МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Математика

1. Код и наименование направления подготовки:

15.03.01 Машиностроение

2. Профиль подготовки:

Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств

3. Квалификация (степень) выпускника:

Бакалавр

4. Форма обучения:

Очная, заочная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

6. Составители:

Б.У. Шарипов, доктор технических наук, доцент

Е.С. Мещерякова, преподаватель

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную работу и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе лекционных занятий следует не только слушать излагаемый материал и кратко его конспектировать, но и участвовать в анализе примеров, предлагаемых преподавателем, в рассмотрении и решении проблемных вопросов, выносимых на обсуждение. Необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

8. Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Тема лекции	Рассматриваемые вопросы
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ		
01	Матрицы. Операции над матрицами. Определители	Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства.

02	Ранг матрицы. Обратная матрица	Ранг матрицы. Теорема о ранге. Вычисление ранга матрицы. Обратная матрица. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.
03	Критерий совместности Кронекера-Капелли. Метод Гаусса	Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Однородная и неоднородная системы. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений. Метод Гаусса.
04	Формулы Крамера. Матричный метод	Решение системы n линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Определители n-го порядка и их свойства. Разложение определителя по строке (столбцу). Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по правилу Крамера.
05	Векторы	Векторы. Определение. Обозначения. Операции над векторами. Пространство векторов Линейная независимость. Базис и координаты. Векторное произведение. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведений.
06	Линии на плоскости	Уравнения прямых и кривых на плоскости. Уравнение прямой по точке и вектору нормали. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Угол между прямыми на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка на плоскости. Гипербола. Парабола. Эллипс.
07	Уравнения плоскости и прямой в пространстве	Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Конические поверхности.
	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	
08	Введение в математический анализ	Множества. Операции с множествами. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Критерий Коши. Арифметические свойства пределов. Переход к

		пределу в неравенствах. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
09	Пределы. Функция и непрерывность функции действительной переменной	Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства предела функции. Односторонние пределы. Замечательные пределы. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва, их классификация. Сравнение функций. Эквивалентные функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, промежуточные значения.
10	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила нахождения производной и дифференциала. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Понятие об асимптотическом разложении. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
11	Неопределённый и определённый интеграл	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных и трансцендентных функций. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов. Геометрические и механические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными

		пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.
12	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
13	Кратные и криволинейные интегралы	Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие n-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление.
14	Элементы теории поля	Скалярное и векторное поле. Оператор Гамильтона. Потенциальное поле, его свойства. Соленоидальное поле, его свойства и строение.
15	Числовые и функциональные ряды	Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА		
16	Случайные события	Пространство элементарных событий. Понятие случайного события. Вероятность. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Элементарная теория вероятностей. Методы вычисления вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли.
17	Случайные величины. Системы случайных величин	Дискретные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное распределение и его свойства. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.
18	Статистическое описание результатов наблюдений	Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и

		дисперсия. Статистические оценки: несмещенные, эффективные, состоятельные. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.
19	Статистические методы обработки результатов наблюдений	Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве долей и средних.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ		
20	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.
21	Линейные уравнения и системы	Линейные дифференциальные уравнения: однородные и неоднородные. Общее решение. Фундаментальная система решений. Метод Лагранжа вариации постоянных. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида. Операционный метод.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО		
22	Элементы теории функции комплексного переменного	Комплексные числа. Функции комплексного переменного.

9. Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

№	Тема занятия	Рассматриваемые вопросы
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ		
01	Матрицы. Операции над матрицами. Определители	Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства.
02	Ранг матрицы. Обратная матрица	Ранг матрицы. Теорема о ранге. Вычисление ранга матрицы. Обратная матрица. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.
03	Критерий совместности Кронекера-Капелли. Метод Гаусса	Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Однородная и неоднородная системы. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений. Метод Гаусса.
04	Формулы Крамера. Матричный метод	Решение системы n линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Определители n-го порядка и их свойства. Разложение определителя по строке (столбцу). Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными по правилу Крамера.
05	Векторы	Векторы. Операции над векторами. Пространство векторов Линейная независимость. Базис и координаты. Векторное

		произведение. Линейные операции над векторами. Проекция на ось. Декартовы координаты векторов и точек. Скалярное произведение векторов, его основные свойства, координатное выражение. Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрический смысл. Координатное выражение векторного и смешанного произведений.
06	Линии на плоскости	Уравнения прямых и кривых на плоскости. Уравнение прямой по точке и вектору нормали. Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Угол между прямыми на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка на плоскости. Гипербола. Парабола. Эллипс.
07	Уравнения плоскости и прямой в пространстве	Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Конические поверхности.
	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	
08	Введение в математический анализ	Множества. Операции с множествами. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Критерий Коши. Арифметические свойства пределов. Переход к пределу в неравенствах. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
09	Пределы. Функция и непрерывность функции действительной переменной	Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства предела функции. Односторонние пределы. Замечательные пределы. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва, их классификация. Сравнение функций. Эквивалентные функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, промежуточные значения.

10	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила нахождения производной и дифференциала. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты функций. Понятие об асимптотическом разложении. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
11	Неопределённый и определённый интеграл	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных и трансцендентных функций. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов. Геометрические и механические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.
12	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
13	Кратные и криволинейные интегралы	Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие n-кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление.
14	Элементы теории поля	Скалярное и векторное поле. Оператор

		Гамильтона. Потенциальное поле, его свойства. Соленоидальное поле, его свойства и строение.
15	Числовые и степенные ряды	Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА		
16	Случайные события	Пространство элементарных событий. Понятие случайного события. Вероятность. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Элементарная теория вероятностей. Методы вычисления вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли.
17	Случайные величины. Системы случайных величин	Дискретные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Нормальное распределение и его свойства. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.
18	Статистическое описание результатов наблюдений	Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия. Статистические оценки: несмещенные, эффективные, состоятельные. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал.
19	Статистические методы обработки результатов наблюдений	Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве долей и средних.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ		
20	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных

		уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.
21	Линейные уравнения и системы	Линейные дифференциальные уравнения: однородные и неоднородные. Общее решение. Фундаментальная система решений. Метод Лагранжа вариации постоянных. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида. Операционный метод.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО		
22	Элементы теории функции комплексного переменного	Комплексные числа. Функции комплексного переменного.

10. Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

10.1 Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

Контрольные работы по дисциплине «Математика» должны быть выполнены в соответствии с вариантом, который совпадает с порядковым номером фамилии студента в групповом списке.

В данных методических материалах рассматриваются темы в объеме рабочей программы по дисциплине «Математика», позволяющие самостоятельно освоить необходимый теоретический материал и выполнить контрольные задания. В соответствии с этим каждый раздел содержит рассматриваемые вопросы, позволяющие изучить основной теоретический материал, и вопросы для самопроверки. Цель последних – помочь студентам при повторении и закреплении материала. По всем темам приведены подробные решения типовых примеров и задач, что должно способствовать лучшему пониманию и усвоению предмета.

Раздел ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Матрицы и операции над ними

1. Умножение матрицы на число.
2. Сложение матриц
3. Умножение матриц.

Определитель квадратной матрицы

4. Определитель второго порядка.
5. Определитель третьего порядка.
6. Определитель n – го порядка.

Системы линейных уравнений и их решение

7. Решение систем линейных уравнений методом последователь-ного исключения неизвестных (методом Гаусса).
8. Применение определителей к исследованию и решению системы линейных уравнений.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами, и каковы их свойства?
2. Как сложить две матрицы и всегда ли это можно сделать?
3. Как умножить матрицу на число?
4. Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
6. Что называется определителем (детерминантом) второго и третьего порядков, каковы их свойства?

7. Каковы способы вычисления определителей?

8. Что называется произведением двух матриц? Каковы свойства произведения матриц?

9. Как умножить матрицу на матрицу? Всегда ли это выполнимо?

10. Какая матрица называется единичной, квадратной и транспонированной?

11.Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравне-ний?

12. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие сис-темы называются совместными, а какие несовместными?

13. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

14. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

15. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

16. Что можно сказать о системе линейных уравнений, если ее определи-тель равен нулю?

17. При каком условии однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?

18. Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.

19. Какие разновидности метода Гаусса вы знаете?

20. Что называется рангом системы линейных уравнений? Как, исполь-зуя метод Гаусса, можно найти ранг системы линейных уравнений?

21. Какие неизвестные в системе линейных уравнений, и в каком случае называют свободными, а какие базисными?

22. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?

23. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?

24. Запишите систему линейных уравнений с помощью матриц.

25. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

Пример. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix},$$

найти матрицу $2A+B$.

Пользуясь определениями 1.8 и 1.9, получим следующие матрицы:

$$2A=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 4\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 2 & 8\\ 6 & 4 & 6\end{pmatrix},$$

$$2A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+4 \\ 4+5 & 2+7 & 8+8 \\ 6+1 & 4+2 & 6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Составить матрицу $A^T B$.

Пользуясь определениями 1.10 и 1.11, получим матрицы

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению 1.10, результатом перемножения матриц A и B будет матрица размерности 3×3, а при перемножении матриц B и A получится матрица размерности 1×1:

$$AB=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}=2\cdot1+4\cdot4+1\cdot3=21.$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = (1\ 2) \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

По определению 1.10, результатом перемножения матриц A и B будет матрица размерности 1×2:

$$(1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (13\ 16).$$

Пример. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу A^3.

Воспользуемся определением 1.10 и запишем:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Матрицы. Операции с матрицами»

Вариант 1

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 12 & -3 & 7 & 8 \\ -7 & 10 & 0 & 9 \\ 12 & 13 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 & 2 \\ 0 & -5 & 17 & 23 \\ 17 & 5 & 12 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $2A + 3B$;

4) A^T;

5) $2E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 9\\ 3 & 1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 17\\ 12 & 1 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}11 & 9\\ 0 & 8\\ -2 & 7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -1 & 12\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 2

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4 & 1\\ 10 & -1 & 6 & 0\\ -5 & 17 & 3 & 2\\ -4 & -1 & -2 & 12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -8 & 15 & 7\\ 2 & -3 & 12 & 35\\ 14 & 2 & 10 & 10\\ 2 & -1 & 2 & -5\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $4A-2B$;

4) A^T;

5) $3E+2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 7\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 10\\ 11 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 8\\ 3 & 9\\ -1 & 6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 3

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}8 & 7 & -1 & 2\\ 11 & -5 & 3 & 8\\ -1 & 10 & 4 & 5\\ -2 & -5 & -5 & 10\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & -5 & 10 & 3\\ 1 & -4 & 11 & 18\\ 13 & 5 & 16 & 11\\ 3 & -3 & 7 & -5\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $5A+B$;
4) A^T;
5) $-E-B^T$.
2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 7\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 10\\ 11 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 8\\ 3 & 9\\ -1 & 6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 4

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -8 & 1\\ 13 & -7 & 2 & 9\\ -5 & 13 & 7 & 6\\ -1 & -6 & -4 & 12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9 & -3 & 16 & 9\\ 0 & -5 & 12 & 19\\ 14 & 6 & 17 & 10\\ 2 & -2 & 9 & -4\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-A+2B$;
4) A^T;
5) $12E+5B^T$.
2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 9\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 14\\ 15 & 3 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10 & 7\\ 6 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -5 & 11\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы
1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 5

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 0 \\ 10 & -1 & 6 & 7 \\ -1 & 16 & 9 & 0 \\ -7 & -5 & -2 & 10 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 & 8 \\ 7 & -3 & 10 & 18 \\ 15 & 2 & 13 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-2A+2B$;
4) A^T;
5) $6E-B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 12 \\ 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 25 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

По формуле вычисления определителя квадратной матрицы второго порядка запишем:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 2-3\cdot 7=-23.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 1 - (1\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1) = 19.$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Для вычисления определителя матрицы A воспользуемся теоремой 2.3 и разложим определитель по элементам первой строки:

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14}.$$

Поскольку $a_{12} = 0,$ вычислим алгебраические дополнения A_{11}, A_{13}, A_{14}.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{11} = 10,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = 2,$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{14} = 10,$$

$$|A| = (-1)\cdot 10 + 3\cdot 2 + 4\cdot 10 = 36.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Определитель квадратной матрицы»

Вариант 1

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ 3 & 4 & 11\\ 8 & 0 & 37\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}4 & 0 & -6 & 0\\ 3 & 1 & -4 & 0\\ 5 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 2

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 12 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 8 & 7 & 19\\ 3 & 1 & 31\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 13 & 8 & -6\\ 12 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}4 & -12 & -6 & 0\\ 18 & 1 & -2 & -2\\ 7 & 4 & 1 & -1\\ -1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 3

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}18 & 0\\ -5 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}13 & 5 & 9\\ 2 & 1 & 3\\ 17 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 0 & 3 & 12 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 4

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -90 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -17 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & 8 \\ 9 & 11 & 34 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 36 & -15 & -10 & 2 \\ 12 & -7 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 5

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 7 & 19\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10 & 5 & -1\\ 2 & 17 & 1\\ 21 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 25\\ 7 & 0 & 6\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 3\\ -2 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Составить обратную матрицу.

Для решения задачи воспользуемся теоремой 3.3 и запишем: $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-3)=3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-2)=2;\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1.$$

Таким образом,

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ невырожденная, поскольку её определитель $|A| = -1$ отличен от ноля. Матрицу A^{-1} найдём любым из известных способов: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Искомая матрица X может быть найдена по формуле:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Выполняя указанные действия, получим решение матричного уравнения:

$$X = \begin{pmatrix} -38 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Обратная матрица»

Вариант 1

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 41 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 155 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Вариант 3

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -30 & 0 \\ 1 & 20 & 5 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 4

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 0 & 12 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Вариант 5

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

<u>**Пример.**</u> Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

<u>**Прямой ход.**</u> Приведём расширенную матрицу системы

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду. Переставим первую и вторую строки матрицы A_b, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сложим вторую строку полученной матрицы с первой, умноженной на (-2), а её третью строку – с первой строкой, умноженной на (-7). Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке полученной матрицы прибавим вторую строку, умноженную на (-3), в результате чего получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы привели данную систему уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ \qquad 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ \qquad\qquad -x_3 = -2. \end{cases},$$

<u>Обратный ход.</u> Начиная с последнего уравнения полученной ступенчатой системы уравнений, последовательно найдём значения неизвестных: $x_3 = 2,\ x_2 = 5,\ x_1 = 1.$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна: она имеет хотя бы одно решение – нулевое (так называемое, тривиальное решение). Нас будут интересовать только нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений. Рассмотрим пример решения однородной системы линейных уравнений методом Гаусса.

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдём решение системы линейных уравнений, рассмотренной в предыдущем примере, методом Крамера. Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку $\det A = -30 \neq 0$. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90.$$

По формулам, представленным в теореме 5.2, вычислим значения неизвестных: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Задания для самостоятельной работы по теме «Системы линейных уравнений и методы их решения»

Вариант 1

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 2

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 3

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 4

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 5

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Раздел МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Контрольные работы берутся из учебного пособия: Солодовникова Е.Н., Шарипов Б.У. Математика: учебное пособие по организации самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки «Машиностроение», профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств». – Борисоглебск: БФ ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», 2015. – 100 с.

1. Множества, функции, последовательности

Множества, действительные числа.

Основные понятия.

Числовые множества, множество действительных чисел.

Числовые промежутки. Окрестность точки.

Функция.

Понятие функции.

Числовые функции. График функции. Способы задания функции.

Основные характеристики функции.

Обратная функция.

Сложная функция.

Основные элементарные функции и их графики.

Последовательности.

Числовая последовательность.

Предел числовой последовательности.

Предельный переход в неравенствах.

Предел монотонной ограниченной последовательности. Число *e*.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры различных множеств, совпадающих множеств.
2. Дайте определение подмножества; почему пустое множество является подмножеством любого множества?
3. Какое множество называется упорядоченным?
4. Какие числовые множества называются промежутками?
5. Из отрезка [*a*; *b*] удален интервал (*a*; *b*). Что осталось?
6. Что называется абсолютной величиной числа?
7. Что больше: |2-3| или |2|+|-3| ?
8. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x|}{x}$?
9. Что называется областью определения функции; множеством значений функции?
10. Какую функцию называют постоянной?
11. Какие функции называются возрастающими, убывающими?
12. Сформулируйте определение чётной (нечётной) функции. В чём состоит геометрический смысл чётности и нечётности функций?

13. Какая функция называется периодической? Что называется периодом функции?

14. Какие функции называются простейшими элементарными функциями?

15. Какая функция называется сложной?

16. Напишите определение числовой последовательности.

Индивидуальные задания

Пример 1.1

Решить уравнение: $\left||x-4|-2\right|=3$.

<u>Решение</u>.

По определению модуль числа *m* равен:

$$|m|=\begin{cases} m, \text{ } если \text{ } m\ge 0,\\ -m, \text{ } если \text{ } m<0. \end{cases}$$

Воспользуемся данным определением для решения уравнения и рассмотрим 2 случая:

1) $|x-4|-2=3 \Rightarrow |x-4|=5$

а) $\begin{cases} x-4\ge 0,\\ x-4=5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 4,\\ x=9; \end{cases} \Rightarrow x=9$.

б) $\begin{cases} x-4<0,\\ -x+4=5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4,\\ x=-1; \end{cases} \Rightarrow x=-1$.

2) $|x-4|-2=-3 \Rightarrow |x-4|=-1$ - это уравнение не имеет корней, так как модуль не может быть отрицательной величиной.

Ответ: $x_1=-1, x_2=9$.

Пример 1.2

Решить неравенство: $|x+5|-|x-1|\ge 2$.

<u>Решение</u>.

Воспользуемся определением модуля числа и в соответствии с ним разобьём числовую ось на промежутки (рис.1):

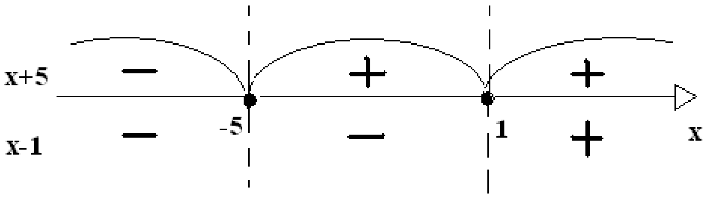


Рис. 1

1) $\begin{cases} x\le -5,\\ -x-5+x-1\ge 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -5,\\ -6\ge 2; \end{cases} \Rightarrow$ нет решений.

2) $\begin{cases} -5<x<1,\\ x+5+x-1\ge 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5<x<1,\\ 2x\ge -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5<x<1,\\ x\ge -1; \end{cases} \Rightarrow x\in [-1;1)$

3) $\begin{cases} x\ge 1,\\ x+5-x+1\ge 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1,\\ 6\ge 2; \end{cases} \Rightarrow x\in [1;+\infty)$

Ответом будет служить объединение найденных решений. Таким образом, решение исходного неравенства имеет вид: $x \in (-1; +\infty)$.

1.1. Решить уравнения и неравенства

1. $x^2 + 2|x+3| - 10 \le 0$
2. $x^2 - |3x+2| + x \ge 0$
3. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$
4. $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$
5. $|x-1| - |x| + |2x+3| > 2x + 4$
6. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$
7. $||x+1| + 2| = 2$
8. $||x-1| + 2| = 1$
9. $|x+3| - |x+1| < 2$
10. $|x-3| + |x+3| > 8$
11. $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$
12. $|x^2 - 3x| > |x^2| - |3x|$
13. $|(x^2 + 2x + 5) + (x - 5)| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|$
14. $||2 - 3x| - 1| > 2$
15. $||x| - 2| \le 1$
16. $x^2 - 2|x| - 3 = 0$
17. $|\sin x| - \sin x = 2$
18. $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$
19. $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$
20. $|x+4| = |x-4|$
21. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$
22. $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$
23. $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$
24. $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$
25. $|x| < x + 1$

Пример 2

Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} + \lg(x-1)$.

Решение.

Так как исходная функция представляет собой сумму функций, то её область определения будет состоять из всех тех значений *x*, которые принадлежат одновременно областям определения функций $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ и $y_2 = \lg(x-1)$. Таким образом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

Полученная система неравенств равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}(x+1)(x-2)<0,\\ x>1.\end{cases}$$

Решением этой системы является интервал (1; 2).

Таким образом, $D(y)=(1;\,2)$.

1.2. Найти области определения функций, заданных формулами

1. $y=3x+2$
2. $y=x^3+5x+6$
3. $y=\dfrac{3x-1}{5x+6}$
4. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$
5. $y=\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$
6. $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$
7. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$
8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$
9. $y=\sqrt{4-x^2}$
10. $y=\sin 3x$
11. $y=x+\cos 2x$
12. $y=tgx$
13. $y=ctg\dfrac{x}{2}$
14. $y=\arcsin x$
15. $y=\arccos(x+2)$
16. $y=arctg(2x+1)$
17. $y=\log_2\log_3\log_4 x$
18. $y=\log_2(-x)$
19. $y=\log_{\frac{1}{3}}|x|$
20. $y=\log_5(2x-1)$
21. $y=\log_7(4x-x^2)$
22. $y=\dfrac{1}{\log_5(1-3x)}$
23. $y=3^{\frac{1}{x}}$
24. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}-3}$
25. $y=\arcsin\dfrac{1}{x+3}$

Пример 3.1

Выяснить, чётна или нечётна функция $f(x)=x^5-x^3+x$.

Решение.

Для выполнения данного задания необходимо воспользоваться определением чётной (нечётной) функции.

Функция $y=f(x)$ называется ***чётной***, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого *x* из области определения верно равенство $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется ***нечётной***, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого *x* из области определения верно равенство $f(-x)=-f(x)$.

1) Исходная функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Следовательно, область определения данной функции симметрична относительно начала координат.

2) Найдём $f(-x)$:

$$f(-x)=(-x)^5-(-x)^3+(-x)=-x^5+x^3-x=-(x^5-x^3+x)=-f(x).$$

Из 1)-2) следует, что заданная в условии функция нечётная.

Пример 3.2

Выяснить, является ли функция чётной или нечётной: $y=14\lg(2x-3)$.

Решение.

Найдём область определения функции: для этого учтём тот факт, что выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительно.

$2x-3>0 \Leftrightarrow 2x>3;\ x>1{,}5$.

Таким образом, $D(y)=(1{,}5;+\infty)$, т.е. область определения не является симметричной относительно начала координат. Следовательно, согласно определению данная функция ни чётна, ни нечётна (функция общего вида).

1.3. Установить чётность или нечётность функции

1.	$y=x\cdot 4^{-x^2}$	2.	$y=\log_2\dfrac{2-x}{2+x}$
3.	$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$	4.	$y=5^{-x^2}$
5.	$y=x^2-x$	6.	$y=x^3+x^2$
7.	$y=\lg\cos 2x$	8.	$y=x^2+3x-1$
9.	$y=x^4-2x^2+3$	10.	$y=x^3+2x$
11.	$y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	12.	$y=\cos x+x\sin x$
13.	$y=x\cdot 2^{-x}$	14.	$y=2^x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
15.	$y=2x\sin^2 x-3x^3$	16.	$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-3^x$

17. $y = \dfrac{x}{\sin x}$

18. $y = 5\log_2(x+1)$

19. $y = x^4 \sin 7x$

20. $y = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$

21. $y = x^4 - 3x^2 + x$

22. $y = |x| + 2$

23. $y = |x+2|$

24. $y = \lg \cos x$

25. $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$

Пример 4

Дана последовательность $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8};...$ 1)Написать формулу общего элемента последовательности; 2) установить, что она: а) ограничена или не ограничена; б) имеет грани сверху и снизу; в) бесконечно большая или бесконечно малая; г) возрастающая, неубывающая, убывающая или невозрастающая; д) немонотонная, монотонная, строго монотонная.

<u>Решение</u>.

1). Общий элемент последовательности $a_n = \dfrac{1}{2n}$.

2а) Последовательность ограниченная, так как $0 < a_n \le 1$.

2б). Верхняя грань последовательности M=a_1=1; нижняя грань последовательности $m = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

2в). Для любого ε > 0 $|a_n| = \left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, тогда для всех n > N (N – целое число из ряда натуральных чисел $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$) имеем $|a_n| < \varepsilon$, то есть последовательность $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ бесконечно малая.

2г). Последовательность убывающая, так как $a_{n\ 1} > a_n$.

2д). Последовательность строго монотонная, так как:

$a_1 > a_2 > a_n > ... > a_{n-1} > a_n$.

1.4. Написать формулу общего элемента последовательности, для которой установить, что она:

- ограничена или не ограничена;
- имеет грани сверху и снизу;
- бесконечно большая или бесконечно малая;
- возрастающая, неубывающая, убывающая или невозрастающая;
- немонотонная, монотонная, строго монотонная.

1. $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6};...$

2. $1; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{5^2}; \frac{1}{7^2};...$

3. $1; 2\frac{1}{4}; 2\frac{7}{9}; 3\frac{1}{16}; 3\frac{6}{25};...$

4. $1; \frac{1}{1\cdot 2}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};...$

5. $2;10;26;82;242;730$

6. $-1;1;-1;1;-1;\ldots$

7. $-1;2;-3;4;-5;\ldots$

8. $\ln 1;\ln 2;\ln 3;\ln 4;\ldots$

9. $2;4;6;8;10;\ldots$

10. $\sin 1;\sin 2;\sin 3;\sin 4;\ldots$

11. $1;-2;3;-4;5;-6;7;\ldots$

12. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots$

13. $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots$

14. $1;1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\ldots$

15. $1;1;2;2;3;3;\ldots$

16. $\frac{1}{3};-\frac{1}{5};\frac{1}{9};-\frac{1}{17};\ldots$

17. $1;\frac{1}{3};\frac{1}{7};\frac{1}{15};\ldots$

18. $\frac{1}{4};\frac{1}{11};\frac{1}{30};\frac{1}{85};\ldots\frac{1}{3^n+n}$

19. $1;\frac{1}{4};\frac{1}{9};\frac{1}{16};\ldots$

20. $\frac{1}{2};\frac{1}{7};\frac{1}{24};\frac{1}{77};\ldots$

21. $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{11};\frac{1}{20};\ldots$

22. $1;\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{1}{12};\ldots$

23. $2;\frac{3}{2};\frac{4}{3};\frac{5}{4};\ldots$

24. $-1;2;1;\frac{4}{5};\ldots$

25. $\frac{1}{5};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{4}{11};\ldots$

Пример 5

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}$.

<u>Решение</u>.

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x числитель и знаменатель дроби и применив теорему о свойствах пределов, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{4}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{1-0}=3.$$

1.5. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n-1}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n+11}+\frac{\cos n}{10n}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n+1}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin n!}{n^2+1}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n}\right)$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}\right)$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+9+...+n^2}{n^3+3n+2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

2. Пределы функций

2.1 Предел функции.

2.1.1 Предел функции в точке.

2.1.2 Односторонние пределы.

2.1.3 Предел функции при $x\to\infty$

2.1.4 Бесконечно большая функция.

2.2 Бесконечно малые функции (БМФ).

2.2.1 Определения и основные теоремы.

2.2.2 Связь между функцией, ее пределом и БМФ.

2.2.3 Основные теоремы о пределах.

2.2.4 Признаки существования пределов.

2.2.5 Первый замечательный предел.

2.2.6 Второй замечательный предел.

2.3 Эквивалентные БМФ (ЭБМФ).

2.3.1 Сравнение БМФ.

2.3.2 ЭБМФ и основные теоремы о них.

2.3.4 Применение ЭБМФ.

2.4 Непрерывность функции.

2.4.1 Непрерывность функции в точке.

2.4.2 Непрерывность функции в интервале и на отрезке.

2.4.3 Точки разрыва функции и их классификация.

2.4.4 Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.

2.4.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.

2. Прочитайте запись: $\lim f(x)=b$. Дайте определение предела функции в точке.

3. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?

4. Приведите примеры бесконечно малых и бесконечно больших величин.

5. Какие функции называются эквивалентными бесконечно малыми?

6. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

7. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

8. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.

Индивидуальные задания

Теорема (*). Пусть функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ также непрерывны в этой точке (частное при $g(x_0)\neq 0$).

Пример 6

Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$.

<u>Решение</u>.

Так как в точке x = π/2 функции 1, sin$x$, cos2x непрерывны, то по теореме (*) функция $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$ непрерывна в точке x = π/2, т.е. предел функции и ее значение в этой точке равны. Тогда, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\sin(\pi/2)}{1-\cos(2\pi/2)} = \frac{1+1}{1-(-1)} = 1.$$

Пример 7

Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

<u>Решение</u>.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Непосредственно теорему о пределе частного применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель x+2.

Получаем $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x^2-2x+4}$.

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\dfrac{0}{0}$ раскрыта.

Применяя теорему о свойствах пределов, окончательно находим:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)} = \frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

2.1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{1+x-1}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

5. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$

9. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

11. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

Пример 8

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\ln x)}{2x-2e}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

<u>Решение</u>.

1) Имеем ln(1+3*x*) ~ 3*x*; sin 5*x* ~ 5*x*. Тогда получим:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

2) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2/4}=4\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=-4\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-4\lim_{x\to0}\frac{x^2/2}{x^2}=-2$$

3) $$\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{2x-2e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln[1+(\ln x-1)]}{2x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{2(x-e)}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\ln[1+(\frac{x}{e}-1)]}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{2(x-e)}=\lim_{x\to e}\frac{x-e}{2e(x-e)}=\frac{1}{2e}.$$

4) $$\lim_{x\to3}\frac{\log_3 x-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\log_3 x-\log_3 3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\log_3\frac{x}{3}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{\ln x/3}{\ln 3}}{x-3}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to3}\frac{\ln[1+(x/3-1)]}{x-3}=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to3}\frac{x/3-1}{x-3}=\frac{1}{3\ln 3}.$$

5) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2.2.Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(e^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2-1}}{3x}$

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$

12. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

15. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-10^x}{3^x-7^x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x}-1}{3^{x}-1}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)^{x}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{1/x^2}$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{1/x-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{1/x}$

3. Производная функции

3.1 Производная функции

3.1.1 Задачи, приводящие к понятию производной.

3.1.2 Определение производной: её механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.

3.1.3 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

3.1.4 Производная суммы, разности, произведения и частного функций.

3.1.5 Производная сложной и обратной функций.

3.1.6 Производные основных элементарных функций.

3.1.7 Гиперболические функции и их производные.

3.1.8 Таблицы производных.

3.2 Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

3.2.1 Неявно заданная функция.

3.2.2 Функция, заданная параметрически.

3.3 Логарифмическое дифференцирование.

3.4 Производные высших порядков.

3.4.1 Производные высших порядков явно заданной функции.

3.4.2 Механический смысл производной второго порядка.

3.4.3 Производные высших порядков неявно заданной функции.

3.4.4 Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.

Вопросы для самопроверки.

1. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?
2. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируете зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
8. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
9. В чем заключается механический смысл производной?

10. Что называется производной второго порядка, и каков ее механический смысл?

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' + v'$;
2. $(uv)' = u'v + uv'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
4. $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;
5. $y_x' = \frac{1}{x_y'}$, если $y = f(x),\ x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(C)' = 0$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Индивидуальные задания

Пример 9

Используя правила и формулы дифференцирования, найти производные функций:

1) $f(x) = 5 + x^2 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = x\sin x$;

4) $f(x) = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Решение.

1) $f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x)' =$

$= (5)' + (x^3)' + (3x^2)' + (\sin x)' + (\cos x)' + (2tgx)' - (3ctgx)' + (\log_2 x)' + (3\ln x)' =$

$= 3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x}\log_2 e + \frac{3}{x}$;

2) $f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)} =$

$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$;

3) $f'(x) = (x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cdot\cos x$;

4) $f'(x) = (x\cdot arctgx)' - (\frac{1}{2}\ln(1+x^2))' = (x)'arctgx + x(arctgx)' - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' =$

$= 1\cdot arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)} = arctgx$.

3.1. Найти производные функций

1.	$y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$	$y = x^2 - \frac{1}{2^{x^e}}$
2.	$y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$	$y = \frac{x}{2x-1}$
3.	$y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$	$y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$
4.	$y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$	$y = \frac{\ln x}{x}$
5.	$y = 4x^5 - 3\sin x + 5ctgx$	$y = x\ln x$
6.	$y = \sqrt[3]{x} + 4\cos x - 2tgx + 3$	$y = \sin 3x$
7.	$y = 3 + 4x^2 + \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x$	$y = \sin(x^2 + 5x + 2)$
8.	$y = ctg^3\frac{x}{3}$	$y = \arcsin(e^{4x})$
9.	$y = \arcsin\sqrt{x}$	$y = \sqrt{1-x^2}$

10.	$y=\sin^4 x+\cos^4 x$	$y=\sqrt{1+5\cos x}$
11.	$y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$	$y=\sqrt{2x-\sin 2x}$
12.	$y=5^x+6^x+\left(\dfrac{1}{7}\right)^x$	$y=\sin^2 x$
13.	$y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\dfrac{1}{x}$	$y=\sin^3 x$
14.	$y=\dfrac{8}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$	$y=\cos^{100} x$
15.	$y=tgx-ctgx$	$y=arctg\,\dfrac{x+3}{x-3}$
16.	$y=x^2e^{x}$	$y=arcctg^2\,\dfrac{1}{x}$
17.	$y=x\cos x$	$y=\ln\sin x$
18.	$y=x^2tgx$	$y=\ln\cos x$
19.	$y=\sqrt[7]{x}\ln x$	$y=\ln tg5x$
20.	$y=x\arccos x$	$y=\ln(1+\cos x)$
21.	$y=10^{3-\sin^3 2x}$	$y=e^{tgx}$
22.	$y=\sin(e^x)$	$y=\ln(x^2-3x+7)$
23.	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$y=\ln(x^2+2x)$
24.	$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$
25.	$y=\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)$	$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

4. Дифференциал функции

4.1. Дифференциал функции
- 4.1.1. Понятие дифференциала функции.
- 4.1.2. Геометрический смысл дифференциала функции.
- 4.1.3. Основные теоремы о дифференциале.
- 4.1.4. Таблицы дифференциалов.
- 4.1.5. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.
- 4.1.6. Дифференциалы высших порядков.

4.2. Исследование функций с помощью производных.
- 4.2.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.
- 4.2.2. Правило Лопиталя.
- 4.2.3. Возрастание и убывание функций.

4.2.4. Максимум и минимум функций.

4.2.5. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

4.2.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

4.2.7. Асимптоты графика функции.

4.2.8. Общая схема исследования функции и построение графика.

4.3. Формула Тейлора.

4.3.1. Формула Тейлора для многочлена.

4.3.2. Формула Тейлора для произвольной функции.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

2. Как можно объяснить, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

3. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?

4. В чем заключается необходимый и достаточный признак экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функций с помощью первой производной.

5. Как отыскивают экстремумы функций с помощью второй производной?

6. В чем разница между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее набольшего и наименьшего значений?

7. Как определяется выпуклость и вогнутость функции?

8. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования?

Индивидуальные задания

4.1. Найти пределы, используя правило Лопиталя

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x\ln(x-1))$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx\ln x)$;

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x)$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$;

14. $\lim\limits_{x\to -\infty}xe^{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$;

16. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$;

17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

18. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\,ctgx)$;

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-tgx)$;

22. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$;

23. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{a^x}{x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$;

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$

5. Неопределенный интеграл

5.1. Неопределенный интеграл.
- 5.1.1. Понятие неопределенного интеграла.
- 5.1.2. Свойства неопределенного интеграла.
- 5.1.3. Таблица основных неопределенных интегралов.

5.2. Основные методы интегрирования.
- 5.2.1. Метод непосредственного интегрирования.
- 5.2.2. Метод интегрирования подстановкой.
- 5.2.3. Метод интегрирования по частям.

5.3. Интегрирование рациональных функций.
- 5.3.1. Понятие о рациональных функциях.
- 5.3.2. Интегрирование рациональных дробей.

5.4. Интегрирование тригонометрических функций.
- 5.4.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
- 5.4.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
- 5.4.3. Использование тригонометрических преобразований.

5.5. Интегрирование иррациональных функций.
- 5.5.1. Квадратичные иррациональности.
- 5.5.2. Тригонометрическая подстановка.
- 5.5.3. Интегрирование дифференциального бинома.

5.6. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы.

Вопросы для самопроверки

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Запишите первообразные для функций: 3, $4x^3$, $\cos x$, $\frac{2}{x}$.
4. Какая из двух функций $5x^4$ или $x^5 + 4$ является первообразной для другой?
5. Первообразная определяется неоднозначно. Как это нужно понимать?
6. Что называется неопределенным интегралом?
7. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
8. Как называются все элементы равенства $\int f(x)dx = F(x) + c$?
9. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
10. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
11. Как доказать справедливость каждой формулы интегрирования?
12. Что такое интегральные кривые? Как они расположены друг относительно друга? Могут ли они пересекаться?
13. Как расположены касательные к интегральным кривым в точках, имеющих одну и ту же абсциссу?

Таблица 1. ***Таблица основных интегралов***

1. $\int 0 \cdot dx = c$;	2. $\int 1 \cdot dx = x + c$;	3. $\int x^n dx = \frac{x^{n-1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + c \quad (x \neq 0)$;	5. $\int e^x dx = e^x + c$;	6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (0 < a \neq 1)$;	8. $\int \cos x dx = \sin x + c$;	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;	11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$;
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + k}\right\rvert + c$;	14. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctg + c$;	15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$;
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$ $(a \neq 0)$		

Индивидуальные задания

Пример 10

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение.

Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то интеграл можно записать в следующем виде:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx .$$

Применяя свойство неопределенного интеграла, задаваемое равенством $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, получим:

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} .$$

Получили два табличных интеграла. По формулам находим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C .$$

5.1.Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы

1. $\int \frac{dx}{16 - x^4}$; 2. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$; 3. $\int \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$; 4. $\int \frac{-2x^4 + 4x^2 - 1}{1 - x^2} dx$;

5. $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx$; 6. $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$; 7. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$; 8. $\int 2^x e^x dx$;

9. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$; 10. $\int \frac{3tg^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$; 11. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$;

12. $\int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx$; 13. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$; 14. $\int 4x \left(3 + \frac{4\sqrt[x]{}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$;

15. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$; 16. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$; 17. $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$;

18. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx$; 19. $\int \left(\frac{1}{x^2 - 25} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} \right) dx$;

20. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$; 21. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 22. $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$;

23. $\int ctg^2 x dx$; 24. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; 25. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$

Пример 11

Вычислить интеграл $\int arctgx dx$.

Решение.

Положим $u = arctgx, dv = dx$.

Тогда $du = (arctgx)'dx = \frac{dx}{1+x^2}$; $\int dv = \int dx, v = x$

(здесь в качестве *v* можно взять любую из первообразных вида *x* + C, где C – произвольная постоянная. Взято *v* = *x*, т.е. C=0).

По формуле ($\int udv = uv - \int vdu$) имеем:

$$\int \underset{u}{arctgx}\,\underset{dv}{dx} = \underset{v}{x}\,\underset{u}{arctgx} - \int \underset{v}{x}\,\underset{du}{\frac{dx}{1+x^2}} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

5.2. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы

1. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; 2. $\int e^{\sqrt{x}}dx$; 3. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 4. $\int \cos(\ln x)dx$;

5. $\int \ln(x^2+2)dx$; 6. $\int \ln^2 x dx$; 7. $\int (x^2+1)\cos x dx$; 8. $\int e^x \sin\frac{x}{2}dx$;

9. $\int e^{2x}\cos 3x dx$; 10. $\int e^x \sin x dx$; 11. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 12. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

13. $\int x^2 e^x dx$; 14. $\int x^2 \sin x dx$; 15. $\int x^2 \cos x dx$; 16. $\int (x+1)\cos 3x dx$;

17. $\int x\sin x dx$; 18. $\int x\cos x dx$; 19. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$; 20. $\int x^3 e^{-x}dx$;

21. $\int xe^{5x}dx$; 22. $\int xe^{-x}dx$; 23. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$;

24. $\int (x^3+6x-7)\ln x dx$; 25. $\int (x^2+3x+2)\ln x dx$

Пример 12

Вычислить интеграл $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

Решение.

Полагаем $t = e^x$, $x = \ln t$. Отсюда $dx = (\ln t)'dt = \frac{dt}{t}$.

Следовательно,

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t}dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln(1+t) - \ln t + C$$

Возвращаясь к переменной *x*, окончательно получаем:

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = 2\ln(1+e^x) - x + C.$$

5.3. Применяя метод подстановки, вычислить интегралы

1. $\int\frac{dx}{2-3x}$; 2. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; 3. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 4. $\int\frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$;

5. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\sqrt{x+1}-1}}dx$; 6. $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$; 7. $\int\frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$;

8. $\int\cos^3 x\sin x dx$; 9. $\int\sin^2 x\cos x dx$; 10. $\int e^{\cos x}\sin x dx$;

11. $\int e^{x^3}x^2 dx$; 12. $\int e^{\sin x}\cos x dx$; 13. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 14. $\int\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$;

15. $\int e^{-tgx}\sec^2 x dx$; 16. $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; 17. $\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$; 18. $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

19. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; 20. $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}dx$; 21. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 22. $\int\frac{3^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

23. $\int\frac{(arctgx)^{100}}{1+x^2}dx$; 24. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; 25. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

6. Определенный интеграл

6.1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
6.2. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
6.3. Формула Ньютона-Лейбница.
6.4. Основные свойства определенного интеграла.
6.5. Вычисления определенного интеграла.
 6.5.1. Формула Ньютона-Лейбница.
 6.5.2. Интегрирование подстановкой.
 6.5.3. Интегрирование по частям.
 6.5.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
6.6. Несобственные интегралы.
 6.6.1Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода).
 6.6.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода).
6.7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
 6.7.1. Схемы применения определенного интеграла.
 6.7.2. Вычисление площадей плоских фигур.
 6.7.3. Вычисление дуги плоской кривой.
 6.7.4. Вычисление объемов тел.
 6.7.5. Вычисление площади поверхности вращения.
 6.7.6. Механические приложения определенного интеграла.
6.8. Приближенное вычисление определенного интеграла.
 6.8.1. Формула прямоугольников.
 6.8.2. Формула трапеций.
 6.8.3. Формула парабол (Симпсона).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое определенный интеграл?
2. Как называются все элементы в записи $\int_a^b f(x)dx$?

3. От чего зависит приращение $F(b)-F(a)$?

4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

5. В чём заключается геометрический смысл определенного интеграла?

6. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю? Ответ обоснуйте.

7. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Индивидуальные задания

Пример 13

Вычислить интеграл $\int_a^b \sin x dx$.

Решение.

Так как одной из первообразных для функции $f(x)=\sin x$ является функция $F(x)=-\cos x$, то, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

6.1. Вычислить интегралы

1. $\int_0^2 (x^2-1)dx$; 2. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$; 3. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$; 6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$;

7. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 9. $\int_0^2 x(3-x)dx$;

10. $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$; 11. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$; 12. $\int_0^e \ln x dx$;

13. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 14. $\int_1^0 \ln^2 x dx$; 15. $\int_0^{\sqrt{3}} arctgx dx$;

16. $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$; 17. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$; 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$;

19. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 20. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 21. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$;

22. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x dx$; 24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$;

25. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

Пример 14

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x)=1-x^2$ и $y=0$.

Решение.

Можно считать, что эта фигура ограничена осью Оx, графиком функции $f(x)=1-x^2$ и прямыми x = -1, x=1 (рис. 2).

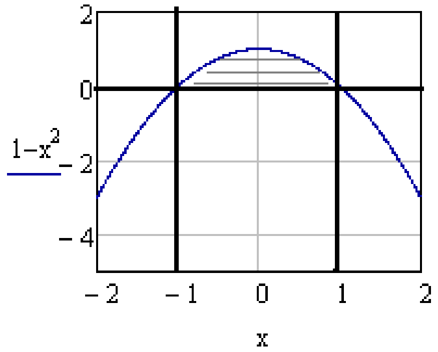


Рис. 2

Поэтому по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$ её площадь равна:

$$S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

6.2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

1. $y=4-x^2$, $y=0$; 2. $y^2=2\rho x$, $x=h$; 3. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$;

4. $y=x^2$, $y=2-x^2$; 5. $y=x^2$, $y=1$; 6. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$;

7. $y=|x|+1$, $y=0, x=-2, x=1$; 8. $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$;

9. $y=\arcsin 2x$, $x=0, y=-\frac{\pi}{2}$; 10. $y=\sin 2x$, $y=1, x=\frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

11. $x^2-y^2=1$, $x=2$; 12. $xy=4$, $x=4, y=4, x=0, y=0$;

13. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; 14. $y=|x^2-1|$, $y=0, x=-2, x=2$;

15. $y=x^2-2x+2$, $x=-1, x=2$ и отрезком $[-1,2]$ оси ox;

16. $y=-x^2+4$, $y=0$; 17. $y=\frac{1}{x}$, $y=0, x=1, x=3$;

18. $y=2\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$; 19. $x-y-1=0$, $x=-4, x=-2, y=0$;

20. $y=-x^2-1$, $x=1, x=4, x=0$; 21. $y=x^2-6x$, $x=0$;

22. $y=x^2$, $y=4, y=9, x=0$; 23. $y=x^2$, $y=2x$;

24. $y=\sin x$, $y=0$, если $\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}$; 25. $y=8+2x-x^2$, $y=x+6$

Пример 15

Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от x=0 до x=5.

<u>Решение</u>.

Данная кривая симметрична относительно оси Оx. Найдем длину верхней ветви кривой. Производная функции $y=x^{3/2}$ равна $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. По формуле длины дуги плоской кривой ($L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)dx}$) получим:

$$L=\int_0^5\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Big|_0^5=\frac{335}{27}.$$

6.3. Вычислить длину дуги кривой

1. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=4$;
2. $y=x^2-1$, отсеченной осью Оx;
3. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от $x=0$ до $x=a$;
4. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;
5. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$;
6. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$;
7. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x=-1$ до $x=2$;
8. $y=x^2$ от $x=0$ до $x=2$;
9. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;
10. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$;
11. $y=\left(\frac{2}{5}\right)x\sqrt[4]{x}-\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Оx.
12. $y=\frac{x^2}{2}$ от $x=0$ до $x=1$;
13. $y=1-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;
14. $x=\frac{t^3}{3}-t$, $y=t^2+2$ от $t=0$ до $t=3$;
15. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t=o$ до $t=\ln\pi$;
16. $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$;
17. $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$;
18. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=4$;
19. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от $x=0$ до $x=a$;
20. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;
21. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$;
22. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x=-1$ до $x=2$;

23. $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$;

24. $x = e^t \cdot \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

25. $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$

Пример 16

Найти объём тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси О*x*.

Решение.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти половину искомого объёма. По формуле объёма тел вращения ($V = \pi \int_a^b y^2(x)dx$) имеем:

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^a y^2(x)dx = \pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2 dx =$$

$$= \left(\pi b^2 x - \frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \pi b^2 a - \frac{\pi b^2 a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}\pi a b^2 .$$

Следовательно, $\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi a b^2$, откуда $V = \frac{4}{3}\pi a b^2$. Если *a*=*b*=*R*, то эллипс является окружностью. Тогда объём тела вращения окружности вокруг оси О*x* есть шар, объём которого $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

6.4. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой

1. $y^2 = 2\rho x$, $x = h$ вокруг оси Ox;
2. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \ge 0$ вокруг оси Ox;
3. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \ge 0$ вокруг оси Oy;
4. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ вокруг оси Ox;
5. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox;
6. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oy;
7. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг оси Ox;
8. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг оси Oy;
9. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг оси Ox;
10. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oy;
11. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $y = 0$;
12. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $x = 0$;
13. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $x = 2$;
14. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $x = -2$;

15. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $y = -1$;

16. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $y = 2$;

17. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $y = 0$;
18. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $x = 0$;
19. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $y = -1$;
20. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $x = 1$;
21. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $x = -1$;
22. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $y = 1$;
23. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ вокруг прямой $y = 0$;
24. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ вокруг прямой $x = 0$;
25. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ вокруг прямой $x = 2\pi$.

Пример 17

Исследовать на сходимость $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.
По определению имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \to -\infty} \int\limits_{R}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \to -\infty} arctgx \,\Big|_{R}^{0} = \lim_{R \to -\infty} (arctg0 - arctgR) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

то есть интеграл сходится.

6.5. Исследовать на сходимость

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$; 2. $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$; 3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$; 4. $\int\limits_{0}^{+\infty} arctgxdx$;

5. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x} dx$; 6. $\int\limits_{0}^{-\infty} \sin xdx$; 7. $\int\limits_{-\infty}^{0} x e^{x} dx$; 8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^a}$;

9. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; 10. $\int\limits_{0}^{1} \ln xdx$; 11. $\int\limits_{0}^{1} \ln^2 xdx$; 12. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} ctgxdx$;

13. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; 14. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-3)^2}$; 15. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$;

17. $\int\limits_{0}^{-\infty} \frac{dx}{x^a}$; 18. $\int\limits_{0}^{-\infty} e^{-x} \sin xdx$; 19. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2} dx$; 20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln xdx}{x^2}$; 22. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x^4}$; 23. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$; 24. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$;

25. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

7. Функции нескольких переменных

7.1. Функции двух переменных

7.1.1 Основные понятия.
7.1.2 Предел функции.
7.1.3 Непрерывность функции двух переменных.
7.1.4Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

7.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.
7.2.1 Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование.
7.2.2 Частные производные высших порядков.
7.2.3 Дифференцируемость и полный дифференциал функции.
7.2.4 Дифференциалы высших порядков.
7.2.5 Производная сложной функции. Полная производная.
7.2.6 Дифференцирование неявной функции.

7.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

7.4.Экстремум функции двух переменных.
7.4.1 Основные понятия.
7.4.2 Необходимые и достаточные условия экстремума.
7.4.3 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

Вопросы для самопроверки.

1. Каким образом можно задать в явном и неявном виде функцию нескольких переменных (ФНП)?
2. Как записать частные производные ФНП?
3. Дайте определение дифференциала ФНП.
4. Что называют функцией по направлению?
5. Сколько видов частных производных второго порядка может иметь функция нескольких переменных?
6. Как записать уравнения касательной плоскости и нормали?
7. Что называют экстремумом функции двух переменных?

Индивидуальные задания

Пример 18

Для уравнения $z = x^2 + y^2$ установить, какую поверхность оно задаёт, и построить линии уровня.

Решение.

Линии уровня данной функции определяются уравнением $x^2 + y^2 = c\ (0 \le c < +\infty)$.

Придавая «c» различные значения, получаем семейство линий уровня, представляющих собой концентрические окружности вокруг начала координат. При $c = 0$ окружность вырождается в точку (0;0).

Построение линий уровня приведено в пособии [9].

Функция $z = x^2 + y^2$ задает параболоид.

7.1. Для приведенных уравнений установить, какие поверхности они задают, и построить линии уровня

1.	$2x+3y-4z-12=0$	2.	$3x-4y+5z-2=0$
3.	$2x+7y-6z=0$	4.	$2y+11z=0$
5.	$x+4y-2z-20=0$	6.	$x^2+y^2=2x$

7. $x^2+y^2+z^2-6x-4y=0$

8. $x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z$

9. $x^2+y^2=z$

10. $x^2+y^2+z^2=z$

11. $x^2+z^2=2z$

12. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=z$

13. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

14. $x^2-y^2=2z$

15. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+z^2=1$

16. $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$

17. $x^2+y^2-z^2=0$

18. $x^2+z^2=4y^2$

19. $x^2+y^2-z^2+1=0$

20. $x^2+z^2-y^2=4$

21. $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1$

22. $x^2-y^2-z^2=25$

23. $y^2-x^2=2z$

24. $z^2-x^2=2y$

25. $x+y+z=1$

Уравнение $x^2+y^2=R$ задаёт прямой круговой цилиндр радиуса R.

Пример 19

Найти область определения функции $U(x,y,z)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$.

Решение.

Действие извлечения квадратного корня возможно при условии $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\geq 0$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$. Данное неравенство определяет замкнутую внутренность эллипсоида – область определения функции $U(x,y,z)$.

7.2. Найти области определения функций

1. $z=\frac{1}{x^2+y^2}$

2. $z=\frac{1}{x+y}$

3. $z=\sqrt{x^2-y^2}$

4. $z=\sqrt{xy}$

5. $z=\sqrt{x}+y$

6. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

7. $z=\frac{1}{1+x^2+y^2}$

8. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$

9. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

10. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

11. $x=\arcsin\frac{y}{x^2}$

12. $z=\ln(x+y)$

13. $u=\ln(z^2-x^2-y^2-1)$

14. $u=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2+z^2}}$

15. $u=\dfrac{x+y-z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$

16. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$

17. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

18. $z=\arcsin(x+y)$

18. $z=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}$

20. $z=\ln(-x+y)$

21. $z=y+\sqrt{x}$

22. $u=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$

23. $u=\sqrt{x+y+z}$

24. $z=\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$

25. $u=\ln(z^2-6x^2-3y^2-6)$

Пример 20

Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+y^2)$.

Решение.

Функция $f(x;y)=x^2+y^2$ определена на всей плоскости. Поэтому для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке $M_0(1;2)$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2)=\lim_{n\to\infty}x_n^2+\lim_{n\to\infty}y_n^2=1^2+2^2=5.$$

7.3. Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{tg(2xy)}{x^2y}$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2-y^2}}$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}(1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y-xy^2}}$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^2+4y}{2xy-1}$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x}{y}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}}x^2y$

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2+y^2)$ 18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{x^2y-xy^2}}$ 22. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^2+4y}{2xy-1}$

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$ 24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$

25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2}$

Пример 21

Найти частные производные функции $z=x^2-2xy^2+y^3$.

Решение.

Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ находим как производную функции $z=f(x;y)$ по аргументу *x* в предположении, что $y=const$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2-2xy^2+y^3)'_x=2x-2y^2+0=2(x-y^2).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2-2xy^2+y^3)'_y=0-4xy+3y^2=y(3y-4x).$$

7.4. Найти частные производные функций нескольких переменных

1. $z=x^3+3x^2y-y^3$ 2. $z=\dfrac{y}{x}$

3. $z=\dfrac{xy}{x-y}$ 4. $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$

5. $z=\sin(x+y)$ 6. $z=x^2y$

7. $z=x^2y^3+x^3y$ 8. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$

9. $z=\dfrac{xy}{x+y}$ 10. $z=x^2\sin y$

11. $z=e^{xy}$ 12. $z=xye^{x\;2y}$

13. $z=e^{-\frac{y}{x}}$ 14. $z=\ln(x+\ln y)$

15. $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$ 16. $z=xe^{-yx}$

17. $z=x^2-2xy-y^2$ 18. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

19. $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 20. $z=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$

21. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 22. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

23. $z=\arcsin(x+y)$ 24. $z=\sqrt{\cos(x^2+y^2)}$

25. $z=\ln(x+y)$

Пример 22

Найти полный дифференциал функции $U=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

<u>Решение</u>.
Находим частные производные функции.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}};\ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}};\ \frac{\partial U}{\partial z}=\frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

Полный дифференциал функции имеет вид:

$$dU=\frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{xydy+xzdz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

7.5. Найти дифференциал функции dz

1. $z=xy^2$; 2. $z=xy$; 3. $z=\sqrt{x^2-y^2}$;

4. $z=\sin xy^2$; 5. $z=tg\dfrac{x}{y}$; 6. $z=\ln(x+5y^2)$;

7. $z=y^x$; 8. $z=arctg\dfrac{y}{\sqrt{x}}$; 9. $z=xy\cos xy$;

10. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 11. $z=\ln tg\dfrac{x+y}{x-y}$; 12. $z=\arccos\dfrac{x-y}{2x+y}$;

13. $z=\ln(x^2+y^2)$; 14. $z=\ln tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 15. $z=\sin(x^2+y^2)$;

16. $z=x^y$; 17. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 18. $z=e^{xy}$;

19. $z=x^2y^3$; 20. $z=x^2y$; 21. $z=\sqrt{x^3-y^3}$;

22. $z=\sin x^2y^3$; 23. $z=tg\dfrac{x^3}{y}$; 24. $z=\ln(x^2+2y)$;

25. $z=y^{3x}$;

Пример 23

Найти частные производные второго порядка для функции $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$.

<u>Решение</u>.
Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y; \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 7, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2 y \ .$$

7.6. Найти частные производные второго порядка

1.	$z = \frac{x^2}{1-2y}$;	2.	$z = \sin x \cos y$;	3.	$z = x + y + \frac{xy}{x+y}$;
4.	$z = xe^y$;	5.	$z = arctg\frac{x+y}{x}$;	6.	$z = \ln(x + e^{xy})$;
7.	$z = arctg\frac{x+y}{x^2}$;	8.	$z = \ln(x + e^{2xy})$;	9.	$z = x^{2y}$;
10.	$z = e^x(\cos y + x\sin y)$;	11.	$z = \frac{x^2}{y^2}$;	12.	$z = \ln(x - 2y)$;
13.	$z = \frac{x^2}{1-y}$;	14.	$z = x^2 \sin\sqrt{y}$;	15.	$z = y^{x^2}$;
16.	$z = arctg\frac{y}{x}$;	17.	$z = e^x \cos y$;	18.	$z = \sin(x^2 + y^2)$;
19.	$z = x\ln\frac{y}{x}$;	20.	$z = y\ln x$;	21.	$z = x\ln\frac{y}{x}$;
22.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$;	23.	$z = x + xy$;	24.	$z = e^{x\ y^2}$;
25.	$z = x\sin^2 y$				

Пример 24

Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

<u>Решение</u>.

Имеем $f_x' = 2x + y - 2, f_y' = x + 2y - 3$. Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел $x = 1/3, y = 4/3$. Следовательно, $M_0(1/3; 4/3)$ - точка возможного экстремума.

Теперь найдем вторые частные производные и Δ: $f_{xx}'' = 2, f_{xy}'' = 2, f_{yy}'' = 2$, $\Delta = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Так как Δ=3>0 и $f_{xx}'' = 2$ >0, то в точке $M_0(1/3; 4/3)$ данная функция имеет минимум.

7.7. Найти экстремумы функций

1. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ при $0\le x\le\frac{\pi}{2}$; $0\le y\le\frac{\pi}{2}$;

2. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ при $0\le x\le\frac{\pi}{2}$; $0\le y\le\frac{\pi}{2}$;

3. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

4. $z=2xy-4x-2y$;

5. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$;

6. $z=x^3+8y^3-6xy+1$;

7. $z=x^3-y^3-3xy$;

8. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$;

9. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

10. $z=xy(1-x-y)$;

11. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$;

12. $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$;

13. $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$;

14. $z=x^2+y^2$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$;

15. $z=x^2-xy+y^2-4x$, $x=0$, $y=0{,}2x+2y-12=0$;

16. $z=xy+x+y$, квадрат $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$;

17. $z=xy$ в круге $x^2+y^2\le 1$;

18. $z=x^2+3y^2+x-y$, в треугольнике $x=1$, $y=1$, $x+y=1$;

19. $z=1-x^2-y^2$ в круге $(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$;

20. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ в области $0\le x\le\frac{\pi}{2}$; $0\le y\le\frac{\pi}{2}$

21. $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ в области $0\le x\le\frac{3\pi}{2}$; $0\le y\le\frac{3\pi}{2}$;

22. $z=\cos x\cos y\cos(x+y)$ в области $0\le x\le\pi$; $0\le y\le\pi$;

23. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$;

24. $z = 2xy - 4x - 2y$;

25. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

8. Кратные интегралы

8.1 Двойной интеграл.
 8.1.1 Основные понятия и определения.
 8.1.2 Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
 8.1.3 Основные свойства двойного интеграла.
 8.1.4 Вычисление двойного интеграла.
 8.1.5 Приложение двойного интеграла.
8.2 Тройной интеграл.
 8.2.1. Основные понятия.
 8.2.2. Вычисление тройного интеграла.
 8.2.3. Приложения тройного интеграла.

Вопросы для самопроверки

1. Объясните геометрический смысл двойного интеграла.
2. В чём заключается механический смысл двойного интеграла?
3. Какова последовательность вычисления двойного интеграла?
4. В каких случаях при вычислении двойного интеграла применяют замену переменных?
5. Можно ли вычислить площадь плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
6. Приведите примеры вычисления физических характеристик с помощью двойного и тройного интегралов.
7. В чем разница областей применения двойного и тройного интегралов?
8. В каких случаях применяют замену переменных при вычислении тройного интеграла?

Индивидуальные задания

Пример 25

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \mathrm{xy\ dx\ dy}$, где $\mathrm{D} = \{(x; y) | 1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2\}$.

Решение.

В соответствии с известной формулой [6]:

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{dx\ dy} = \int_1^2 \mathrm{dy} \int_1^2 \mathrm{xy\ dx}.$$

Вычисляем внутренний интеграл, считая *y* постоянным:

$$\int_1^2 xy\,\mathrm{dx} = \mathrm{y}\frac{\mathrm{x}^2}{2}\Big|_1^2 = 2y - \frac{1}{2}y.$$

Вычисляем внешний интеграл, для чего полученную функцию интегрируем по y в пределах от 1 до 2:

$$\int_1^2 \left(2y - \frac{1}{2}y\right)dy = \frac{3}{4}y^2\Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Следовательно,

$$\iint_D \text{xy dx dy} = \int_1^2 \text{dx} \int_1^2 xy\,\text{dx} = \frac{9}{4}.$$

8.1.Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам *D*

1. $\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^2}$; $1 \le x \le 2$; $3 \le y \le 4$;

2. $\iint_D xe^{xy}dydx$; $0 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 0$;

3. $\iint_D \sin(x+y)dxdy$; $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$;

4. $\iint_D (yx^2 - 2x^3)dxdy$; $0 \le x \le 1$; $1 \le y \le 2$;

5. $\iint_D \frac{3y^2dxdy}{1+x^2}$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$;

6. $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$;

7. $\iint_D (x^2 + y)dxdy$; $1 \le x \le 2$; $0 \le y \le 1$;

8. $\iint_D (x + y^2)dxdy$; $2 \le x \le 3$; $1 \le y \le 2$;

9. $\iint_D (x + y)dxdy$; $3 \le x \le 5$; $0 \le y \le 2$;

10. $\iint_D (x - y)dxdy$; $1 \le x \le 4$; $1 \le y \le 3$;

11. $\iint_D \frac{y}{x}dxdy$; $1 \le x \le 3$; $4 \le y \le 6$;

12. $\iint_D x^2ydxdy$; $3 \le x \le 6$; $0 \le y \le 2$;

13. $\iint_D xy^2dxdy$; $2 \le x \le 4$; $0 \le y \le 1$;

14. $\iint_D xydxdy$; $3 \le x \le 5$; $0 \le y \le 1$;

15. $\iint_D (x^2 - y)dxdy$; $1 \le x \le 4$; $1 \le y \le 3$;

16. $\iint_D (x^2 + y)dxdy$; $2 \le x \le 3$; $2 \le y \le 4$;

17. $\iint_D (x + y^2)dxdy$; $1 \le x \le 3$; $0 \le y \le 3$;

18. $\iint_D (x + y)dxdy$; $1 \le x \le 4$; $1 \le y \le 4$;

19. $\iint_D (x - y)dxdy$; $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le 2$;

20. $\iint_D \frac{y}{x}dxdy$; $1 \le x \le 3$; $2 \le y \le 3$;

21. $\iint_D x^2ydxdy$; $1 \le x \le 3$; $1 \le y \le 2$;

22. $\iint_D xy^2dxdy$; $2 \le x \le 3$; $1 \le y \le 3$;

23. $\iint_D xydxdy$; $1 \le x \le 3$; $2 \le y \le 4$;

24. $\iint_D \frac{dxdy}{(x-y)^2}$; $0 \le x \le 2$; $1 \le y \le 2$;

25. $\iint_D xe^{xy}dxdy$; $1 \le x \le 2$; $2 \le y \le 4$

8.2. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями

1. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

2. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2$;

3. $z=x+y+a, y^2=ax, x=a, z=0, y=0$ (при y>0)

4. $z^2=xy,\ x=a,\ x=0,\ y=a,\ y=0$;

5. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$;

6. $az=x^2-y^2,\ z=0,\ x=a$;

7. $z^2=xy,\ x+y=a$;

8. $z=xy,\ x+y=a,\ z=0$;

Перейти к полярным координатам

9. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=a^2,\ z=0$;

10. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=a^2,\ z=0$;

11. $z=x,\ x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

12. $z=x^2+y^2, x=x^2+y^2, 2x=x^2+y^2, z=0$;

13. $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z$.

Вычислить площадь области, ограниченной линиями

14. $y^2=x+1,\ x+y=1$;

15. $xy=4,\ x=1,\ y=2$;

16. $xy=4,\ y=x,\ x=4$;

17. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ y=4$;

18. $y^2=4+x,\ x+3y=0$;

19. $y=\ln x,\ x-y=1,\ y=-1$;

20. $y=x^2-2x,\ y=x$;

21. $ax=y^2-2ay,\ y+x=0$;

22. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0$;

23. $xy=\dfrac{a^2}{2},\ xy=2a^2,\ y=\dfrac{x}{2},\ y=2x$.

Применить полярные координаты

24. $x^2+y^2-2ax=0,\ x^2+y^2-2bx=0$ $(0<a<b)$;

25. $x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2-2ax=0,\ y=0$

Пример 26

Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$, где *V*- пирамида, ограниченная плоскостью *x* + *y* + *z* = 1 и координатными плоскостями *x*=0, *y*=0, *z*=0.

Решение.

Область *V* проецируется на плоскость O*xy* в треугольник *G*, ограниченный прямыми *x*=1, *y*=0, *y*=1-*x*. Имеем

$$\iiint\limits_{V}(x+y+z)\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{z-0}^{z-1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y-yx^2-\frac{y^3}{3}\right]_{y-0}^{y-1-x}dx=\frac{1}{6}\int_0^1(2-3x+x^3)\,dx=\frac{1}{6}\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{x-0}^{x-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

8.3. Вычислить тройной интеграл по области *V*, ограниченной поверхностями

1. $\iiint\limits_V (x+y-z)\,dxdydz;\ x=-1,\ x=+1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2$;

2. $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz;\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ y=0,\ z=1$;

3. $\iiint\limits_V xy\,dxdydz;\ x=1,\ x=2,\ y=-2,\ y=-1,\ z=0,\ z=\frac{1}{2}$;

4. $\iiint\limits_V \rho\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta;\ \varphi=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \rho=0,\ \rho=2,\ \theta=0,\ \theta=\frac{\pi}{2}$;

5. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3};\ x=1,\ x=2,\ y=1,\ y=2,\ z=1,\ z=2$;

6. $\iiint\limits_V (x+2y+3z+4)\,dxdydz;\ x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=1$;

7. $\iiint\limits_V (4x+3y+2z+1)\,dxdydz;\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=3$;

8. $\iiint\limits_V z\,dxdydz;\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

9. $\iiint\limits_V x\,dxdydz;\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=1,\ x+z=1$;

10. $\iiint\limits_V yz\,dxdydz;\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$;

11. $\iiint\limits_V xy\,dxdydz;\ x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$;

12. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3};\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

13. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2+z^2=1,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$;

14. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\ x^2+y^2=z^2,\ z=0,\ z=1$;

15. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz;\ x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,\ z=0,\ z=0$;

8.4. Вычислить тройной интеграл с помощью замены переменных

16 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz;\ x^2+y^2+z^2\le R^2-шар$;

17 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz;\ x^2+y^2=z,\ z=1$;

18 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz;\;\; x^2+y^2+z^2 \le R^2$;

19 $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\;\; x^2+y^2=2x,\;\; y=0,\;\; z=0,\;\; z=3$;

20 $\iiint\limits_V z\,dxdydz;\;\; V-\textit{часть шара},\;\; x^2+y^2+z^2 \le R^2 - \textit{находящаяся в первом октанте}$;

21 $\iiint\limits_V (x^2-y^2)\,dxdydz;\;\; x^2+y^2=2z,\;\; z=2$;

22 $\iiint\limits_V (x^2+y+z^2)^3\,dxdydz;\;\; x^2+z^2=1,\;\; y=0,\;\; y=1$;

23 $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;\;\; y^2=3x-x^2,\;\; z=0,\;\; z=2$;

24 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz;\;\; a \le x \le a,\;\; 0 \le y \le b,\;\; 0 \le z \le c$;

25 $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz;\;\; x^2+y^2+z^2=1,\;\; x=0,\;\; y=0,\;\; z=0$

9. Криволинейные интегралы

9.1 Криволинейный интеграл I рода.
- 9.1.1. Основные понятия.
- 9.1.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода.
- 9.1.3. Приложения криволинейного интеграла I рода.

9.2 Криволинейный интеграл II рода.
- 9.2.1. Основные понятия.
- 9.2.2. Вычисление криволинейного интеграла II рода.
- 9.2.3. Формула Остроградского – Грина.
- 9.2.4. Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода.

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличаются криволинейные интегралы I и II родов?
2. Каков геометрический смысл криволинейного интеграла I рода?
3. Какие физические характеристики можно вычислить с помощью криволинейного интеграла I рода?
4. При каком условии криволинейный интеграл I рода позволяет вычислить длину дуги кривой?
5. Отличаются ли по своим свойствам криволинейные интегралы I и II родов? Если да, то чем?
6. Существует ли связь между криволинейными интегралами I и II родов?
7. Существует ли связь между криволинейным и двойным интегралами?

Индивидуальные задания

Пример 27

Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2\,dl$, где AB – часть окружности, $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Решение.

Так как $y^2=a^2\sin^2 t, dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=a\,dt$, то получаем:

$$\int\limits_{AB} y^2 dl=\int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\cdot a\,dt=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt=\frac{a^3}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{a^3\pi}{4}.$$

9.1 Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy$, если путь от A(1;1) до B(3;4) – отрезок прямой.

2. $\int\limits_K (x-y)^2 dx+(x+y)^2 dy$, если К – ломаная OAB, где O(0;0), A(2;0), B(4;2).

3. $\int\limits_{AB}\frac{yds}{\sqrt{x}}$, если AB – дуга полукубической параболы $y^2=(4/9)x^3$ от A(3; $2\sqrt{3}$) до B(8; $\frac{32\sqrt{2}}{3}$).

4. $\int\limits_K ydx-(y+x^2)dy$, если К – дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5. $\int\limits_K ydx+2xdy$, если К – пробегаемый против хода часовой стрелки ромба, стороны которого лежат на прямых $x/3+y/2=\pm1$, $x/3-y/2=\pm1$.

6. $\int\limits_K 2xdy-3ydx$, если К – контур треугольника с вершинами A(1;2), B(3;1), C(2;5), пробегаемый против хода часовой стрелки.

7. $\int\limits_K \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$, если К – I четверть окружности $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

8. $\int\limits_K x^2ydx+x^3dy$, если К – контур, ограниченный параболами $y^2=x$, $x^2=y$ и

9. $\int\limits_K xydl$, если К – отрезок прямой от A(1;2) до B(4;6).

10. $\int\limits_K (x+y)dl$, если К – дуга окружности $x^2+y^2=a^2$, соединяющая точки A(a;0) и B(0;a).

11. Найти массу дуги окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le\pi)$,если линейная плотность ее в точке (x,y) равна y.

12. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой $y=\cos x$ $(0\le x\le\pi)$.

13. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty\le t\le 0)$.

14. $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, К - окружность $x^2+y^2=ax$.

15. $\int\limits_K \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, К- первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$

16. Найти массу первого витка винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, если плотность в каждой точке равна радиусу – вектору этой точки.

17. $\int\limits_{OA} xydx+yzdy+zxdz$, ОА – четверть окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

18. Найти центр тяжести однородной полуокружности $x^2+y^2=R^2$, $y\ge 0$, радиуса R.

19. Найти момент инерции арки циклоиды $(\gamma=1)$ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ относительно оси Ох.

20. $\int\limits_K ydx-xdy$, К – прямая ОА (О(0;0), А(1;2)).

21. $\int\limits_K ydx-xdy$, К – парабола с вертикальной осью (О(0;0), А(1;2)).

22. $\int\limits_K ydx-xdy$, К – ломаная ОВА (О(0;0), А(1;2), В(1;0)).

23. $\int\limits_K ydx-xdy$, К – ломаная ОСА (О(0;0), С(0;2), А(1;2)).

24. $\int\limits_K (x+y)dl$, К – отрезок прямой $y=2x-1$, $(-1\le x\le 2)$.

25. $\int\limits_K xdl$, К – дуга параболы $y=\frac{x^2}{2}$ $(0\le x\le 1)$.

10. Ряды

10.1 Числовые ряды.

10.1.1. Основные понятия.
10.1.2. Ряд геометрической прогрессии.
10.1.3.Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
10.1.4. Признаки сравнения рядов.
10.1.5. Признак Даламбера.
10.1.6. Признак Коши.
10.1.7. Признак Лейбница.
10.1.8. Абсолютная и условная сходимости числового ряда. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

10.2 Степенные ряды.

10.2.1. Основные понятия. Сходимость степенных рядов. (Теорема Н.Абеля).
10.2.2. Разложение функций в степенные ряды.
10.2.3. Вычисление значений функций и определенных интегралов с помощью степенных рядов.

10.3. Понятие о ряде Фурье.

Вопросы для самопроверки

1. В чём разница знакочередующихся и знакопеременных рядов?
2. Перечислите признаки сходимости числовых рядов.

3. В чём отличия степенных рядов от числовых?
4. Сформулируйте признаки сходимости степенных рядов.
5. В чём особенности ряда Тейлора?
6. Каковы особенности ряда Маклорена?
7. Укажите особенности рядов Фурье.
8. В каких случаях применяют ряды синусов и косинусов?

Индивидуальные задания

Пример 28

Показать, что ряд сходится:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение.

Составим частную сумму S_n первых n членов ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Чтобы упростить выражение для S_n разложим общий член ряда на элементарные дроби. Тогда получим:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},\quad \text{отсюда}\quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *n* в числителях обеих частей равенства, получаем:

$A+B=0$, $A=1$, откуда $A=1$, $B=-1$, поэтому

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Слагаемые суммы S_n примут вид:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S\;=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Приводя подобные члены, получаем:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Переходя к пределу, находим:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1$$

Таким образом, данный ряд сходится и его сумма *S* равна 1.

10.1. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости рядов

$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 2 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ 3 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

4 $\sum_{n-1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 5 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 6 $\sum_{n-1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

7 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$ 8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$ 9 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{10n}{n^2+1}$

10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$ 11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$ 12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-3^n}{3^n-2}$

С помощью признака сравнения проверить сходимость ряда

13 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 14 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$

16 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$ 18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n-1}}$

С помощью признака Даламбера исследовать сходимость ряда

19 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 21 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

22 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ 24 $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(2^n+1)}$

Пример 29

Найти радиус и интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots.$

<u>Решение</u>.

Это степенной ряд, все коэффициенты которого, кроме a_0, отличны от нуля.

Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда.

Здесь $a_n=\frac{1}{n}$ и $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

Поэтому $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

Следовательно, радиус сходимости *R*=1, и ряд сходится на интервале (-1; 1).

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=\pm 1$. При *x*=1 получаем гармонический ряд $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $x=-1$ – ряд $\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала [-1;1) и расходится вне него.

10.2. Найти радиус и интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3 $\sum_{n-1}^{\infty} n!x^n$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2}$

6 $\sum_{n-1}^{\infty} 3^n x^n$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$

8 $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^5\sqrt{3}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3}}+\ldots$

9 $1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\ldots$

10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

13 $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}+\frac{x^3}{5^3\sqrt{4}}+\ldots$

14 $1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}}+\ldots$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2^n}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n+1}$

17 $\sum_{n-1}^{\infty} (nx)^n$

18 $\sum_{n=1}^{\infty} 1+(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{5^n\sqrt{n+1}}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^n x^n}{\sqrt{n}}$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$

22 $\sum_{n-1}^{\infty} 3^n x^n$

23 $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{(2x)^n}{(n+2)^2\sqrt{3^n}})$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} 1+(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{5^n\sqrt{n+1}}$

Пример 30

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение.

Положим $t=-x^2$, тогда $e^{-x^2}=e^t$. Имеем

$$e^t=1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots.$$

При $t=-x^2$ находим искомое разложение:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

Оно справедливо, очевидно, для всех значений *x*.

10.3. Разложить функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости функций

1	$f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-4x+3}$	2	$f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-5x+6}$
3	$f(x)=\dfrac{7-2x}{x^2-7x+12}$	4	$f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$
5	$f(x)=\dfrac{1}{2+3x^2}$	6	$f(x)=\dfrac{1}{3+2x}$
7	$f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$	8	$f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$
9	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$	10	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
11	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12	$f(x)=\sqrt[3]{27+x}$
13	$f(x)=\sqrt[5]{1+x}$	14	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$
15	$f(x)=\ln(6+x-x^2)$	16	$f(x)=\ln(x^2-10x+9)$
17	$f(x)=\ln(x^2-5x+4)$	18	$f(x)=\ln(x^2-3x+2)$
19	$f(x)=\ln(5+2x)$	20	$f(x)=\ln(1+5x)$
21	$f(x)=\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$	22	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
23	$f(x)=\ln\sqrt[5]{\dfrac{1+x}{1-x}}$	24	$f(x)=\ln(1+2x^2)$
25	$f(x)=\ln(1-x^2)$		

11. Поверхностные интегралы

11.1 Поверхностный интеграл I рода.

11.1.1. Основные понятия.

11.2 Поверхностный интеграл II рода.

11.2.1. Основные понятия.

11.2.2. Вычисление поверхностного интеграла II рода.

11.2.3. Формула Остроградского-Гаусса.

11.2.4. Формула Стокса.

11.2.5. Приложения поверхностного интеграла II рода.

Вопросы для самопроверки

1. Каковы условия существования поверхностного интеграла?
2. Какие физические характеристики можно вычислить с помощью поверхностного интеграла I рода?
3. В чём состоит особенность поверхностного интеграла II рода?
4. Каков геометрический смысл формулы Остроградского – Гаусса?
5. Объясните геометрический смысл формулы Стокса.

12. Векторный анализ

12.1. Скалярное поле

12.2. Векторное поле

12.3. Векторные линии поля

Вопросы для самопроверки

1. Какое поле называют скалярным?
2. Каковы основные характеристики скалярного поля?

3. Может ли скалярное поле быть пространственным?
4. Каким образом для наглядности представляют скалярное поле?
5. Может ли температурное поле быть скалярным?
6. Может ли векторное поле быть пространственным?
7. Как можно представить векторное поле: в виде линий уровня или линий равных значений перемещений?
8. Что называют векторной трубкой?
9. Как найти поверхности (линии) уровня скалярного поля?
10. Приведите примеры поверхностей и линий уровня скалярных полей.
11. Каковы основные характеристики векторных полей?

Индивидуальные задания

Пример 31

Найти уравнение поверхности уровня скалярного поля

$$\varphi = 3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y - 6z - 18,$$

проходящей через точку M(1;2;3).

<u>Решение</u>.

Совокупность поверхностей уровня поля φ определяется уравнением:

$$3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y - 6z - 18 = c.$$

Подставив в полученное уравнение координаты точки M(1;2;3), получим $c = -53$. Следовательно, уравнение поверхности уровня в точке M имеет вид

$$3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y - 6z - 18 = -53$$

или

$$3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y - 6z + 35 = 0$$

Преобразуем полученное равенство:

$$3x^2 + 12x + 12 - 12 - 2y^2 - 12y - 18 + 18 - 6z + 35 = 0,$$

$$3(x+2)^2 - 2(y+3)^2 - 6z + 41 = 0,$$

получим

$$\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{3} = \frac{6z - 41}{6}$$

или

$$\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{3} = z - \frac{41}{6}.$$

Приняв $x + 2 = X, y + 3 = Y, z - \frac{41}{6} = Z$, получим $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{3} = Z$ – уравнение поверхности уровня – гиперболического параболоида.

12.1. Найти уравнение поверхности уровня скалярного поля φ, проходящей через точку M

1	$\varphi = 2x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4z = 18;$	M(2;1;2);
2	$\varphi = x^2 - 2y^2 + 4x + 8y - 5z = 24;$	M(3;2;1);
3	$\varphi = 3x^2 - 2y^2 + 12x + 8y - 6z = 14;$	M(1;2;3);
4	$\varphi = 2x^2 - 2y^2 - 8x + 8y = 6;$	M(2;2);
5	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 8;$	M(3;3);
6	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 - 16x - 8y = 16;$	M(1;2);
7	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 12;$	M(2;1);
8	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 8;$	M(3;2);
9	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + 8x - 12y = 12;$	M(3;4);
10	$\varphi = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4z = 16;$	M(2;3;2);
11	$\varphi = 2x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4z = 18;$	M(2;3;2);

12	$\varphi = x^2 - 2y^2 + 4x + 8y - 5z = 24;$	M(3;2;2);
13	$\varphi = 3x^2 - 2y^2 + 12x + 8y - 6z = 14;$	M(3;2;3);
14	$\varphi = 2x^2 - 2y^2 - 8x + 8y = 6;$	M(3;2);
15	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 8;$	M(3;4);
16	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 - 16x - 8y = 16;$	M(3;2);
17	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 12;$	M(2;3);
18	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 8;$	M(3;1);
19	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + 8x - 12y = 12;$	M(3;2);
20	$\varphi = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4z = 16;$	M(2;4;2);
21	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 8;$	M(3;3);
22	$\varphi = 2x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4z = 18;$	M(2;3;2);
23	$\varphi = x^2 - 2y^2 + 4x + 8y - 5z = 24;$	M(3;2;1);
24	$\varphi = 2x^2 - 2y^2 - 8x + 8y = 6;$	M(2;2);
25	$\varphi = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4z = 16;$	M(2;3;2).

13. Градиент скалярного поля

13.1. Производная по направлению
13.2 Градиент скалярного поля
13.3 Свойства градиента функции

Вопросы для самопроверки

1. Какую характеристику поля определяет его градиент?
2. Как найти величину и направление градиента скалярного поля?
3. С чем связано понятие «направление наибыстрейшего спуска»?
4. Каким образом рассчитывается производная по направлению?
5. Как направлен градиент к поверхности уровня скалярного поля?
6. Равен ли градиент суммы полей сумме градиентов этих полей?
7. В чём особенность производной по направлению скалярного поля?

Индивидуальные задания

Пример 32

Найти линии векторного поля $F = -zi + xk$.

Решение.

Система дифференциальных уравнений, описывающих векторные линии, для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\frac{dx}{-z} = \frac{dz}{x} = \frac{dy}{0} \text{ или } \frac{dx}{-z} = \frac{dz}{x} \text{ и } dy = 0.$$

Дифференциальное уравнение $xdx = -xdz$ является уравнением с разделяющимся переменными, решение которого имеет вид:

$$\int xdx + \int zdz = c_1, \text{или}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} = c_1, \text{или } x^2 + z^2 = 2c_1.$$

Обозначив $2c_1 = c^2$, получим $x^2 + z^2 = c^2$. Это уравнение определяет векторные линии – концентрические окружности радиуса R=c. Равенство d*y*=0 имеет решение $y=c_2$, определяющее плоскость, параллельную координатной плоскости Oxz. Окружности (векторные линии) располагаются в плоскости $y= c_2$ (рис.3).

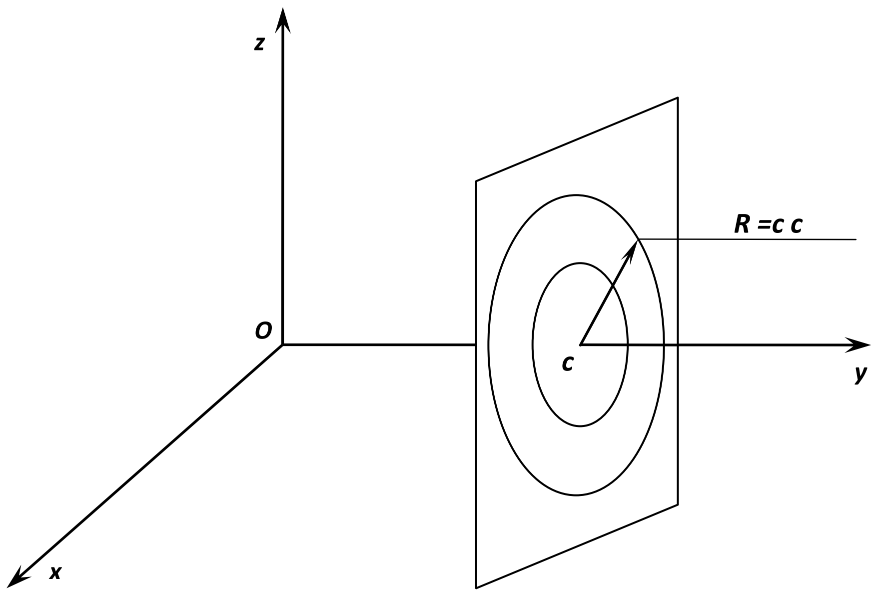


Рис.3 Векторные линии R=c в плоскости y= c_2

Пример 33

Найти производную скалярного поля $u=2x^2+2y^2-3yz$ в точке M(1;2;2) в направлении от этой точки к точки $M_1(3;4;3)$.

Решение.

Находим вектор $\overline{\mathrm{MM}_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{\mathrm{MM}_1} = (2;2;1), \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{3}$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значение в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3z; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -3y,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 8 - 6 = 2; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -6.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = 4\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{2}{3} - 6\cdot\frac{1}{2} = \frac{12}{3} - 2 = 2.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, то заданная функция в данном направлении возрастает.

13.1. Найти производную скалярного поля φ в точке M по направлению от этой точки к точке M_1

1	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 3yz;$	M(2;2;2);	M_1(2;3;3);
2	$\varphi = 2x^2 + y^2 + 4yz;$	M(1;2;1);	M_1(2;3;2);
3	$\varphi = 3x^2 - y^2 + 4yz;$	M(2;2;1);	M_1(3;3;2);
4	$\varphi = 4x^2 + y^2 - 5yz;$	M(3;2;1);	M_1(4;3;3);
5	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + 6yz;$	M(1;2;1);	M_1(3;6;2);
6	$\varphi = x^2 + 4y^2 - 2yz;$	M(1;1;1);	M_1(3;3;3);
7	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + yz;$	M(2;1;2);	M_1(4;2;4);
8	$\varphi = 3x^2 - 4y^2 + 3yz;$	M(3;2;2);	M_1(4;3;4);
9	$\varphi = 4x^2 - 3y^2 + 4yz;$	M(3;3;2);	M_1(5;4;3);
10	$\varphi = 4x^2 + 4y^2 + 4yz;$	M(2;1;3);	M_1(5;2;3);
11	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 3yz;$	M(2;2;1);	M_1(2;3;2);
12	$\varphi = 2x^2 + y^2 + 4yz;$	M(1;2;2);	M_1(2;3;1);

13	$\varphi = 3x^2 - y^2 + 4yz$;	M(2;3;1);	M_1(3;1;2);
14	$\varphi = 4x^2 + y^2 - 5yz$;	M(3;3;1);	M_1(1;3;3);
15	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + 6yz$;	M(3;2;1);	M_1(3;5;2);
16	$\varphi = x^2 + 4y^2 - 2yz$;	M(1;2;1);	M_1(3;1;3);
17	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + yz$;	M(2;3;2);	M_1(1;2;4);
18	$\varphi = 3x^2 - 4y^2 + 3yz$;	M(3;1;2);	M_1(2;3;4);
19	$\varphi = 4x^2 - 3y^2 + 4yz$;	M(3;1;2);	M_1(3;4;3);
20	$\varphi = 4x^2 + 4y^2 + 4yz$;	M(2;2;3);	M_1(3;2;3);
21	$\varphi = x^2 + 4y^2 - 2yz$;	M(1;1;1);	M_1(3;3;3);
22	$\varphi = 4x^2 + 4y^2 + 4yz$;	M(2;1;3);	M_1(5;2;3);
23	$\varphi = x^2 + 2y^2 - 3yz$;	M(2;2;2);	M_1(2;3;3);
24	$\varphi = 2x^2 + y^2 + 4yz$;	M(1;2;2);	M_1(2;3;1);
25	$\varphi = 2x^2 + 3y^2 + 6yz$;	M(1;2;1);	M_1(3;6;2).

Пример 34

Найти величину и направление градиента скалярного поля $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке M(1;-2;1).

<u>Решение</u>.

Частные производные функции φ равны:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x - 2yz, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y - 2xz, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z - 2xy,$$

их величина в точке M:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M = 6, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M = -6, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_M = 6.$$

Тогда в ортонормированном базисе получим:

$$grad\varphi(M) = 6\bar{i} - 6\bar{j} + 6\bar{k},$$

а величина градиента будет равна:

$$|grad\varphi| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

Пример 35

Найти величину и направление градиента скалярного поля $\varphi = x^2y^2 - 3xyz + xy^2z^3$,в точке M(2;1;–1).

<u>Решение</u>.

Находим частные производные функции φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy^2 - 3yz + y^2z^3, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2y - 3xz + 2xyz^3,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -3xy + 3xy^2z^2.$$

Подставляя координаты точки M, получим

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M = 6, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M = 10, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_M = 0.$$

Тогда градиент функции φ

$$gard\varphi(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k} = 6\bar{i} + 10\bar{j} + 0\bar{k} = 6\bar{i} + 10\bar{j}.$$

Величина градиента равна

$$|grad\varphi(M)| = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}.$$

13.2. Найти величину и направление градиента скалярного поля φ в точке М

1	$\varphi = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xyz;$	М(1;1;1);
2	$\varphi = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xyz;$	М(1;2;1);
3	$\varphi = 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3xyz;$	М(1;2;2);
4	$\varphi = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3xyz;$	М(2;1;1);
5	$\varphi = 2x^2 - 4y^2 + z^2 + 2xyz;$	М(2;1;1);
6	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 - z^2 + 3xyz;$	М(2;2;2);
7	$\varphi = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3xyz;$	М(2;3;2);
8	$\varphi = x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 2xyz;$	М(3;3;2);
9	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 2xyz;$	М(3;3;2);
10	$\varphi = 3x^2 - 4y^2 - 3z^2 - xyz;$	М(3;3;3);
11	$\varphi = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xyz;$	М(1;3;1);
12	$\varphi = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xyz;$	М(3;2;1);
13	$\varphi = 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3xyz;$	М(3;2;2);
14	$\varphi = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3xyz;$	М(2;2;1);
15	$\varphi = 2x^2 - 4y^2 + z^2 + 2xyz;$	М(2;3;1);
16	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 - z^2 + 3xyz;$	М(2;3;2);
17	$\varphi = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3xyz;$	М(3;3;2);
18	$\varphi = x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 2xyz;$	М(3;2;2);
19	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 2xyz;$	М(3;2;2);
20	$\varphi = 3x^2 - 4y^2 - 3z^2 - xyz;$	М(3;2;3);
21	$\varphi = 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3xyz;$	М(1;2;2);
22	$\varphi = x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 2xyz;$	М(3;3;2);
23	$\varphi = 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3xyz;$	М(3;2;2);
24	$\varphi = 4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 2xyz;$	М(3;3;2);
25	$\varphi = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xyz;$	М(1;2;1).

14. Поток векторного поля

Вопросы для самопроверки

1. Что называют потоком векторного поля?
2. Кто из ученых заложил основы исследований потока векторного поля?
3. Что определяет разность между количеством жидкости, вытекающей из объёма и втекающей в него?
4. Каким образом связаны между собой понятия дивергенции и потока векторного поля?

Индивидуальные задания

Пример 36

Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение.

Дивергенция поля равна:

$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Переходя к сферическим координатам, в которых

$x = \rho\cos\varphi\sin\theta\,,\qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\qquad z = \rho\cos\theta$ и

$3(x^2 + y^2 + z^2) = 3\rho^4$, получим

$$\Pi = \iiint\limits_V divF dxdydz = 3\iiint\limits_V \rho^2 dV =$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho =$$
$$= \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \rho^5|_0^1 = \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (-\cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{3}{5}\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{10}.$$

14.1. Найти поток векторного поля F через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

1	$F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 2;$
2	$F = 6(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 3;$
3	$F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 4;$
4	$F = 4(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 5;$
5	$F = 3(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 6;$
6	$F = 2(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 2;$
7	$F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 3;$
8	$F = 6(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 4;$
9	$F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 5;$
10	$F = 4(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 6;$
11	$F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 2;$
12	$F = 6(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 3;$
13	$F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 4;$
14	$F = 4(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 5;$
15	$F = 3(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 6;$
16	$F = 2(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 2;$
17	$F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 3;$
18	$F = 6(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 4;$
19	$F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 5;$
20	$F = 4(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 6.$
21	$F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 4;$
22	$F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 3;$
23	$F = 4(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 6;$
24	$F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 5;$
25	$F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k});$	$\rho^2 = 2.$

15. Дивергенция векторного поля

Вопросы для самопроверки

1. Какую характеристику поля называют дивергенцией?
2. Чем различаются понятия дивергенции и конвергенции?

3. Каким образом связаны между собой понятия «поток векторного поля» и «дивергенция»?

4. Изменение какой характеристики векторного поля определяет дивергенция?

5. Чем отличаются источники и стоки векторного поля?

6. Что означает положительная дивергенция векторного поля в том случае, если оно описывает движение жидкости?

7. Применимо ли понятие дивергенции к электрическим полям?

Индивидуальные задания

Пример 37

Найти дивергенцию векторного поля $F(M) = (4x^2y^2 - 2xz^4 + +3x^2y^2z)\bar{i} + (2x^3y^2 + x^2yz + 6z^2x)\bar{j} + (3x^2y^2z^2 - 4x^2z + 5yz)\bar{k}$в точке M(1;2;–1).

<u>Решение</u>.

Частные производные функции имеют вид:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (8xy^2 - 2z^4 + 6xy^2z)|_M = 6;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = (4x^3y + x^2z)|_M = 7;$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = (6x^2y^2 - 4x^2 + 5y)|_M = -18.$$

Тогда дивергенция векторного поля равна:

$$divF(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 6 + 7 - 18 = -5.$$

Так как $divF(M) < 0$, следовательно, точка М является стоком силовых линий.

15.1. Найти дивергенцию векторного поля F(M) в точке М

1 $F(M) = (2x^2y^2 - 2xz^3 + 2x^2y^2z^2)\bar{i} +$ $+(3x^3y^2 + 2x^2yz + 4xz^2)\bar{j} +$ $+(2x^2y^2z^2 - 2x^2z + 5yz)\bar{k};$ М(1;2;1);

2 $F(M) = (3x^2y^2 - xz^3 + 3x^2y^2z^2)\bar{i} +$ $+(2x^3y^2 + 3x^2yz + 2xz^2)\bar{j} +$ $+(3x^2y^2z^2 - 3x^2z - 3yz)\bar{k};$ М(2;2;1);

3 $F(M) = (x^3y^3 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2)\bar{i} +$ $+(2x^2y^2 + x^2y^2z^2 + 2x^2z)\bar{j} +$ $+(2x^3y^3z^3 + 2x^2z + 2yz)\bar{k};$ М(2;2;2);

4 $F(M) = (3x^2y^3 + 2x^3z^2 - 2y^2z^2)\bar{i} +$ $+(3x^2y^3 + 3x^2z^2 - 3yz^2)\bar{j} +$ $+(x^4y^3z^3 + x^2z^2 + y^2z^2)\bar{k};$ М(1;2;1);

5 $F(M) = (4xy^4 + 3x^2z^3 + 3x^2z^2)\bar{i} +$ $+(3x^2y^2 + y^3z^2 + 2x^2z)\bar{j} +$ $+(x^2y^3z^3 - x^2z^3 + y^3z^2)\bar{k};$ М(1;1;2);

6 $F(M) = (5x^2y^2 + 4x^2z^2 + 4x^3z^2)\bar{i} +$ $+(4xy^3 - y^3z^2 + 3x^2z^2)\bar{j} +$ $+(xy^3z^2 + x^3z + y^2z)\bar{k};$ М(2;2;1);

7 $F(M) = (2x^3y^3 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2)\bar{i} +$ М(2;2;2);

$+(4x^3y-2y^2z^3+4x^2z^2)\bar{j}+$
$+(x^2yz^2-x^2z^3-y^3z^2)\bar{k};$

8 $F(M)=(3x^3y^3-3x^3y^3+3y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;1;1);
$+(2x^3y^3+4y^2z^2+3x^3z^3)\bar{j}+$
$+(x^2y^2z+x^2z^3+y^3z^2)\bar{k};$

9 $F(M)=(2xy^3+2x^3z+2yz^3)\bar{i}+$ M(2;2;1);
$+(3x^4y^4+2yz^3+3x^3z)\bar{j}+$
$+(xyz+x^3y^3+y^3y^3)\bar{k};$

10 $F(M)=(4x^2y+3xz^2-2yz^2)\bar{i}+$ M(1;1;2).
$+(2x^3y+3y^2z^3+2x^2z^3)\bar{j}+$
$+(x^3y^2z-x^3y^3-y^3z^3)\bar{k};$

11 $F(M)=(2x^2y^2-2xz^3+2x^2y^2z^2)\bar{i}+$ M(1;2;2);
$+(3x^3y^2+2x^2yz+4xz^2)\bar{j}+$
$+(2x^2y^2z^2-2x^2z+5yz)\bar{k};$

12 $F(M)=(3x^2y^2-xz^3+3x^2y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;2;2);
$+(2x^3y^2+3x^2yz+2xz^2)\bar{j}+$
$+(3x^2y^2z^2-3x^2z-3yz)\bar{k};$

13 $F(M)=(x^3y^3-2x^2z^2+2y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;2;1);
$+(2x^2y^2+x^2y^2z^2+2x^2z)\bar{j}+$
$+(2x^3y^3z^3+2x^2z+2yz)\bar{k};$

14 $F(M)=(3x^2y^3+2x^3z^2-2y^2z^2)\bar{i}+$ M(1;2;2);
$+(3x^2y^3+3x^2z^2-3yz^2)\bar{j}+$
$+(x^4y^3z^3+x^2z^2+y^2z^2)\bar{k};$

15 $F(M)=(4xy^4+3x^2z^3+3x^2z^2)\bar{i}+$ M(1;2;2);
$+(3x^2y^2+y^3z^2+2x^2z)\bar{j}+$
$+(x^2y^3z^3-x^2z^3+y^3z^2)\bar{k};$

16 $F(M)=(5x^2y^2+4x^2z^2+4x^3z^2)\bar{i}+$ M(2;2;2);
$+(4xy^3-y^3z^2+3x^2z^2)\bar{j}+$
$+(xy^3z^2+x^3z+y^2z)\bar{k};$

17 $F(M)=(2x^3y^3-2x^2z^2+2y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;1;2);
$+(4x^3y-2y^2z^3+4x^2z^2)\bar{j}+$
$+(x^2yz^2-x^2z^3-y^3z^2)\bar{k};$

18 $F(M)=(3x^3y^3-3x^3y^3+3y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;2;1);
$+(2x^3y^3+4y^2z^2+3x^3z^3)\bar{j}+$
$+(x^2y^2z+x^2z^3+y^3z^2)\bar{k};$

19 $F(M)=(2xy^3+2x^3z+2yz^3)\bar{i}+$ M(1;2;1);
$+(3x^4y^4+2yz^3+3x^3z)\bar{j}+$
$+(xyz+x^3y^3+y^3y^3)\bar{k};$

20 $F(M)=(4x^2y+3xz^2-2yz^2)\bar{i}+$ M(2;1;2);
$+(2x^3y+3y^2z^3+2x^2z^3)\bar{j}+$
$+(x^3y^2z-x^3y^3-y^3z^3)\bar{k};$

21 $F(M)=(3x^2y^3+2x^3z^2-2y^2z^2)\bar{i}+$ M(1;2;2);
$+(3x^2y^3+3x^2z^2-3yz^2)\bar{j}+$
$+(x^4y^3z^3+x^2z^2+y^2z^2)\bar{k};$

22 $F(M)=(5x^2y^2+4x^2z^2+4x^3z^2)\bar{i}+$ M(2;2;2);

$+(4xy^3 - y^3z^2 + 3x^2z^2)\bar{j} +$
$+(xy^3z^2 + x^3z + y^2z)\bar{k};$

23 $F(M) = (2x^3y^3 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2)\bar{i} +$ M(2;2;2);
$+(4x^3y - 2y^2z^3 + 4x^2z^2)\bar{j} +$
$+(x^2yz^2 - x^2z^3 - y^3z^2)\bar{k};$

24 $F(M) = (3x^2y^2 - xz^3 + 3x^2y^2z^2)\bar{i} +$ M(2;2;1);
$+(2x^3y^2 + 3x^2yz + 2xz^2)\bar{j} +$
$+(3x^2y^2z^2 - 3x^2z - 3yz)\bar{k};$

25 $F(M) = (2xy^3 + 2x^3z + 2yz^3)\bar{i} +$ M(1;2;1).
$+(3x^4y^4 + 2yz^3 + 3x^3z)\bar{j} +$
$+(xyz + x^3y^3 + y^3y^3)\bar{k};$

16. Циркуляция векторного поля

Вопросы для самопроверки

1. Какой зависимостью определяется циркуляция векторного поля вдоль заданной кривой?

2. Кто из перечисленных ученых заложил основы исследования циркуляции поля: М.В.Остроградский, К.Гаусс, Дж.Стокс?

3. Кто из ученых использовал формулы векторного анализа для описания электромагнитных полей?

4. Каким образом связаны между собой поток ротора скорости жидкости через заданную поверхность и циркуляция скорости вдоль границы поверхности?

Индивидуальные задания

Пример 38

Вычислить циркуляцию вектора поля $\bar{F}(M) = 2yz\bar{i} + 3xz\bar{j} + 4xy\bar{k}$ вдоль кривой L, описываемой уравнениями $x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

Решение.

Формула, выражающая циркуляцию векторного поля в декартовой системе координат, имеет вид:

$$\int_L F_t \cdot dl = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Находим составляющие:

$$x = t, \quad dx = dt, \quad P = 2t^5, \quad Pdx = 2t^5dt;$$
$$y = t^2, \quad dy = 2tdt, \quad Q = 3t^4, \quad Qdy = 6t^5dt;$$
$$z = t^3, \quad dz = 3t^2dt \quad R = 4t^3, \quad Rdz = 12t^5dt.$$

Тогда

$$\int_L F_t dl = \int_0^1 (2t^5 + 6t^5 + 12t^5)dt = \int_0^1 20t^5dt = \frac{20}{6}t^6\Big|_0^1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

16.1. Вычислить циркуляцию векторного поля F(M) вдоль кривой L, описываемой уравнениями $x = f(t)$**,** $y = f(t)$**,** $z = f(t)$

1	$F(M) = 3yz\bar{i} + 4xz\bar{j} + 5xy\bar{k};$	$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3\ (0 \le t \le 0{,}5);$
2	$F(M) = 3xy\bar{i} + 4yz\bar{j} + 5xz\bar{k};$	$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3\ (0 \le t \le 1);$
3	$F(M) = 2xz\bar{i} + 3xy\bar{j} + 4yz\bar{k};$	$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3\ (0 \le t \le 1{,}5);$
4	$F(M) = 3yz\bar{i} - 4xz\bar{j} + 5xy\bar{k};$	$x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^4\ (0 \le t \le 1);$

5	$F(M) = 3xy\bar{i} - 4yz\bar{j} + 5xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 0.5)$;
6	$F(M) = 4yz\bar{i} + 3xy\bar{j} - 5xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1)$;
7	$F(M) = 2yz\bar{i} + 3xy\bar{j} - 4xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1{,}5)$;
8	$F(M) = 4xz\bar{i} - 2yz\bar{j} + 3xy\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^4$ $(0 \le t \le 2)$;
9	$F(M) = 3yz\bar{i} - 4xz\bar{j} - 3xy\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^4$ $(0 \le t \le 3)$;
10	$F(M) = 4xy\bar{i} - 4yz\bar{j} + 4xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 4)$.
11	$F(M) = 3yz\bar{i} + 4xz\bar{j} + 5xy\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 0{,}5)$;
12	$F(M) = 3xy\bar{i} + 4yz\bar{j} + 5xz\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$;
13	$F(M) = 2xz\bar{i} + 3xy\bar{j} + 4yz\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1{,}5)$;
14	$F(M) = 3yz\bar{i} - 4xz\bar{j} + 5xy\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1)$;
15	$F(M) = 3xy\bar{i} - 4yz\bar{j} + 5xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 0.5)$;
16	$F(M) = 4yz\bar{i} + 3xy\bar{j} - 5xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1)$;
17	$F(M) = 2yz\bar{i} + 3xy\bar{j} - 4xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1{,}5)$;
18	$F(M) = 4xz\bar{i} - 2yz\bar{j} + 3xy\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^4$ $(0 \le t \le 2)$;
19	$F(M) = 3yz\bar{i} - 4xz\bar{j} - 3xy\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^4$ $(0 \le t \le 3)$;
20	$F(M) = 4xy\bar{i} - 4yz\bar{j} + 4xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 4)$.
21	$F(M) = 3yz\bar{i} - 4xz\bar{j} + 5xy\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1)$;
22	$F(M) = 2yz\bar{i} + 3xy\bar{j} - 4xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1{,}5)$;
23	$F(M) = 4xz\bar{i} - 2yz\bar{j} + 3xy\bar{k}$;	$x = t, y = t^2, z = t^4$ $(0 \le t \le 2)$;
24	$F(M) = 3xy\bar{i} - 4yz\bar{j} + 5xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 0.5)$;
25	$F(M) = 4yz\bar{i} + 3xy\bar{j} - 5xz\bar{k}$;	$x = t^2, y = t^3, z = t^4$ $(0 \le t \le 1)$.

17. Ротор векторного поля

Вопросы для самопроверки

1. Кто предложил термин «ротор»?
2. Является ли ротор мерой «вращения» векторного поля?
3. Равен ли ротор суммы полей сумме роторов этих полей?
4. Связана ли циркуляция вектора вдоль замкнутого контура с потоком вектора через поверхность, ограниченную этим контуром?

Индивидуальные задания

Пример 39

Найти ротор векторного поля $F = y^2z^3\bar{i} + x^2z^3\bar{j} + x^2y^3\bar{k}$ в точке M(2;3;1).

Решение.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2yz^3; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 3y^2z^2;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^3; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 3x^2z^2;$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2xy^3; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 3x^2y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Тогда получим:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=3x^2y^2-3x^2z^2=3x^2(y^2-z^2);$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)=3y^2z^2-2xy^3=y^2(3z^2-2xy);$$
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=2xz^3-2yz^3=2z^3(x-y).$$

Следовательно,

$$rot\overline{F}=3x^2(y^2-z^2)\overline{i}+y^2(3z^2-2xy)\overline{j}+2z^3(x-y)\overline{k}$$

или в точке М $rot\overline{F}(M)=96\overline{i}-81\overline{j}-2\overline{k}.$

17.1. Найти ротор векторного поля F в точке М

1	$F=y^2z^2\overline{i}+x^2z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(2;1;1);
2	$F=y^3z^3\overline{i}+x^3z^3\overline{j}+x^4y^4\overline{k};$	M(2;2;1);
3	$F=x^3z^2\overline{i}+y^3z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(2;2;2);
4	$F=x^2z^3\overline{i}+y^3z^2\overline{j}+x^2y^2\overline{k};$	M(3;2;2);
5	$F=x^2z^3\overline{i}-y^3z^2\overline{j}-x^2y^2\overline{k};$	M(3;3;2);
6	$F=y^2z^3\overline{i}-x^2z^3\overline{j}+x^2y^2\overline{k};$	M(3;3;3);
7	$F=2x^3z^2\overline{i}+3y^2z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(4;3;3);
8	$F=3y^3z^2\overline{i}+2x^3z^2\overline{j}+4x^3y^2\overline{k};$	M(4;4;3);
9	$F=2x^3z^2\overline{i}-3y^2z^3\overline{j}+2x^3y^3\overline{k};$	M(4;4;4);
10	$F=x^4z\overline{i}+3y^3z\overline{j}+2x^4y^2\overline{k};$	M(5;4;4);
11	$F=y^2z^2\overline{i}+x^2z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(2;2;1);
12	$F=y^3z^3\overline{i}+x^3z^3\overline{j}+x^4y^4\overline{k};$	M(2;1;1);
13	$F=x^3z^2\overline{i}+y^3z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(2;1;2);
14	$F=x^2z^3\overline{i}+y^3z^2\overline{j}+x^2y^2\overline{k};$	M(2;2;2);
15	$F=x^2z^3\overline{i}-y^3z^2\overline{j}-x^2y^2\overline{k};$	M(3;2;2);
16	$F=y^2z^3\overline{i}-x^2z^3\overline{j}+x^2y^2\overline{k};$	M(2;3;3);
17	$F=2x^3z^2\overline{i}+3y^2z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(4;3;3);
18	$F=3y^3z^2\overline{i}+2x^3z^2\overline{j}+4x^3y^2\overline{k};$	M(3;4;3);
19	$F=2x^3z^2\overline{i}-3y^2z^3\overline{j}+2x^3y^3\overline{k};$	M(3;4;4);
20	$F=x^4z\overline{i}+3y^3z\overline{j}+2x^4y^2\overline{k};$	M(2;4;4);
21	$F=y^2z^3\overline{i}-x^2z^3\overline{j}+x^2y^2\overline{k};$	M(3;3;3);
22	$F=y^3z^3\overline{i}+x^3z^3\overline{j}+x^4y^4\overline{k};$	M(2;2;1);
23	$F=x^2z^3\overline{i}+y^3z^2\overline{j}+x^2y^2\overline{k};$	M(2;2;2);
24	$F=2x^3z^2\overline{i}+3y^2z^2\overline{j}+x^3y^3\overline{k};$	M(4;3;3);
25	$F=2x^3z^2\overline{i}-3y^2z^3\overline{j}+2x^3y^3\overline{k};$	M(4;4;4).

18. Виды векторных полей

18.1. Соленоидальное поле
18.2. Потенциальное поле
18.3. Гармоническое поле

Вопросы для самопроверки

1. В чём особенность соленоидального поля?
2. Чем отличается соленоидальное поле от потенциального?
3. Каким является поле силовых линий электрического диполя?
4. Чему равны ротор и дивергенция гармонического поля?

Индивидуальные задания

Пример 40

Установить, соленоидально ли поле

$$\overline{F}(M) = (2x^2y + 5xz^3 - 3x^3yz)\overline{i} + (4xy^3 - 12xyz + 8z^3)\overline{j} + (6xy^2z^3 - 7xz^2 - 4yz)\overline{k}$$

в точке M(1;1;1).

Решение.

Вычислим $\frac{\partial P}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ в точке M(1;1;1):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 4xy + 5z^3 - 9x^2yz|_M = 4 + 5 - 9 = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 12xy^2 - 12xz|_M = 12 - 12 = 0;$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 18xy^2z^2 - 14xz - 4y|_M = 18 - 14 - 4 = 0.$$

Подставляя полученные значения в формулу

$$divF(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

Получим:

$$divF(M) = 0 + 0 + 0.$$

Дивергенция векторного поля $divF(M) = 0$, следовательно, поле $\overline{F}(M)$ является соленоидальным.

Пример 41

Найти потенциал поля, если он существует:

$$\overline{F} = (6x^2y + 9x^2z)\overline{i} + (2x^3 - 2z^3)\overline{j} + (3x^3 - 6yz^2)\overline{k},$$

Решение.

Исследуем потенциальность поля:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -6z^2 + 6z^2 = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 9x^2 - 9x^2 = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2 - 6x^2 = 0.$$

Следовательно,

$$rot\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} = 0,$$

то есть векторное поле $\overline{F}$ потенциально.

Находим потенциал поля ψ. Так как $\frac{\partial \psi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} = R$, то получим:

$$\psi(x; y; z) = \int (6x^2y + 9x^2z)dx + \varphi(y; z) = 2x^3y + 3x^3z + \varphi(y; z);$$

$$\psi(x; y; z) = \int (2x^3 - 2z^3)dx + \psi(y; z) = 2x^3y - 2yz^3 + \psi(y; z);$$

$$\psi(x; y; z) = \int (3x^3 - 6yz^2)dx + f(y; z) = 3x^3z - 2yz^3 + f(y; z),$$

тогда

$$\psi(x; y; z) = 2x^3y + 3x^3z + 2x^3y - 2yz^3 + 3x^3z - 2yz^3 + c.$$

Следовательно, потенциал векторного поля $\overline{F}$ равен

$$\psi(x;y;z) = 4x^3y + 6x^2z - 4yz^3 + c.$$

18.1. Найти потенциал поля, если он существует

1 $F(M) = (5x^2y^2 + 4x^2z^2 + 4x^3z^2)\overline{i} + (4xy^3 - y^3z^2 + 3x^2z^2)\overline{j} + (xy^3z^2 + x^3z + y^2z)\overline{k};$ M(2;2;1);

2 $F(M) = (2x^3y^3 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2)\overline{i} + (4x^3y - 2y^2z^3 + 4x^2z^2)\overline{j} + (x^2yz^2 - x^2z^3 - y^3z^2)\overline{k};$ M(2;2;2);

3 $F(M) = (3x^3y^3 - 3x^3y^3 + 3y^2z^2)\overline{i} + (2x^3y^3 + 4y^2z^2 + 3x^3z^3)\overline{j} + (x^2y^2z + x^2z^3 + y^3z^2)\overline{k};$ M(2;1;1);

4 $F(M) = (2xy^3 + 2x^3z + 2yz^3)\overline{i} + (3x^4y^4 + 2yz^3 + 3x^3z)\overline{j} + (xyz + x^3y^3 + y^3y^3)\overline{k};$ M(2;2;1);

5 $F(M) = (4x^2y + 3xz^2 - 2yz^2)\overline{i} + (2x^3y + 3y^2z^3 + 2x^2z^3)\overline{j} + (x^3y^2z - x^3y^3 - y^3z^3)\overline{k};$ M(1;1;2).

6 $F(M) = (2x^2y^2 - 2xz^3 + 2x^2y^2z^2)\overline{i} + (3x^3y^2 + 2x^2yz + 4xz^2)\overline{j} + (2x^2y^2z^2 - 2x^2z + 5yz)\overline{k};$ M(1;2;1);

7 $F(M) = (3x^2y^2 - xz^3 + 3x^2y^2z^2)\overline{i} + (2x^3y^2 + 3x^2yz + 2xz^2)\overline{j} + (3x^2y^2z^2 - 3x^2z - 3yz)\overline{k};$ M(2;2;1);

8 $F(M) = (x^3y^3 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2)\overline{i} + (2x^2y^2 + x^2y^2z^2 + 2x^2z)\overline{j} + (2x^3y^3z^3 + 2x^2z + 2yz)\overline{k};$ M(2;2;2);

9 $F(M) = (3x^2y^3 + 2x^3z^2 - 2y^2z^2)\overline{i} + (3x^2y^3 + 3x^2z^2 - 3yz^2)\overline{j} + (x^4y^3z^3 + x^2z^2 + y^2z^2)\overline{k};$ M(1;2;1);

10 $F(M) = (4xy^4 + 3x^2z^3 + 3x^2z^2)\overline{i} + (3x^2y^2 + y^3z^2 + 2x^2z)\overline{j} + (x^2y^3z^3 - x^2z^3 + y^3z^2)\overline{k};$ M(1;1;2);

11 $F(M) = (5x^2y^2 + 4x^2z^2 + 4x^3z^2)\overline{i} + (4xy^3 - y^3z^2 + 3x^2z^2)\overline{j} + (xy^3z^2 + x^3z + y^2z)\overline{k};$ M(2;2;2);

12 $F(M) = (2x^3y^3 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2)\overline{i} + (4x^3y - 2y^2z^3 + 4x^2z^2)\overline{j} + (x^2yz^2 - x^2z^3 - y^3z^2)\overline{k};$ M(2;2;1);

13 $F(M) = (3x^3y^3 - 3x^3y^3 + 3y^2z^2)\overline{i} + (2x^3y^3 + 4y^2z^2 + 3x^3z^3)\overline{j} + (x^2y^2z + x^2z^3 + y^3z^2)\overline{k};$ M(2;2;1);

14 $F(M) = (2xy^3 + 2x^3z + 2yz^3)\overline{i} +$ M(2;1;1);

	$+(3x^4y^4+2yz^3+3x^3z)\bar{j}+$ $+(xyz+x^3y^3+y^3y^3)\bar{k};$	
15	$F(M)=(4x^2y+3xz^2-2yz^2)\bar{i}+$ $+(2x^3y+3y^2z^3+2x^2z^3)\bar{j}+$ $+(x^3y^2z-x^3y^3-y^3z^3)\bar{k};$	M(1;2;2).
16	$F(M)=(2x^2y^2-2xz^3+2x^2y^2z^2)\bar{i}+$ $+(3x^3y^2+2x^2yz+4xz^2)\bar{j}+$ $+(2x^2y^2z^2-2x^2z+5yz)\bar{k};$	M(2;2;1);
17	$F(M)=(3x^2y^2-xz^3+3x^2y^2z^2)\bar{i}+$ $+(2x^3y^2+3x^2yz+2xz^2)\bar{j}+$ $+(3x^2y^2z^2-3x^2z-3yz)\bar{k};$	M(1;2;1);
18	$F(M)=(x^3y^3-2x^2z^2+2y^2z^2)\bar{i}+$ $+(2x^2y^2+x^2y^2z^2+2x^2z)\bar{j}+$ $+(2x^3y^3z^3+2x^2z+2yz)\bar{k};$	M(2;1;2);
19	$F(M)=(3x^2y^3+2x^3z^2-2y^2z^2)\bar{i}+$ $+(3x^2y^3+3x^2z^2-3yz^2)\bar{j}+$ $+(x^4y^3z^3+x^2z^2+y^2z^2)\bar{k};$	M(2;2;1);
20	$F(M)=(4xy^4+3x^2z^3+3x^2z^2)\bar{i}+$ $+(3x^2y^2+y^3z^2+2x^2z)\bar{j}+$ $+(x^2y^3z^3-x^2z^3+y^3z^2)\bar{k};$	M(1;2;2);

Дифференциальные уравнения первого порядка
Индивидуальные задания

1. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

1	$2y'\sqrt{x}=y$	$y_0=1$ при $x_0=4$
2	$y'=(2y+1)ctgx$	$y_0=0{,}5$ при $x_0=\pi/4$
3	$x^2y'+y^2=0$	$y_0=1$ при $x_0=-1$
4	$(1+e^x)yy'=e^x$	$y_0=1$ при $x_0=0$
5	$y'=2\sqrt{y}\ln x$	$y_0=1$ при $x_0=e$
6	$xy'=\dfrac{y}{\ln x}$	$y_0=1$ при $x_0=e$
7	$y'tgx-y=1$	$y_0=1$ при $x_0=\pi/2$
8	$2\sqrt{y}dx=dy$	$y_0=1$ при $x_0=0$
9	$y'\sin x=y\ln y$	$y_0=1$ при $x_0=\pi/2$
10	$(2x+1)dy+y^2dx=0$	$y_0=1$ при $x_0=4$

В примерах 11 – 25 найти общее решение:

11	$xy'-y=0$	12	$xy'+y=0$
13	$yy'+x=0$	14	$x^2y'+y=0$
15	$x+xy+y'(y+xy)=0$	16	$(1+y^2)dx=(1+x^2)dy$
17	$y-xy'=1+x^2y'$	18	$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$
19	$y'=y/x$	20	$y'=y$
21	$y'x-y=0$	22	$y'-y=0$

23	$y' = 3x^2$	24	$yy' = x$
25	$3y - xy' = 0$		

Пример. Найти общее и частное решение уравнения $y'' = 2$ при начальных условиях $y_0 = 1$, $y_0' = 1$, при $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е. Общее решение данного уравнения найдем двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя, находим сначала первую производную $y' = 2x + C_1$, а затем общее решение: $y = x^2 + C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Подставляя значения начальных условий в выражения для общего решения $y = x^2 + C_1 x + C_2$ и его производной $y' = 2x + C_1$, для определения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 1 + C_1 + C_2, \\ 1 = 2 + C_1, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = -1$ и $C_2 = 1$. Следовательно, искомым частным решением данного уравнения является функция $y = x^2 - x + 1$, график которой – парабола, проходящая через точку (1;1).

2. Линейные уравнения.

В примерах 1 –15 найти общее решение уравнений.

1	$y' - y = e^x$	2	$y' = x + y$
3	$y' + x^2 y = x^2$	4	$xy' + y = 3$
5	$xy' + y = e^x$	6	$y' - \frac{3y}{x} = x$
7	$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$	8	$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$
9	$y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$	10	$xy' + y = \ln x + 1$
11	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$	12	$y' - ytgx = ctgx$
13	$y' + y \cos x = \sin 2x$	14	$xy' + 2y = x^2$
15	$y' - \frac{2}{x} y = \frac{e^x (x-2)}{x}$		

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$

Р е ш е н и е. Данное уравнение является линейным. Здесь $p(x) = 3; f(x) = e^{2x}$.

Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y' + 3y = 0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -3dx$ и интегрируя, находим

$\ln|y| = -3x + \ln|C_1|$ или $y = \pm C_1 e^{-3x} = Ce^{-3x}$.

Общее решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x) e^{-3x}$, произвольную постоянную будем считать функцией от x. Здесь применен *метод вариации постоянной.*

Дифференцируя, имеем $y' = C'(x) e^{-3x} - 3C(x) e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для *y* и y' , получаем

$C'(x)e^{3x} = e^{2x}, C'(x) = e^{5x}$ или $dC = e^{5x}dx,$

откуда $C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2$, где C_2 - произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C(x)e^{-3x} = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_2\right)e^{-3x} \text{ или } y = \frac{1}{5}e^{2x} + C_2e^{-3x}.$$

Найдем теперь общее решение данного уравнения *методом подстановки*. Положим *y=uv.* Тогда будем иметь $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим

$u'v + uv' + 3uv = e^{2x}$ или $u'v + u(v' + 3v) = e^{2x}$. (*)

Теперь потребуем, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы $v' + 3v = 0$, откуда $\frac{dv}{3v} = -dx; \frac{1}{3}\ln v = -x; \sqrt[3]{v} = e^{-x}; v = e^{-3x}$.

Подставляя найденное значение *v* в (*), найдем $u'e^{-3x} = e^{2x}$;

$du = e^{5x}dx; u = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$

Но *y=uv*,поэтому $y = e^{-3x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)$ или $y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$.

В примерах 16-24 решить уравнения Бернулли.

16	$y'x + y = -xy^2$	17	$y' - xy = -y^3e^{-x^2}$
18	$y' + y = xy^3$	19	$y' = x^3y^3 - xy$
20	$x^2 + y' = y^2 + xy$	21	$xy' + y = y^2\ln x$
22	$y' + xy = xy^3$	23	$xy' + 2y = x^5y^2$
24	$y' - 2xy = 3x^3y^2$		

Пример. Решить уравнение $y' - 2xy = 3x^3y^2$.

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли (левая часть у него такая же, как и у линейного, а в правой части стоит выражение $f(x)y^n$, где n –постоянное число; в данном примере $3x^3y^2$).

Разделим обе части данного уравнения на y^2:

$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3$. (**)

Положим $z = y^{-1}$, тогда $-y^{-2}y' = z'$.Умножая обе части уравнения (**) на (-1) и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение

$z' + 2xz = -2x^3$.

Решая это уравнение, находим

$z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2$.

Следовательно, общим решением данного уравнения будет

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}.$$

3. Дифференциальные уравнения второго порядка.

1	$y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$	2	$y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$
3	$y'' + y = x + 2e^x$	4	$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$
5	$y'' - 3y - 10y = \sin x + 3\cos x$	6	$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$

7	$y'' + y = x\cos x$	8	$y'' + 4y' = \sin 2x$
9	$y'' + 4y = 3\sin 2x$	10	$y'' + y' + 2{,}5y = 25\cos 2x$
11	$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$	12	$y'' - 4y = 8x^3$
13	$y'' - 2y = xe^{\ x}$	14	$y'' + 3y' = 9x$
15	$y'' + y' - 2y = 6x^2$	16	$y'' - 3y + 2y = e^x$
17	$y'' + 2y' + y = e^x$	18	$y'' - 2y' + y = \sin x + e^{\ x}$
19	$y'' - y = 3e^{2x}$	20	$y'' + y = \sin 2x$
21	$y'' + y = \sin x$	22	$y'' - 4y' + 3y = xe^x$
23	$y'' - 5y' + 4y = 0$	24	$y'' - 6y' + 9y = 0$
25	$y'' + 8y' + 25y = 0$		

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$. Так как среди корней только один равен единице $k_1 = 1$, то частное решение этого уравнения ищем в виде

$\tilde{y} = (Ax + B)xe^x = (Ax^2 + Bx)e^x$

Дифференцируя дважды $\tilde{y}$ и подставляя результаты в заданное уравнение, получаем

$-Ax + 2A - 2B = x$,

откуда находим $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Подставляя *A* и *B* в выражение для $\tilde{y}$, получаем частное решение данного уравнения:

$\tilde{y} = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

Общее решение имеет вид $y = \tilde{y} + \bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

Правая часть имеет вид $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где a, b и β - известные числа. Тогда частное решение $\tilde{y}$ ищем в виде $\tilde{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^r$, где *A* и *B* – неизвестные коэффициенты, а *r* – число корней характеристического уравнения.

10.2 Методические рекомендации по выполнению тестовых заданий

Тестовая система предусматривает вопросы (задания), на которые студент должен дать один вариант правильного ответа из предложенного списка ответов. При поиске ответа необходимо проявлять внимательность. Прежде всего, следует иметь в виду, что в предлагаемом задании всегда будет один правильный и остальные неправильные ответы. Всех правильных или всех неправильных ответов быть не может. Также тест содержит задания на установление соответствия.

Тестовые задания сгруппированы по темам учебной дисциплины.

Количество тестовых вопросов/заданий по каждой теме дисциплины определено так, чтобы быть достаточным для оценки знаний обучающегося по всему пройденному материалу.

ТЕСТЫ

ТЕСТ 1 Математический анализ

1.1. Если функция непрерывна в каждой точке промежутка, то эту функцию называют:

1. непрерывной в точке x_o справа;
2. непрерывной в точке x_o слева;
3. непрерывной на промежутке;
4. разрывом второго рода.

1.2. Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется:

1. точкой надрыва;
2. точкой разрыва;
3. точка перегиба;
4. точка перелома.

1.3. Строго монотонными функциями называются:
1. убывающие и возрастающие;
2. убывающие и неубывающие;
3. возрастающие и невозрастающие;
4. убывающие, возрастающие, неубывающие и невозрастающие.

1.4. Из перечисленных функций: а) $y = 7^x + 2$; б) $y = tg^3\frac{x}{2}$; в) $y = 3x^5$; г) $y = 2^{x-2}$; д) $y = x^{-1}$ показательными являются:

1. а и г; 2. б и в; 3. в и г; 4. а и д.

1.5. Для функции $y = 5\sqrt{x}$ обратной является функция:

1. $x = 25y^2$; 2. $x = 5y^2$; 3. $x = 5\sqrt{y}$; 4. $y = \frac{x^2}{25}$.

1.6. Из перечисленных функций: а) $y = x^5 \sin x$; б) $y = 2tg\frac{x}{2}$;

с) $y = x^3 - 3x$; д) $y = \frac{x^3}{(x^5 + 2)}$; е) $y = x^{-2}\cos x$ нечетными являются:

1. а, д; 2. д, е; 3. б, с; 4. б, д, е.

1.7. Для функции $y = 3x - 1$ обратной является функция:

1. $x = \frac{y+1}{3}$;   2. $x = 3y + 1$;   3. $x = y + \frac{1}{3}$;   4 . $x = 3(y+1)$.

1.8. Значение функции $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ равно:

1. 0;   2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;   3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$;   4. $\sqrt{3}$.

1.9. Из перечисленных функций: 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = \lg x$; 3) $y = \frac{7}{x}$; 4) $y = -x^2$; 5) $y = 3$ возрастают на промежутке $(;3]$:

1. 2; 4;   2. 1; 2;   3. 4; 5;   4. 1; 3.

1.10. Даны функции $\sin x, \cos x, x^2, x^3$. Из них четными являются:

1. 4;   2. 1;   3. 2;3;   4. 1; 4.

1.11. Интервалами монотонности функции $y = |x|$ будут:

1. $(-\infty;0)$ – убывает, $(0;+\infty)$ – возрастает;   2. один интервал $(-\infty;0)$;

3. $(-\infty;\infty)$ – возрастает;   4. $(0;+\infty)$ – возрастает.

1.12. Какая из перечисленных функций является нечетной:

1. $y = -3x^4$;   2. $y = 3/x$;   3. $y = 3x^2 + 7$;   4. $y = 3^x + 3^{-x}$.

1.13. Функция, обратная данной $y = 2x + 3, x \in \ -1,5;1\ $, имеет вид $y = 0,5x - 1,5$ с областью определения:

1. $x \in \ -1,5;1,5\ $;   2. $x \in \ 0;1,5\ $;   3. $x \in \ -1,5;3\ $;   4. $x \in \ 0;5\ $.

1.14. Установите соответствие между периодической функцией и значением ее периода: 1. $y = \cos \pi x$; 2. $y = tg\frac{3\pi x}{2}$; 3. $y = \sin\frac{\pi x}{2}$.

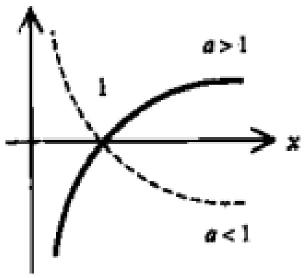
1. 4;   2. 2/3;   3. 2;   4. π.

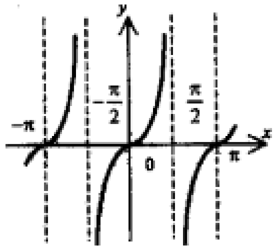
1.15. Установите соответствие между функцией и ее областью определения.

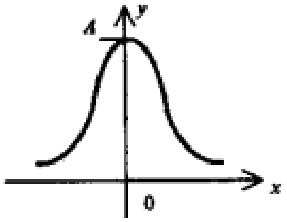
Функция	Область определения
1. $y = \frac{x}{x-2}$	А. $D(y) = [-1;1]$
2. $y = \frac{x^2 - 3}{e^x}$	Б. $D(y) = (0;+\infty)$
3. $y = \arcsin(x)$	В. $D(y) = (-\infty;+\infty)$
4. $y = \ln(x)$	Г. $D(y) = (1;+\infty)$
	Д. $D(y) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$

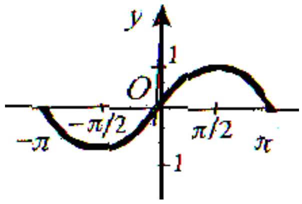
1.16. Установите соответствие между функцией и ее графиком:

1) $y = tg\,x$; 2) $y = Ae^{ax^2}$; 3) $y = \sin x$; 4) $y = \log_a x\ (a > 0)$.

A) 

B) 

C) 

D) 

1.17. Кто ввел дельта-функцию?

1.Дирак; 2. Фурье; 3. Соболев; 4. Лейбниц.

1.18. Область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x-1}$ имеет вид:

1. $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;2)$; 2. $x \in (-\infty;1) \cup (1;2)$; 3. $x \in (2;+\infty)$; 4. $x \in (-1;+\infty)$.

1.19. Область определения функции $y = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$ имеет вид:

1. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; 2. $x \neq 2\pi n, n \in Z$; 3. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; 4. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

1.20. Пусть $f(x) = tgx$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ четна, если функция $g(x)$ задается формулами (указать несколько вариантов):

1. $g(x) = 3^x$; 2. $g(x) = x + 3$; 3. $g(x) = 6x^2$; 4. $g(x) = \dfrac{3}{x^4 + 2}$.

1.21. Установите соответствие между периодической функцией и значением ее периода: а) $y = \cos 2\pi x$; б) $y = ctg\dfrac{2\pi x}{3}$; в) $y = \sin\dfrac{\pi}{3}x$:

1. 3/2; 2. 1/3; 3. ½; 4. 1; 5. 6.

1.22. Установите область значений функции $y = 2x - 7$ при изменении аргумента на отрезке $[-3;0]$.

1. $[-6;-3]$; 2. $[-13;-6]$; 3. $[-13;-7]$; 4. $[-13;0]$.

1.23. Наименьшее значение функции $y = e^{1-x^2}$ на отрезке $[-1;1]$ равно _______ (дополните утверждение).

1.24. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ нечетна, если функция $g(x)$ задается формулами (указать несколько вариантов):

1. $g(x) = x^4$; 2. $g(x) = 6x$; 3. $g(x) = x^5$; 4. $g(x) = 3x^2 - 1$.

1.25. Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ четна, если функция $g(x)$ задается формулами (указать несколько вариантов):

1. $g(x)=x-1$; 2. $g(x)=5x^2+7$; 3. $g(x)=3^x$; 4. $g(x)=\dfrac{3}{x^4}+2$.

1.26. Найдите область определения функции $y=x^3+1$.

1. ▌$-\infty;+\infty$; 2. $[-\infty;0)\cap(0;+\infty]$; 3. ▌$;+\infty$; 4. $[-\infty;0)$.

1.27. Область определения линейной функции – множество всех ____________ чисел. (дополните утверждение)

1.28. Функция $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c - постоянные величины, $a\neq 0$) называется ____________ (дополните утверждение).

1.29. Существуют три способа задания графиков функций: словесный, аналитический и _______________ (дополните утверждение).

1.30. Областью определения линейной функции является:
1. множество всех рациональных чисел;
2. множество всех натуральных чисел;
3. множество всех действительных чисел;
4. множество иррациональных чисел.

1.31. Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ убывает на промежутке:
1. $\left(-\infty;\dfrac{-b}{2a}\right]$ при $a>0$, $\left[\dfrac{-b}{2a};+\infty\right)$ при $a<0$;
2. $\left[\dfrac{-b}{2a};-\infty\right)$ при $a>0$, $[0;+\infty)$ при $a<0$;
3. $(-\infty;-b]$ при $a>0$, $[-b;+\infty)$ при $a<0$;
4. $(-1;\infty)$ при $a>0$, $(1;+\infty)$ при $a<0$.

1.32. Степенной функцией называется функция вида:

1. $y=\sin x$; 2. $y=a^x$; 3. $y=x^a$; 4. $y=tgx$.

1.33. Если для любого значения x, взятого из области определения функции $f(x)$, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x)=f(-x)$, то функция называется:

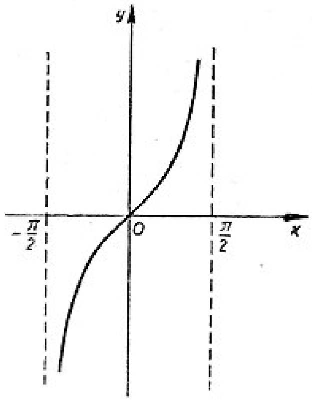
1. периодической; 2. нечетной; 3. монотонной; 4. четной.

1.34. Установите соответствие между функцией и её графиком.

Функция | График

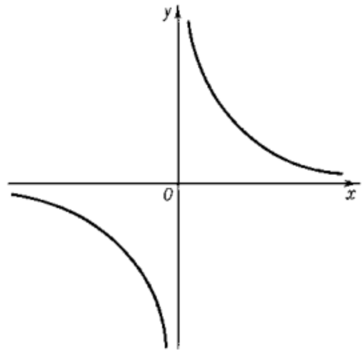
1) $y=\dfrac{1}{x}$

а)



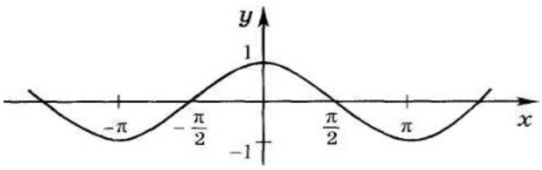
2) $y=\cos x$

б)



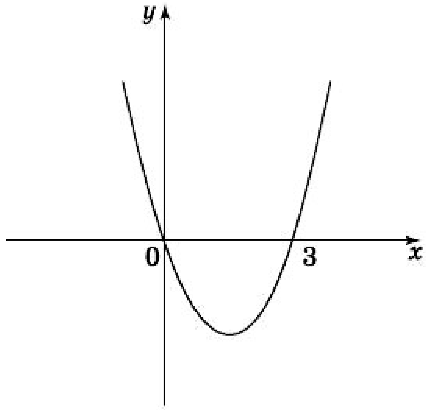
3) $y=tgx$

в)



4) $y=x^2-3x$

г)



1.35. Впервые понятие функции было введено в (укажите вариант ответа) году:

1. 1755; 2. 1748; 3. 1718; 4. 1637.

ТЕСТ 2 Математический анализ

1.1. Значение функции $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}$ при $f\left(1;\dfrac{y}{x}\right)$ равно:

1. 0; 2. $\dfrac{25}{12}$; 3. не существует; 4. $\dfrac{(x+y)^2}{2xy}$.

1.2. Область определения функции $z=\sqrt{y^2-1}+\sqrt{1-x^2}$ определяется как:

1. $|y|\le 1;|x|\ge 1$; 2. $|y|\ge 1;|x|\le 1$;
3. $|y|\ge 1;|x|\ge 1$; 4. $|y|\le 1;|x|\le 1$.

1.3. Число А называется пределом функции $z=f(x,y)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\ne x_0$ и $y\ne y_0$, удовлетворяющее неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ выполняется неравенство ________________ . Вставить нужное неравенство:

1. $|f(x,y)|<\varepsilon$; 2. $|f(x,y)-A|<\delta$;
3. $|f(x,y)-A|<\varepsilon$; 4. $f(x,y)-A<\varepsilon$.

1.4. Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если она:

1. определена в этой точке и некоторой ее окрестности;
2. имеет предел $\lim\limits_{m\to M_0} f(M)$;
3. имеет предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=M_0$;
4. имеет предел функции, равный $M(x,y)$

1.5. В прямоугольной декартовой системе координат уравнение $y=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\sqrt{9-x^2}$, график которой имеет вид:

1. эллипса; 2. гиперболы; 3. параболы; 4. окружности.

1.6. Для эллипса, проходящего через точки $M(3,2)$ и $N(3\sqrt{3/2},\sqrt{2})$, каноническое уравнение имеет вид:

1. $\dfrac{x^2}{(\sqrt{3/2})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$; 2. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;
3. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$; 4. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

1.7. Поверхности параболоида вращения соответствует уравнение:

1. $x^2+y^2+6x-4y-3=0$; 2. $z=x^2+y^2$;
3. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; 4. $z=x^2y+y$.

1.8. Численное значение предела $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 7}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ равно:

1. $-\frac{1}{3}$; 2. $\frac{1}{3}$; 3. $\frac{1}{7}$; 4. $-\frac{1}{7}$.

1.9. Частная производная функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ по переменной x обозначается символом:

1. z'_x; 2. $\frac{\partial z}{\partial x}$; 3. $\frac{\partial f}{\partial x}$; 4. любым из приведенных.

1.10. Теорема Шварца для частной производной второго порядка определяется равенством:

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; 3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial z^2}{\partial y^2}$; 4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

1.11. Частные производные функции $z=x^2-2xy^2+y^3$ равны:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=-4xy+3y^2; \frac{\partial z}{\partial y}=2x-2y^2$;
2. $; \frac{\partial z}{\partial x}=4xy-2y^2; \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-2x$;
3. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2; \frac{\partial z}{\partial y}=-4xy+3y^2$;
4. $\frac{\partial z}{\partial x}=-2x+3y^2; \frac{\partial z}{\partial y}=4xy-3y^2$.

1.12. Частные производные функции $z=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$ в точке $M_0(-1,3)$ равны:

1. $z'_x=6; z'_y=-30$; 2. $z'_x=6; z'_y=-15$;
3. $z'_x=-6; z'_y=30$; 4. $z'_x=-6; z'_y=15$.

1.13. Если функция $z=f(x,y)$ ___________ в точке $M(x,y)$, то она имеет в этой точке частные производные z'_x и z'_y. Вставьте нужное слово.

1.14. Производная сложной функции вычисляется по формуле:

1. $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$; 2. $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$;
3. $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{dt}$; 4. $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}$.

1.15. Функция $z=x^2y^3$ задана уравнениями $x=t$ и $y=t^2$, ее производная равна:

1. $4t^5$; 2. $6t^6$; 3. $8t^7$; 4. $16t^7$.

1.16. Дифференцирование функции двух переменных, заданной неявно $F(x, y, z) = 0$, вычисляется по формуле:

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x}{F'_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y}{F'_z}$;
2. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$;
3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x}{F'_y}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y}{F'_x}$;
4. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}$.

1.17. Дифференциал функции двух переменных имеет вид:

1. $dz = z'_x dx + z'_y dy$;
2. $dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$;
3. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$;
4. любое из равенств.

1.18. Частные производные второго порядка z''_{xx} и z''_{yy} функции $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ равны:

1. $z''_{xx} = 4x^3 + 8xy^2 + 7; z''_{yy} = 12x^2y + 7x$;
2. $z''_{xx} = 12x^2y^2 + 7y; z''_{yy} = 8xy^3 + 12x^2y$;
3. $z''_{xx} = 12x^2 + 8y^3; z''_{yy} = 24x^2y$;
4. $z''_{xx} = 12x^2y + 8y^2x; z''_{yy} = 12x^2y + 4xy^2$.

1.19. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

1. $F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$;
2. $\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$;
3. $z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$;
4. $\frac{x - x_0}{z'_x} = \frac{y - y_0}{z'_y} = \frac{z - z_0}{-1}$.

1.20. Уравнение нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

1. $F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$;
2. $\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$;
3. $z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$;
4. $\frac{x - x_0}{z'_x} = \frac{y - y_0}{z'_y} = \frac{z - z_0}{-1}$.

Тест 3 Дифференциальные уравнения
Вариант 1

1. Дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ является:
   - A. Уравнением в полных дифференциалах,
   - B. Уравнением с разделяющимися переменными,
   - C. Уравнением Бернулли,
   - D. Однородным уравнением 1-го порядка.
2. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$ имеет вид:
   - A. $C_1 + C_2 x \;\; e^{2x}$,
   - B. $C_1 \sin x + C_2 \cos x$,
   - C. $C_1 e^x + C_2 e^{3x}$,
   - D. $C_1 e^x + C_2 e^{\;\;x}$.
3. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$ имеет вид:
   - A. $C_1 e^{2x} + C_1 e^x$,
   - B. $e^{2x} \;\; C_1 \sin x + C_2 \cos x$,
   - C. $e^x \;\; C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$,
   - D. $C_1 + C_2 x \;\; e^{3x}$.
4. Частное решение дифференциального уравнения $y' - y = e^x$ имеет вид:
   - A. xe^x,
   - B. $2xe^x$,
   - C. $x^2 e^x$,
   - D. Ce^x.
5. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ имеет вид:
   - A. $k^2 + 5k = 0$,
   - B. $k^2 - 5k - 6 = 0$,
   - C. $k^2 - 5k + 6 = 0$,
   - D. $k^2 + 6k = 0$.
6. Дифференциальное уравнение $xy + x \;\; dx - y^2 dy = 0$ является:
   - A. Уравнением Бернулли,
   - B. Уравнением Клеро,
   - C. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
   - D. Уравнением с разделяющимися переменными.
7. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:
   - A. $\lambda^2 + 4x + 5 = 0$,
   - B. $\lambda^2 - 4x + 3 = 0$,

C. $4\lambda^2 - 1 = 0$,
D. $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$.

8. Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ имеет вид:
A. $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$,
B. $(C_1 + C_2x)e^{-2x}$,
C. $(C_1 + C_2x)e^{2x}$,
D. $C_1e^{2x} + C_2e^{2x}$.

9. Дифференциальное уравнение $(x+1)\operatorname{tg} x dt + (t+1)\operatorname{tg} t dx = 0$ является:
A. Уравнением с разделенными переменными,
B. Уравнением Бернулли,
C. Уравнением с разделяющимися переменными,
D. Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

10. Для дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^x$ начальные условия могут быть:
A. $y(0) = 2, y'(0) = -4$,
B. $y(1) = 1, y'(0) = 2$,
C. $y(0) = -1, y'(1) = 3$,
D. $y(-1) = 0, y'(0) = 1$.

11. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:
A. $\lambda^2 - 1 = 0$,
B. $\lambda^2 + 1 = 0$,
C. $(\lambda - 1)^2 = 0$,
D. $\lambda^2 + \lambda = 0$.

12. Дифференциальное уравнение $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\dfrac{\ln x}{x}$ является:
A. Уравнением с разделяющимися переменными,
B. Уравнением Бернулли,
C. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
D. Уравнением в полных дифференциалах.

13. Общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y+1}{2x-1}$ имеет вид:
A. $y = \sqrt{2x-1}$,
B. $y + 1 = 3\sqrt{2x-1}$,
C. $y = C\sqrt{2x-1} - 1$,

D. $y = 4x - 3 + C$.

14. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' - 6y = 0$ имеет вид:

A. $C_1 e^{x} + C_2 e^{\ 6x}$,

B. $C_1 e^{\ x} + C_2 e^{6x}$,

C. $C_1 e^{\ x} + C_2 e^{\ 6x}$,

D. $C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$.

15. Дифференциальное уравнение $xy' + x^2 y = 1$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

Вариант 2

1. Дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 0$ имеет вид:

A. $C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$,

B. $C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$,

C. $C_1 + C_2 x \ \ e^{-x}$,

D. $C_1 + C_2 e^{\ 2x}$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 10y = 0$ имеет вид:

A. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$,

B. $e^{3x} \ \ C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

C. $e^{x} \ \ C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$,

D. $C_1 e^{\ x} + C_2 e^{3x}$.

4. Частное решение дифференциального уравнения $y' + y = 2e^{\ x}$ имеет вид:

A. $2xe^{\ x}$,

B. $3xe^{\ x}$,

C. $x^2 e^{\ x}$,

D. $Ce^{\ x}$.

5. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$ имеет вид:

A. $k^2 + 9k = 0$,

B. $k^2 + 2k + 1 = 0$,

C. $k^2 + 9 = 0$,

D. $k^2 + 9k - 1 = 0$.

6. Дифференциальное уравнение $\sin x \cos y dy - \sin^2 y dx = 0$ является:

A. Уравнением Клеро,
B. Уравнением Бернулли,
C. Дифференциальным уравнением 1-го порядка,
D. Уравнением с разделяющимися переменными.

7. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:

A. $\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$,
B. $\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$,
C. $\lambda^2 - 4 = 0$,
D. $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$.

8. Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ имеет вид:

A. $C_1 + C_2 x \ \ \sin x$,
B. $C_1 \cos x + C_2 \sin x$,
C. $C_1 + C_2 x \ \ \cos x$,
D. $C_1 e^x + C_2 e^{\ \ x}$

9. Дифференциальное уравнение $x^2 + x \ \ dt + \ t^2 + t \ \ dx = 0$ является:

A. Уравнением с разделенными переменными,
B. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
C. Уравнением с разделяющимися переменными,
D. Уравнением Бернулли.

10. Для дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 5y = 1$ начальные условия могут быть:

A. $y \ 0 \ = 3, y' \ 0 \ = 1$,
B. $y \ 0 \ = 1, y' \ 1 \ = 0$,
C. $y \ 1 \ = 0, y' \ 0 \ = 2$,
D. $y \ 0 \ = 1, y'' \ 0 \ = 4$.

11. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:

A. $\lambda^2 + \lambda = 0$,
B. $\lambda^2 - 1 = 0$,
C. $\lambda^2 - \lambda = 0$,
D. $\ \lambda - 1 \ ^2 = 0$.

12. Дифференциальное уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^3 y^4$ является:

A. Уравнением с разделяющимися переменными,
B. Уравнением Бернулли,
C. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
D. Уравнением в полных дифференциалах.

13. Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3}{x+4}$ имеет вид:

A. $y = Cx + 3C$,
B. $y = x + 4 + 3C$,
C. $y = C\ \ x + 4\ \ + 3$,
D. $y - 3 = x + 4$.

14. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$ имеет вид:

A. $n^2 + 2n - 1 = 0$,
B. $n^2 + 2n + 1 = 0$,
C. $n^2 - 1 = 0$,
D. $n^2 + 1 = 0$.

15. Дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{2x - y}{x + 2y}$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

ТИПОВЫЕ ТЕСТЫ

по дисциплине ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Тема: Дискретная случайная величина

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-4	6	10
p	0.2	p(X=6)	0.15

Неизвестная вероятность p(X=6) равна
1) 0.35;
2) 0.65;
3) 1,0.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	5	6
p	0.3	0.1	0.2	0.4

Вероятность события $2 \le X \le 5$ равна
1) 0.6;

2) 0.3;
3) 0,1.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	4	5	6
p	0.3	0.1	0.2	0.4

Вероятность события $-1 \le X \le 3$

1) 0;
2) 0.3;
3) 0.7.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-1	2	3	4
p	0.4	0.3	0.1	0.2

Вероятность события $X \le 3$ равна

1) 0.8;
2) 0.7;
3) 0.1.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	5	6
p	0.3	0.1	0.2	0.4

Вероятность события $X \ge 5$ равна

1) 0.4;
2) 0.6;
3) 1.0.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-4	6	10
p	0.2	0.3	0.5

Вероятность события $X \ge 2$ равна

1) 0.8;
2) 0.5;
3) 0.2.

7. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	-1	2	3	4
p	0.4	0.3	0.1	0.2

Математическое ожидание случайной величины X равно

1) 1.0;
2) 1,2;
3) 1.3.

8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-1	2	3	4
p	0.4	0.3	0.1	0.2

Дисперсия случайной величины X равна

1) 0.23;

2) 0.33;
3) 0.25.

9. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	-1	2	3	4
p	0.4	0.3	0.1	0.2

Центральный момент третьего порядка случайной величины X равен
1) 55.9;
2) 23,6;
3) 36.8.

10. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-4	6	10
p	0.2	0.3	0.5

Мода случайной величины X равна
1) 0.5;
2) 10;
3) 6.0.

Тема: Непрерывная случайная величина

1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x \le 0,\\ Cx^2 \text{ } при \text{ } 0 \le x \le 4,\\ 1 \text{ } при \text{ } x > 4.\end{cases}$$

Значение постоянной C равно
1) 1/4;
2) 1/16;
3) ½.

2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x \le 0,\\ \sin x \text{ } при \text{ } 0 \le x \le \pi/2,\\ 1 \text{ } при \text{ } x > \pi/2.\end{cases}$$

Вероятность того, что X примет значение из интервала $(0, \pi/6)$, равна
4) 0.5;
5) 1.0;
6) 0.2

3. Непрерывная случайная величина имеет следующую интегральную функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x \le 0,\\ x^3 \text{ } при \text{ } 0 \le x \le 1,\\ 1 \text{ } при \text{ } x > 1.\end{cases}$$

Вероятность того, что X примет значение из интервала $(-1;0.5)$, равна
7) 0.25;

8) 0.75;
9) 0.5.

4. Функция распределения представляет собой закон распределения
1) только непрерывной случайной величины;
2) только дискретной случайной величины;
3) как непрерывной, так и дискретной случайной величины.

5. Плотность вероятности представляет собой закон распределения
4) только непрерывной случайной величины;
5) только дискретной случайной величины;
6) как непрерывной, так и дискретной случайной величины.

6. Дана плотность вероятности $f(x)$. Для определения вида функции распределения случайной величины X используют формулу

1) $\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$;

3) $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

7. Дана плотность вероятности $f(x)$. Для определения вероятности попадания случайной величины X в интервал (a,b) используют формулу

1) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b f(x)dx$;

3) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

8. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно на отрезке [1,3] равны
1) 2; 1/6;
2) 1,5; 1/3
3) 2; 1/3

9. Случайная величина распределена равномерно на отрезке [0,5]. P_1 - вероятность того, что значение случайной величины попадет на отрезок [0,1]. P_2 - вероятность того, что значение случайной величины окажется на отрезке [3,4]. Тогда можно утверждать, что
1) $P_2 = 3P_1$;
2) $P_1 > P_2$;
3) $P_1 = P_2$.

10. Случайная величина X имеет нормальное распределение N(2,2). Вероятность P(-4<X<8) равна
1) 1;
2) 0,9973;
3) 0,9544.

10.3 Домашние задания по дисциплине Математика

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. Найти пределы, используя правило Лопиталя

Вариант	Предел	Вариант	Предел
Вариант 1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$	Вариант 5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}.$
Вариант 2	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$	Вариант 6	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}.$
Вариант 3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$	Вариант 7	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}.$
Вариант 4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{tg}x}.$		

2. Разложить по формуле Тейлора функцию *f*(*x*) в точке x_0.

Вариант	Функция	Вариант	Функция
Вариант 1	$f(x)=x^3-3x^2-1, x_0=-1$	Вариант 5	$f(x)=3x^4-x+2, x_0=1$
Вариант 2	$f(x)=x^4-3x^2+x-1, x_0=-2$	Вариант 6	$f(x)=3x^3-6x+5, x_0=1$
Вариант 3	$f(x)=x^3+4x^2-2, x_0=0$	Вариант 7	$f(x)=x^2+4x-1, x_0=2$
Вариант 4	$f(x)=x^3+4x^2+8x+\frac{7}{8}, x_0=\frac{1}{2}$		

3. Провести полное исследование и построить графики функции.

Вариант	Функция	Вариант	Функция
Вариант 1	$y=\frac{x^3}{3-x^2}.$	Вариант 5	$f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$
Вариант 2	$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$	Вариант 6	$y=\frac{(x+1)^2}{x-2}.$
Вариант 3	$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$	Вариант 7	$y=\ln(1-x^2).$
Вариант 4	$f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$		

10.4 Методические рекомендации по написанию реферата

Написание реферата является

- одной из форм обучения студентов, направленной на организацию и повышение уровня самостоятельной работы студентов;

- одной из форм научной работы студентов, целью которой является расширение научного кругозора студентов, ознакомление с методологией научного поиска.

Реферат, как форма обучения студентов, - это краткий обзор максимального количества доступных публикаций по заданной теме, с элементами сопоставительного анализа данных материалов и с последующими выводами.

При проведении обзора должна проводиться и исследовательская работа, но объем ее ограничен, так как анализируются уже сделанные предыдущими исследователями выводы и в связи с небольшим объемом данной формы работы.

Преподаватель рекомендует литературу, которая может быть использована для написания реферата.

Целью написания рефератов является:

– привитие студентам навыков библиографического поиска необходимой литературы (на бумажных носителях, в электронном виде);

– привитие студентам навыков компактного изложения мнения авторов и своего суждения по выбранному вопросу в письменной форме, научно грамотным языком и в хорошем стиле;

– приобретение навыка грамотного оформления ссылок на используемые источники, правильного цитирования авторского текста;

– выявление и развитие у студента интереса к определенной научной и практической проблематике с тем, чтобы исследование ее в дальнейшем продолжалось в подготовке и написании курсовых и дипломной работы и дальнейших научных трудах.

Основные задачи студента при написании реферата:

- с максимальной полнотой использовать литературу по выбранной теме (как рекомендуемую, так и самостоятельно подобранную) для правильного понимания авторской позиции;

- верно (без искажения смысла) передать авторскую позицию в своей работе;

- уяснить для себя и изложить причины своего согласия (несогласия) с тем или иным автором по данной проблеме.

Требования к содержанию:

- материал, использованный в реферате, должен относится строго к выбранной теме;

- необходимо изложить основные аспекты проблемы не только грамотно, но и в соответствии с той или иной логикой (хронологической, тематической, событийной и др.)

- при изложении следует сгруппировать идеи разных авторов по общности точек зрения или по научным школам;

- реферат должен заканчиваться подведением итогов проведенной исследовательской работы: содержать краткий анализ-обоснование преимуществ той точки зрения по рассматриваемому вопросу, с которой Вы солидарны.

Примерная тематика рефератов по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. История развития теории вероятностей
2. Вклад Б. Паскаля в развитие теории вероятностей.
3. Вклад П.-С.Лапласа в развитие теории вероятностей.

4. Вклад российских математиков в развитие теории вероятностей.
5. Аксиоматическое построение теории вероятностей.
6. Геометрическая вероятность.
7. Области применения метода Монте-Карло.
8. Практические применения основных распределений случайных величин
9. Функции случайных величин и их числовые характеристики
10. Применение теорем о числовых характеристиках функций случайных величин к решению практических задач
11. Двумерное нормальное распределение
12. Многомерное нормальное распределение
13. Метод характеристических функций
14. Закон больших чисел
15. Центральная предельная теорема
16. Методы получения точечных оценок параметров генеральной совокупности
17. Оценка надежности результатов педагогического эксперимента
18. Методы математической обработки данных в социально-психологических исследованиях
19. Модели теории массового обслуживания
20. Экономические приложения теории случайных процессов
21. Математические пакеты программ для статистических расчетов.