второму ограничению.

Если $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2\ne 0$, то с использованием условий дополняющей нежёсткости получаем систему уравнений

$$x_1-3+3\lambda_1+2\lambda_2=0,$$
$$x_2-4+2\lambda_1-3\lambda_2=0,$$
$$3x_1+2x_2-7=0,$$
$$8+2x_1-3x_2=0,$$

из которой находим точку $x_1^*=5/13$, $x_2^*=38/13$ и множители $\lambda_1=10/13$, $\lambda_2=2/13$. Эта точка и является решением задачи, $f(x_1^*,x_2^*)=8$.

Пример оформления материалов учебной компьютерной практики

Вариант 1

Задание №1. Вычислить матрицу $C=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 6 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Решение: Задаем исходные матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Задаем формулу для вычисления матрицы С и получаем результат:

$$C := A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.645 & 2.118 & -5.349 \\ 1.231 & -2.923 & 6.923 \\ 0.675 & -1.775 & 4.237 \end{pmatrix}$$

Задание №2. Вычислить определитель матрицы, если

$$A(v) = \begin{pmatrix} v & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & v & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Зададим исходную матрицу:

$$A(v) := \begin{pmatrix} v & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & v & 1 \end{pmatrix} \qquad v := 1, 2 .. 10$$

Зададим определитель матрицы

$$A(v) := \left| \begin{pmatrix} v & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & v & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$A(v) =$

0
10
22
36
52
70
90
112
136
162

Задание №3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3.2x_1 + 5.4x_2 + 4.2x_3 + 2.2x_4 = 5.2 \\ 2.1x_1 + 3.2x_2 + 3.1x_3 + 1.1x_4 = 9.6 \\ 1.2x_1 + 0.4x_2 - 0.8x_3 - 0.8x_4 = 7.2 \\ 4.7x_1 + 10.4x_2 + 9.7x_3 + 9.7x_4 = -16.8 \end{cases}$$

Решение:Зададим матрицу коэффициентов при неизвестных и вектор свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} 3.2 & 5.4 & 4.2 & 2.2 \\ 2.1 & 3.2 & 3.1 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & -0.8 & -0.8 \\ 4.7 & 10.4 & 9.7 & 9.7 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5.2 \\ 9.6 \\ 7.2 \\ -16.8 \end{pmatrix}$$

И получим решение 3 способами:

<u>1 способ.</u> $X = A^{-1} * b$, где A- матрица системы, а b – правая часть:

$$x := A^{-1} \cdot b$$

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>2 способ.</u> С помощью функции lsolve найдем неизвестные

$$res := \mathrm{lsolve}(A, b)$$

$$res = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>3 способ.</u> С помощью функции *Find*:

Given

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 5.2 \\ 9.6 \\ 7.2 \\ -16.8 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Сравниваем результат. Во всех трех способах решения одинаковый, значит решение верное.

Задание №4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X \cdot B = C$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:Зададим исходные матрицы.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -6.333 & -33.667 & 23 \\ 2.667 & 10.667 & -6.333 \end{pmatrix}$$

Задаем формулу: $x := A^{-1} \cdot C \cdot B$
Получаем решение

$$x = \begin{pmatrix} -6.5 & -11.5 & -1.875 \\ 73.5 & 106.5 & 64.875 \end{pmatrix}$$

Задание №5. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Норма затрат сырья на единицу продукции каждого вида

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Стоимость единицы сырья каждого типа задана вектором B=(25, 20).
Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида?
Решение:

	Норма затрат сырья на единицу продукции		Количество произведенных единиц
1 вид продукции	2	2	100
12 вид продукции	6	5	200
3 вид продукции	8	6	150
Стоимость	20	25	

$B \cdot (A \cdot X)$

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 25 & 20 \end{pmatrix}$$

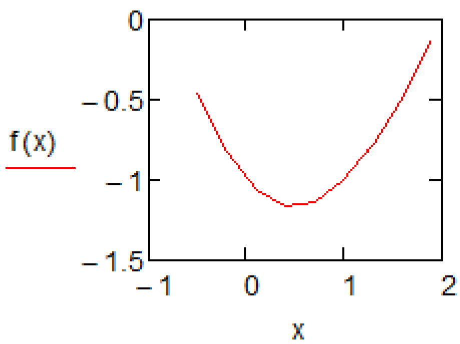
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2.2 \times 10^3 \\ 2.1 \times 10^3 \end{pmatrix} \qquad B \cdot (A \cdot X) = 9.7 \times 10^4$$

Ответ: 97000

Задание №6. В MathCad построить график и найти все корни уравнения, используя команду solve, функцию root, вычислительный блок Given: $x^2 - 2^x = 0$
Решение:

$f(x) := x^2 - 2^x$

$x := -2, -1 .. 2$



$x1 := -0.7 \qquad x2 := 1.9$

Given
$f(x1) = 0$
$\mathrm{root}(f(x1), x1) = -0.767$
$\mathrm{root}(f(x2), x2) = 2$

Задание №7. Решить в MathCad задачу оптимизации.

$$25(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \to max$$

$$x_1+x_2 \ge 2,$$

$$x_1-x_2 \ge -2$$

$$x_1+x_2 \le 6$$

$$x_1-3x_2 \le 2$$

$$x_i \ge 0$$

Решение:

$f(x1,x2) := 25(x1-2)^2+(x2-2)^2$ $\quad x1 := 1 \quad x2 := 1$

Given

$x1 + x2 \ge 2$

$x1 - x2 \ge -2$

$x1 + x2 \le 6$

$x1 - 3x2 \le 2$

$x1 \ge 0$

$x2 \ge 0$

$$\text{Maximize}(f, x1, x2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Задание №8. Используя функции rkfixed, Rkadapt, Odesolve, на отрезке [0,10] с шагом h=0.01 проинтегрировать в MathCad дифференциальное уравнение, построить таблицу решения и график решения: $f(x,y)=\cos(2x+y)+1.5(x-y), y(0)=0$

Решение:

$f(x,y) := \cos(2x+y)+1.5(x-y)$ $\quad y := 0$

$$m := \frac{10-0}{0.01}$$

$z := \text{rkfixed}(y, 0, 10, m, f)$ $\quad W := \text{Rkadapt}(y, 0, 10, m, f)$

z =

	0	1
0	0	0
1	0.01	$9.999\cdot10^{-3}$
2	0.02	0.02
3	0.03	0.03
4	0.04	0.04
5	0.05	0.05
6	0.06	0.06
7	0.07	0.07
8	0.08	0.079
9	0.09	0.089
10	0.1	0.099
11	0.11	0.108
12	0.12	0.118
13	0.13	0.127
14	0.14	0.136
15	0.15	...

W =

	0	1
0	0	0
1	0.01	$9.999\cdot10^{-3}$
2	0.02	0.02
3	0.03	0.03
4	0.04	0.04
5	0.05	0.05
6	0.06	0.06
7	0.07	0.07
8	0.08	0.079
9	0.09	0.089
10	0.1	0.099
11	0.11	0.108
12	0.12	0.118
13	0.13	0.127
14	0.14	0.136
15	0.15	...

$x := 0$

Given

$$\frac{d}{dx}y(x) = \cos(2x + y(x)) + 1.5(x - y(x))$$

$x := 0 \quad y(0) = 0$

$y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$

$x := 0, 0.01..10$

$y(x) =$

0
$9.995 \cdot 10^{-3}$
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.069
0.079
0.089
0.099
0.108
0.118
0.127
0.136
...

Задание №9. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 120%. Если бы стипендия дочери уменьшилась в 4 раза, общий доход семьи сократился бы на 6%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение:

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 0.25z = 0.94 \\ 3x + y + z = 1.2 \end{cases}$$

$x := 0 \quad y := 0 \quad z := 0$

Given

$3x + y + z = 1.2$

$x + y + z = 1$

$x + y + 0.25z = 0.94$

$$\mathrm{find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.82 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

Ответ: 82%