МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Теория функций комплексного переменного

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе лекционных занятий необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Тема	Рассматриваемые вопросы
1	Комплексные числа и их свойства.	Комплексное число: сложение, умножение, вычитание и деление во множестве комплексных чисел (к.ч.); алгебраическая и тригонометрическая формы к.ч.; степень с натуральным показателем для к.ч.; арифметический корень из к.ч.; сопряженные к.ч.; геометрическая интерпретация действий (операций) в множестве С; обратное число для к.ч.
2	Функции комплексного переменного (к.п.).	Основные понятия. Предел и непрерывность функции к.п. Пределы ее вещественной и мнимой частей; геометрическое истолкование предела к.п.; Основные элементарные функции к.п.: показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрическая, обратная тригонометрическая.
3	Дифференцирование функции к.п	Условия Эйлера-Даламбера. Правила дифференцирования функций к.п. Аналитическая функция, Дифференциал функции к.п. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном отображении.
4	Интегрирование функции к.п.	Определение, свойства и правила вычисления интеграла. Свойства интеграла функции к.п. Теорема Коши. Первообразная и

		неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Следствия. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши.
5	Ряды в комплексной плоскости.	Числовые ряды с комплексными элементами (к.ч.): сумма ряда к.ч.; сходящиеся и расходящиеся ряды к.ч.; необходимый признак сходимости рядов к.ч.; абсолютно сходящиеся ряды к. ч.; связь между абсолютной сходимостью и сходимостью рядов к.ч.; условно сходящийся ряд к.ч.; сложение и вычитание рядов к.ч.; умножение рядов к.ч. на число; теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда к.ч.; теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов к.ч. Степенные ряды. Теорема Абеля.
6	Ряды Тейлора и Лорана.	Ряд Тейлора. Разложение функции в степенной ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Нули аналитической функции. Ряд Лорана. Правильная и главная части ряда Лорана. Классификация особых точек. Связь между нулем и полюсом функции. Устранимые особые точки. Полюсы. Существенно особые точки. Вычет функции. Понятие о вычетах и основная теорема о вычетах. Вычисление вычетов. Применение вычетов в вычислении интегралов.
7	Комплексная форма ряда Фурье.	Вычисление вычетов. Применение вычетов в вычислении интегралов.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

1 Комплексные числа

1.1. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть комплексное число задано в алгебраическое форме: $\alpha = a + bi$. Изобразим число α точкой $\mathrm{M(a,b)}$ комплексной плоскости. *Модулем комплексного числа* $\alpha = a + bi$ называют длину r радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $\mathrm{M(a,b)}$, изображающей данное число. Модуль комплексного числа α обозначают символом $|\alpha|$.

Следовательно, по определению $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\mathrm{r} = |\alpha|$, $|\alpha| \geq 0$.

Так как $\overrightarrow{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис.1), то $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

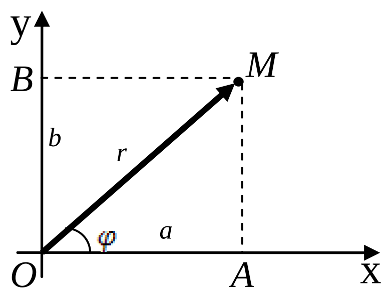

Рис. 1 Определение аргумента комплексного числа

Если $\mathrm{b} = 0$, т.е. число α является действительным, причем $\alpha = a$, то формула принимает вид $|\alpha| = \sqrt{a^2}$. Аргументом комплексного числа $\alpha = a + bi$ называют величину угла φ наклона радиус-вектора $r=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ точки $M(a,b)$ к положительной полуоси Ox. Аргумент комплексного числа α обозначают символом $\mathrm{Arg}\alpha$. Угол φ может принимать любые действительные значения. Аргумент комплексного числа α имеет бесконечное множество значений, отличающихся одно от другого на число, кратное 2π:

$$\mathrm{Arg}\,\alpha=\arg\alpha+2\pi k\ (k=0,\pm1,\pm2,...),\ -\pi<\arg\alpha\le\pi.$$

С помощью модуля и аргумента комплексное число $\alpha=a+bi$ можно представить в другой форме. Поскольку $a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi$, то

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ (r\ge0),$$

где $r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}.$

Выражение, стоящее в правой части формулы, называют *тригонометрической формой комплексного числа*. Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, *равны* тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π. Следовательно, если $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то $r_1=r_2,\ \varphi_2=\varphi_1+2\pi k\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$; и обратно.

Если комплексное число $\alpha=a+bi$ задано в тригонометрической форме $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то комплексно-сопряженное число $\overline{\alpha}=a-bi$ записывается в форме $\overline{\alpha}=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$; поэтому $\left|\overline{\alpha}\right|=|\alpha|$, $\arg\overline{\alpha}=-\arg\alpha$.

Пример 1.1. Комплексное число $\alpha=2\sqrt{2}/(1-i)$ записать в алгебраической и тригонометрической формах.

Решение. Умножая числитель и знаменатель данной дроби на число, сопряженное знаменателю, получаем:

$$\frac{2\sqrt{2}}{1-i}=\frac{2\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2\sqrt{2}(1+i)}{1-i^2}=\frac{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$$

Это алгебраическая форма данного числа $\alpha=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Находим $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2,\quad \sin\varphi=b/r=\sqrt{2}/2,\quad \cos\varphi=a/r=\sqrt{2}/2,$ откуда главное значение $\varphi=\pi/4$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $\alpha=2(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))$.

Пример 1.2. Вычислить $\sin(\pi+i)$

Решение. $\sin(\pi+i)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(\pi+i)}-e^{-i(\pi+i)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-1+i\pi}-e^{1-i\pi}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-1}e^{i\pi}-e^{1}e^{-i\pi}\right)=$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-1}(\cos\pi+i\sin\pi)-e^{1}(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-1}\cdot(-1+0)-e^{1}(-1+0)\right)=$$

$$=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=-i\cdot sh1$$

1.2. Действия над комплексными числами

Чтобы сложить два комплексных числа, необходимо сложить отдельно их действительные и мнимые части, при вычитании необходимо вычесть отдельно их действительные и мнимые части.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Отметим, что сумма и произведение двух комплексно-сопряженных чисел $\alpha=a+bi, \overline{\alpha}=a-bi$ являются действительными числами.

Умножение и деление комплексных чисел выполняется по нижеприведенным формулам:

в алгебраической форме:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i,$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c^2+d^2\neq 0);$$

в тригонометрической форме:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Формула возведения в степень:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Натуральные степени мнимой единицы i принимают лишь четыре значения: $-1,-i,1,i$.

Квадратным корнем из комплексного числа называют комплексное число, квадрат которого равен данному комплексному числу. Вычисление корня n-ой степени осуществляется по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).$$

Пример 1.3. Даны два комплексных числа $5+i$ и $2+3i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

Решение. Применим указанные выше формулы для вычисления суммы, разности, произведения и частного комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$(5+i)+(2+3i)=(5+2)+(1+3)i=7+4i,$$
$$(5+i)-(2+3i)=(5-2)-(1-3)i=3-2i,$$
$$(5+i)(2+3i)=10+15i+2i+3i^2=7+17i,$$
$$\frac{5+i}{2+3i}=\frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{10-15i+2i-3i^2}{4-9i^2}=\frac{13-13i}{13}=1-i.$$

Пример 1.4. Возвести в указанные степени данные комплексные числа: $(3+4i)^2$, $(1+2i)^3$, $(2+i)^4$.

Решение. Применяя формулу возведения двучлена в степень *n*, при $n=2$, $n=3$, $n=4$ получаем

$$(3+4i)^2 = 3^2 + 2\cdot 12i + (4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i\ ,$$

$$(1+2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i,$$

$$(2+i)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 i + 6\cdot 4i^2 + 4\cdot 2i^3 + i^4 = 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i.$$

Пример 1.5. Извлечь корень квадратный из числа $\alpha = 9 + 40i$.

Решение. Обозначим $\sqrt{9+40i} = u + iv$. Поскольку в данном случае $a = 9$, $b = 40$, то

$$u^2 = (9 + \sqrt{9^2 + 40^2})/2 = (9+41)/2 = 25;$$

$$v^2 = (-9 + \sqrt{9^2 + 40^2}\ /2 = (-9+41)/2 = 16.$$

Так как $u^2 = 25$, $v^2 = 16$, то $u_1 = -5,\ u_2 = 5,\ v_1 = -4,\ v_2 = 4.$ Получено два значения корня: $u_1 + v_1 i = -5 - 4i$ и $u_2 + v_2 i = 5 + 4i.$

Пример1.6. Найти значение выражения $z^3 - 2z^2 + 5z$ при $z = 1 - i.$

Решение. Поскольку $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i,$

$$(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i, \text{тогда:}$$

$$z^3 - 2z^2 + 5z = -2 - 2i - 2(-2i) + 5(1-i) = 3 - 3i.$$

Пример 1.7. Показать, что комплексное число $z = 1 - i$ является корнем уравнения $z^3 + 2z^2 - 6z + 8 = 0.$

Решение. Так как $z^2 = (1-i)^2 = -2i$, $z^3 = (1-i)^3 = -2 - 2i,$ то

$$z^3 + 2z^2 - 6z + 8 = = -2 - 2i + 2(-2i) - 6(1-i) + 8 = 0,$$

т. е. $(1-i)$ – корень уравнения.

2 Теория функций комплексного переменного

2.1. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность

Рассмотрим комплексное число $\mathrm{z = x + iy}$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$), которая изображается точкой комплексной плоскости с координатами $(\mathrm{x, y})$. Пусть D – область (открытое связное множество) комплексной плоскости. Если каждой точке $\mathrm{z \in D}$ по определенному правилу f поставлено в соответствие единственное комплексное число $\mathrm{w = u + iv}$, то говорят, что в области D *определена однозначная функция комплексного переменного* $\mathrm{z = x + iy}$, и пишут $\mathrm{w = f(z),\ z \in D}$. Функцию $\mathrm{w = f(z) = f(x+iy)}$ можно рассматривать как комплексную функцию двух действительных переменных x и y, определенную в области D, $\mathrm{w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)}$.

Пример 2.1. Найти значения функции $f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z$ при следующих значениях аргумента: 1) $z = i;$ 2) $z = 1 - i;$ 3) $z = 2 + i.$

Решение. Принимая во внимание значения мнимой единицы, получаем:

$$f(i) = i^3 - 2i^2 + 5i = -i + 2 + 5i = 2 + 4i.$$

Поскольку $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i,$

$(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i,$ то

$f(1-i) = (1-i)^3 - 2(1-i)^2 + 5(1-i) = -2 - 2i - 2(-2i) + 5 - 5i = -2 - 2i + 4i + 5 - 5i = 3 - 3i$.

Далее

$$f(2+i)=(2+i)^3-2(2+i)^2+5(2+i)=2^3+3\cdot 2^2 i+3\cdot 2i^2+i^3-2(4+4i+i^2)+5(2+i)=$$
$$=8+12i+6i^2+i^3-8-8i-2i^2+10+5i=8+12i-6-i-8-8i+2+10+5i=6+8i.$$

Пример 2.2. Дана функция $\omega=z^2+z$. Найти значение функции при:
1) $z=1+i$; 2) $z=2-i$; 3) $z=i$; 4) $z=-1$.

Решение. 1) $\omega=(1+i)^2+1+i=1+2i-1+1+i=1+3i$;
2) $\omega=(2-1)^2+2-i=4-4i-1+2-i=5(1-i)$; *3)* $\omega=i^2+i=-1+i$; *4)* $\omega=1-1=0$.

Пример 2.3. Найти $\ln\left(\sqrt{3}+i\right)$.

Решение. Имеем $z=\sqrt{3}+1,\ \rho=|z|=2,\ \varphi=\arg z=arctg\left(1/\sqrt{3}\right)=\pi/6,$ *т.е.*
$$\ln\left(\sqrt{3}+i\right)=\ln 2+(\pi/6+2k\pi)i,\quad k\in z.$$

Пример 2.4. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найти действительную часть $u(x,y)$ и мнимую часть $v(x,y)$:

а) $f(z)=z^2$, б) $f(z)=\dfrac{1}{z}$, в) $f(z)=e^z$, г) $f(z)=\sin z$

Решение.

а) $z^2=(x+iy)^2=x^2+2x\cdot iy+(iy)^2=x^2+i\cdot 2xy-y^2=(x^2-y^2)+i\cdot 2xy$, т.е.
$u(x,y)=x^2-y^2;\ v(x,y)=2xy$

б) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\overline{\overline{x+iy}}}=\dfrac{1}{x-iy}=\dfrac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)}=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}$, т.е

$u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}, u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

в) $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{x+iy}=e^x\cdot(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y$, т.е
$u(x,y)=e^x\cos y;\ v(x,y)=e^x\sin y$

г)

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{ix-y}-e^{-ix+y}\right)=$$
$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos(-x)+i\sin(-x))\right)=-\frac{i}{2}\left(\cos x\left(e^{-y}-e^{y}\right)+i\sin x\left(e^{-y}+e^{y}\right)\right)=$$
$$=i\cos x\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\sin x\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sin x\, ch\, y+i\cos x\, ch\, y, т.е$$

$u(x,y)=\sin x\, ch\, y; v(x,y)=\cos y\, sh\, y$

Пример 2.5. Определить функцию $f(z)$, где $z=x+iy$, если Re $f(z)=x$ и Im $f(z)=-y$

Решение. Так как $z=x+iy$, а $\bar{z}=x-iy$, то $z+\bar{z}=2x,\ z-\bar{z}=2iy$, откуда
$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}=-i\frac{z-\bar{z}}{2}.$$

Следовательно, $f(z)=x-iy=\dfrac{z+\bar{z}}{2}-i\cdot\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{z+\bar{z}}{2}-\dfrac{z-\bar{z}}{2}=\bar{z}$. Итак, $f(z)=\bar{z}$

Комплексное число c называется *пределом однозначной функции* $w = f(z)$ при $f(z) \to a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|z - a| < \varepsilon$ следует неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c$.

Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Пример 2.6. Доказать, что функция $w = z^2$ является непрерывной при любом значении z.

Решение. Зафиксируем значение z_0 и рассмотрим разность $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Когда $z \to z_0$, то существует такое положительное число M, при котором выполняются неравенства $|z| < M,\ |z_0| < M,$ поэтому

$$\left|z^2 - z_0^2\right| = |z - z_0||z + z_0| < |z - z_0|(|z| + |z_0|) < 2M|z - z_0.|$$

Выберем $\delta = \varepsilon / 2M$. Из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует, что

$$\left|z^2 - z_0^2\right| < 2M\delta = 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\ \left|z - z_0^2\right| < \varepsilon$$

Следовательно, $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0{}^2$. Поскольку выполняется равенство, то функция $w = z^2$ непрерывна в точке z_0. Точка z_0 была зафиксирована произвольно, значит, функция $w = z^2$ непрерывна в любой точке.

2.2. Элементарные функции комплексного переменного

Показательная функция e^z имеет следующие свойства:

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, где z_1, z_2 - произвольные комплексные числа;

2) $e^{z + 2k\pi i} = e^z\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$ – периодические с действительным периодом 2π; они имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi$ соответственно, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ справедливы формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Если $z = x + iy$, то $e^z = e^{x + iy} = e^x \cdot e^{iy}$, поэтому $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Все формулы тригонометрии остаются справедливыми и для тригонометрических функций комплексной переменой.

Логарифмическая функция $\mathrm{Ln}\, z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Эта функция является многозначной. Главным значением $\mathrm{Ln}\, z$ называется такое значение, которое получается при $k = 0$; оно обозначается через $\ln z$:

$$\ln z = |z| + i\arg z.$$

Очевидно, что $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i, (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

Справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{Ln}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \quad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2,$$

$$\mathrm{Ln}\,(z^n) = n\,\mathrm{Ln}\, z, \quad \mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \mathrm{Ln}\, z / n.$$

Обратные тригонометрические функции $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctg\, z$, $Arcctg\, z$ определяются как функции, обратные соответственно функциям $\sin w, \cos w$, $\mathrm{tg}\, w$, $\mathrm{ctg}\, w$. Все эти функции являются многозначными; они выражаются через логарифмические функции следующими формулами:

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\,\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\mathrm{Arc}\cos z = -i\,\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\frac{z + i}{z - i}.$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z, \arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z, \mathrm{arcctg}\, z$ получаются, когда рассматриваются главные значения соответствующих логарифмических функций.

Пример 2.7. Доказать, что $e^{\pi i} = -1, \; e^{\pi i/2} = i.$

Решение. Число πi можно рассматривать как комплексное число $z = x + iy$, где $x = 0, \; y = \pi,$ поэтому находим

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Аналогично получаем второе равенство:

$$e^{\pi i/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i.$$

Пример 2.8. Найти: 1) $\cos i$; 2) $\sin(1 + 2i)$.

Решение. Получаем:

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = ch\,1 = 1{,}5431.$$

Находим:

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i}=\frac{e^{-2}e^{i}-e^{2}e^{-i}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2i}=\frac{\cos 1(e^{-2}-e^{2})+i\sin 1(e^{2}+e^{-2})}{2i}=$$

$$=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin 1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1=ch\,2\sin 1+i\,sh2\cos 1=$$

$$=3{,}7622\cdot 0{,}8415+i3{,}6269\cdot 0{,}5403=3{,}1650+1{,}9596i.$$

Пример 2.9. Найти: 1) ln(-1); 2) Ln(-1); 3) ln i; 4) Lni; 5) ln(3+4i); Ln(3+4i).

Решение. Поскольку $|-1|=1$, а главное значение аргумента равно π, то получим $\ln(-1)=\ln 1+\pi i$; по формуле найдем:

$$Ln(-1)=\pi i+2k\pi i=(2k+1)\pi i\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

С учетом того, что $|i^2|=1$, arg $i=\pi/2$, находим:

$$\ln i=\ln 1+\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{2}i,\ \ Ln\,i=\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

Так как $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \arg(3+4i)=arctg\,\frac{4}{3}$, то $\ln(3+4i)=\ln 5+i\cdot arctg\,\frac{4}{3}$,

$$Ln(3+4i)=\ln 5=i\,arctg\,\frac{4}{3}+2k\pi i\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

Пример 2.10. Найти: 1) i^i; 2) 2^{1+i}.

Решение. При $a=i,\ \ z=i$ и с учетом того, что $Ln\,i=\frac{\pi}{2}i+2k\pi i$ получаем:

$$i^i=e^{i\,Ln\,i}=e^{i(\pi/2+2k\pi i)}=e^{-\pi/2-2k\pi}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

Главное значение i^i равно $e^{-\pi/2}$.
На основании формулы при $a=2,\ \ z=1+i$ находим:

$$2^{1+i}=e^{(1+i)Ln\,2}=e^{(1+i)(\ln 2+2k\pi i)}=e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)}=e^{\ln 2-2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2).$$

Пример 2.11. Найти: 1) $Arc\sin 2$; 2) $Arctg(2i)$.

Решение. Находим

$$Arc\sin 2=-i\,Ln(2i\pm\sqrt{3}=-i\,Ln\left[(2\pm\sqrt{3})\,i\right]=-i\left[\ln(2\pm\sqrt{3}+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

Также получаем

$$Arctg\,(2i)=-\frac{i}{2}Ln\,(-\frac{1}{3})=-\frac{i}{2}(\ln\frac{1}{3}+\pi i+2k\pi i)==\frac{\pi}{2}+\frac{i\ln 3}{2}+k\pi\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

2.3. Дифференцирование функций комплексного переменного

Производной функции $\mathrm{w}=\mathrm{f}(\mathrm{z})$ точке z называется конечный предел отношения $\Delta\mathrm{w}/\Delta\mathrm{z}$, когда $\Delta\mathrm{z}$ произвольным образом стремится к нулю:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

Функция, имеющая производную в точке z, называется *дифференцируемой в этой точке*.

Если $z=x+iy,\ w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$ то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые называют *условиями Даламбера-Эйлера* (или *условиями Коши-Римана*).

Функция $w=f(z)$ называется *аналитической в точке* $z\in D$, если она дифференцируема в ней и некоторой её окрестности. Для всякой аналитической функции $f(z)$ производная $f'(z)$ выражается через частные производные функций $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Производные элементарных функций комплексного переменного $z^n,\ \ln z,\ e^z,\ \sin z, \cos z, \arcsin z, \arccos z, \operatorname{arctg} z$ находятся по формулам:

$$(z^n)'=nz^{n-1},\ (\ln z)'=\frac{1}{z},$$

$$(e^z)'=e^z,\ (\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z,$$

$$(\arcsin z)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ (\arccos z)'=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\ (\operatorname{arctg} z)'=\frac{1}{1+z^2},$$

Пример 2.12. Выяснить, является ли аналитической функция $w=z^2$.

Решение. Поскольку $z=x+iy$, то

$w=(x+iy)^2=x^2+2ixy+i^2y^2;\ w=(x^2-y^2)+2ixy,\ u=u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=2xy.$

Находим частные производные функций $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

Следовательно, $u'_x=v'_y,\ u'_y=-v'_x;$ условия аналитичности выполнены для всех точек плоскости Oxy. Значит, функция $w=z^2$ является аналитической на всей плоскости.

Пример 2. 13. Выяснить, является ли аналитической функция $w=\bar{z}$.

Решение. Если $w=\bar{z}$, то $u+iv=x-iy,\ u=x,\ v=-y,$ откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, первое из условий не выполняется. Функция $w=\bar{z}$ не имеет производной ни в одной точке плоскости и поэтому не является аналитической.

Пример 2.14. Выяснить, является ли аналитической функция $w=z\operatorname{Re} z$.

Решение. Если $w=z\operatorname{Re} z$, то $u+iv=(x+iy)x=x^2+ixy;\ u=x^2,\ v=xy,$ откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

Равенства выполняются только при x=0 и y=0. Таким образом, функция $w=z\operatorname{Re}z$ дифференцируема только в точке z=0 и нигде не является аналитической.

Пример 2.15. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна её мнимая часть $v(x,y)=2x^2-2y^2+x.$

Решение. Поскольку $\frac{\partial v}{\partial x}=4x+1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=4y,$ то из равенств получаем $\frac{\partial u}{\partial x}=-4y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-4x-1.$

Из первого уравнения находим $u=\int(-4y)dx=-4xy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция. Для определения функции $\varphi(y)$ продифференцируем по y функцию $u=-4xy+\varphi(y)$ и подставим полученную производную во второе уравнение: $-4x+\varphi'(y)=-4x-1,$ откуда $\varphi'(y)=-1,\ \varphi(y)=-y+C.$ Следовательно, $u=-4xy-y+C,$ поэтому $w=u+iv=-4xy-y+C+i\ (2x^2-2y^2+x)=2i\ (x^2-y^2+2ixy)+$ $+i\ (x+iy)+C,\ \ w=f(z)=2iz^2+iz+C,$ где $z=x=iy.$

Пример 2.16. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна её действительная часть $u(x,y)=x^2-y^2-x.$

Решение. Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,$ то из равенств следует, что $\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y.$ Из первого уравнения находим $v=\int(2x-1)dy=2xy-y+\varphi(x),$ где $\varphi(x)$ - произвольная функция. Для определения функции $\varphi(x)$ находим $v'_x=2y+\varphi'(x)$ и подставляем во второе уравнение: $2y+\varphi'(x)=2y,$ откуда $\varphi'(x)=0,\ \varphi(x)=C$.

Значит, $v=2xy-y+C,$ поэтому $f(z)=u+iv=x^2-y^2-x+i\ (2xy-y+C)=$ $=x^2-y^2+2ixy-(x+iy)+Ci=(x+iy)^2-(x+iy)+Ci,$ или $f(z)=z^2-z+Ci.$

Пример 2.17. Найти точки, в которых существует производная функции e^z, и вычислить эту производную.

Решение.

Так как $e^z=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y$, то $u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y.$

Найдём частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ и выясним, в окрестностях каких точек они существуют и непрерывны, а также в каких точках плоскости выполняются условия Коши-Римана.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right)=e^x\cos y,\ \ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\sin y\right)=e^x\cos y$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ для любых действительных *x* и *y* и эти частные производные непрерывны во всей плоскости R^2; кроме того, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos y\right)=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\sin y\right)=e^x\sin y$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ для любых действительных x и y, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости R^2.

Так как условия Коши–Римана выполняются для любой пары действительных чисел $(x,\ y)$ и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности любой точки $(x,\ y)$, то производная $f'(z)$ существует в любой точке $z=x+iy$ комплексной плоскости C. Найдём эту производную:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$

Итак, $f'(z)=\left(e^z\right)'=e^z$, $\quad\forall z\in C.$

Пример 2.18. Является ли дифференцируемой функция $f(z)=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y$

Решение. Находим $u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y;\ \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,$

$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y;\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$ Условия Коши–Римана выполнены.

Далее имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{yi}=e^{x+iy}=e^z,$$

или иначе $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{yi}=e^{x+yi}=e^z,\ f'(z)=e^z.$

Пример 2.19. Дана действительная часть $u(x,y)=x^2-y^2-x$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z=x+yi$. Найти функцию $f(z)$.

Решение. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1.$ Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ (в силу одного из условий Коши-Римана), то $\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1.$ Интегрируя находим $v(x,y)=2xy-y+\varphi(x),$ где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

Используем другое условие Коши–Римана: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$ Так как $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x),$

то $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-\varphi'(x).$ Но из условий задачи находим, что $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y.$ Следовательно, $-2y-\varphi'(x)=-2y,\ \varphi'(x)=0,\ \varphi(x)=C,$ откуда

$f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y+C)=x^2-y^2+2xyi-(x+yi)+Ci,$ или

$f(z)=(x+yi)^2-(x+yi)+Ci,\ т.е.\ f(z)=z^2-z+Ci.$

Пример 2.20. Дана мнимая часть $v(x,y)=x+y$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

Решение. Имеем $\frac{\partial v}{\partial y}=1;$ следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ (согласно условию Коши–Римана). Отсюда $u=x+\varphi(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y),\ \frac{\partial v}{\partial x}=1.$ Но $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$ Следовательно, $\varphi'(y)=-1.$ Интегрированием находим, что $\varphi(y)=-y+C.$ Отсюда $u=x-y+C$. Итак $f(z)=x-y+C+i(x+y)=(1+i)(x+yi)+C,$ *т.е.* $f(z)=(1+i)z+C.$

2.4. Интегрирование функций комплексного переменного

Интегралом от функции $f(z)$ по дуге L называется конечный предел суммы $I_n=\sum_{k=1}^{n} f(z'_k)\Delta z_k$.

$$\int_L f(z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z'_k)\Delta z_k.$$

Интеграл от функции комплексной переменной имеет следующие свойства:

1. $\int_L (f(z)+\varphi(z))dz=\int_L f(z)dz+\int_L \varphi(z)dz.$

2. $\int_L af(z)dz=a\int_L f(z)dz$ (a – постоянная).

3. Если дуга $\bar{L}$ геометрически совпадает с дугой L, но имеет направление, противоположное направлению дуги L (для $\bar{L}$ начальная точка z, а конечная z_0), то $\int_{\bar{L}} f(z)dz=-\int_L f(z)dz$.

4. Если дуга L состоит из дуг $L_1, L_2, \cdots, L_n$, то $\int_L f(z)dz=\int_{L_1} f(z)dz+\int_{L_2} f(z)dz+...+\int_{L_n} f(z)dz.$

5. $\int_L dz=z-z_0.$

6. Если $|f(z)|<M$ во всех точках L и длина дуги равна l, то $\left|\int_L f(z)dz\right|\le Ml$.

7. $\left|\int_L f(z)dz\right|\le\int_L |f(z)||dz|$, где $\int_L |f(z)||dz|=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}|f(z'_k)||\Delta z_k|.$

Вычисление интеграла от однозначной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексной переменной $f=x+iy$ сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов:

$$\int_L f(z)dz=\int_L udx-vdy+i\int_L vdx+udy,\ \text{где}\ u=u(x,y),\ v=v(x,y).$$

Теорема (Коши). Для всякой функции $f(z)$, аналитической в некоторой односвязной области D, интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Г, целиком принадлежащему области D, равен нулю:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Если кривая интегрирования задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t_0 \le t \le t_1$, то $\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\left[z(t)\right]z'(t)dt$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ – аналитическая в однозначной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_L f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $F(z)$ – первообразная для функции $f(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$ в области D.

Пример 2.21. Вычислить интеграл $\int_L \bar{z}dz$, где L – линия, соединяющая точки $z = -1, z = 1$, причем: 1) L — отрезок действительной оси от точки $z = -1$ до точки $z = 1$, 2) L — верхняя полуокружность $|z| = 1$.

Решение. Поскольку для комплексного числа $z = x + iy$ сопряженным является число $\bar{z} = x - iy$, то на действительной оси $z = x$, $dz = dx$ и $\bar{z} = x$. В первом случае получаем:

$$\int_L \bar{z}dz = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Верхнюю полуокружность $|z| = 1$ можно задать так: $z = e^{i\varphi}$, где $0 \le \varphi \le \pi$, причем φ убывает. Поскольку $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}$, то во втором случае

$$\int_L \bar{z}dz = \int_{\pi}^{0} e^{-i\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi = i\int_{\pi}^{0} d\varphi = -\pi i.$$

Замечание. Функция $w = \bar{z}$ не является аналитической (для функций $w = \bar{z} = x - iy$ не выполняются условия аналитичности); значение интеграла от этой функции зависит от пути интегрирования, соединяющего указанные точки.

Пример 2.22. Вычислить интеграл $\int_L (1 + i - 2\bar{z})dz$, где L – отрезок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

Решение. Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - 2(x - iy) = 1 - 2x + i(1 + 2y),$$

здесь $u(x, y) = 1 - 2x$, $v(x, y) = 1 + 2y$.

Тогда:

$$\int_L (1 + i - 2\bar{z})dz = \int_L (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int_L (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$$

Отрезок прямой между точками $z_1 = 0, z_2 = 1+i$ имеет уравнение $y = x\ (0 \le x \le 1)$, поэтому $dy = dx$; пределы интегрирования соответственно равны: $a = 0,\ b = 1.$ Следовательно,

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 \left[(1-2x)-(1+2x)\right]dx + i\int_0^1 \left[(1+2x)+(1-2x)\right]dx = -4\int_0^1 xdx + 2i\int_0^1 dx =$$

$$= -2+2i = 2(i-1).$$

Пример 2.23. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{dz}{z-a}$, где L – окружность радиуса r с центром в точке a.

Решение. Переходим к новой переменной в соответствии с формулой: $z = a + re^{i\varphi},\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$ Получаем:

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_{L_1} \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = i\int_{L_1} d\varphi.$$

Поскольку L_1 – отрезок действительной оси от точки 0 до точки 2π, то

$$\int_{L_1} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Таким образом, $\int\limits_L \frac{dz}{z-a} = i\int\limits_{L_1} d\varphi = 2\pi i.$

Пример 2.24. Вычислить интеграл $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)dz.$

Решение. Поскольку подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ является аналитической везде, то с помощью формулы Ньютона-Лейбница находим:

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)dz = (z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 =$$

$$= (2+11i) + (3+4i) - (-2-2i) - (-2i) = 7+19i.$$

Пример 2.25. Вычислить интеграл $\int\limits_0^i z\sin z dz.$

Решение. Функция $f(z) = z\sin z$ является аналитической на всей плоскости z, поэтому интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $z=0$ и $z=i$. На основании формул интегрирования по частям и Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_0^i z\sin z dz = \int_0^i z(-\cos z)'dz = -z\cos z\Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz = -z\cos z\Big|_0^i + \sin z\Big|_0^i = -i\cos i + \sin i =$$

$$= i(sh1 - ch1) = i(1{,}1752 - 1{,}5431) = -0{,}3679i.$$

Замечание. Здесь использованы равенства $sh\, z = -i\sin iz,\ ch\, z = \cos iz$ при $z=1: sh\,1 = -i\sin i,\ \ ch\,1 = \cos i,$ поэтому $-i\cos i = -i\ ch\,1,\ \sin i = i\ sh\,1.$

Пример 2.26. Вычислить интеграл $J=\int\limits_l \left(i\bar{z}+z^2\right)dz$, где l - часть окружности $|z|=2,\ \arg z\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$

Решение. Так как для всех точек l выполняется равенство $r=|z|=2$ (рис.2), то

$$z=re^{i\varphi}=2e^{i\varphi},\quad \bar{z}=2e^{-i\varphi},\quad z^2=\left(2e^{i\varphi}\right)^2=4e^{i\cdot 2\varphi},$$

$$dz=d\left(2e^{i\varphi}\right)=2ie^{i\varphi}d\varphi,\quad \varphi=\arg z\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

Отсюда получаем:

$$J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(i\cdot 2e^{-i\varphi}+4e^{2i\varphi}\right)2ie^{i\varphi}d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(i^2\cdot 4e^{-i\varphi+i\varphi}+8ie^{2i\varphi+i\varphi}\right)d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-4+8ie^{3i\varphi}\right)=$$

$$=-4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi+8i\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{3i\varphi}d\varphi=-4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+8i\cdot\frac{e^{3i\varphi}}{3i}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-4\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{8}{3}\left(e^{3i\pi}-e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}\left(-1-(-i)\right)=-2\pi-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}i.$$

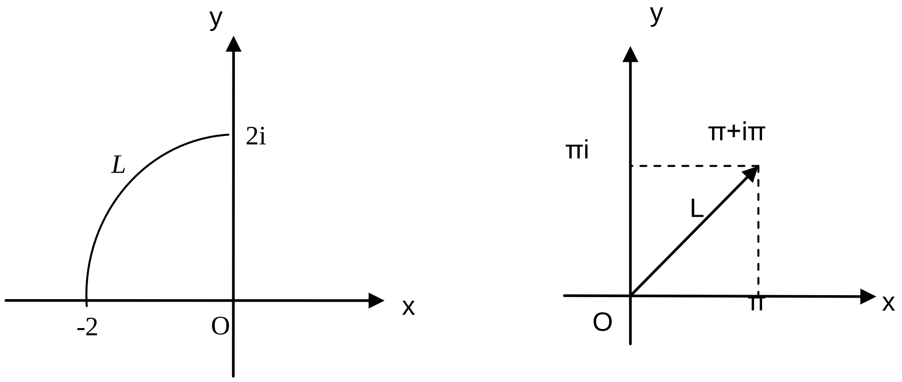

Рис.2 К примеру 2.26

Пример 2.27. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$, где $f(z)=(y+1)-xi$,

AB - отрезок прямой, соединяющий точки $z_A=1$ и $z_B=-i.$

Решение. Имеем $u=y+1,\ v=-x.$ Отсюда

$$\int\limits_{AB} f(z)dz=\int\limits_{AB}(y+1)dx+xdy-i\int\limits_{AB}xdx-(y+1)dy=$$

$$=(y+1)\cdot x\Big|_{x=1,\ y=0}^{x=0,\ y=-1}-i\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^0+i\cdot\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_0^{-1}=-1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=-1.$$

Можно поступить и иначе. Легко видеть, что $f(z)=1-iz$ и

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz=\int\limits_1^{-i}(1-iz)dz=\frac{(1-iz)^2}{-2i}\Big|_1^{-i}=\frac{\left(1+i^2\right)^2}{-2i}+\frac{(1-i)^2}{2i}=\frac{1-2i+i^2}{2i}=-1.$$

Пример 2.28. Вычислить интеграл $\int\limits_{i}^{1+i} z\,dz.$

Решение. Подынтегральная функция является аналитической. Используя формулу Ньютона–Лейбница, находим

$$\int\limits_{i}^{1+i} z\,dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{i}^{1+i} = \frac{1}{2}\left[(1+i)^2 - i^2\right] = \frac{1}{2}(1+2i-1+1) = \frac{1}{2}+i$$

2.5. Интегральная формула Коши

Если функция $\mathrm{f(z)}$ является аналитической в области G, ограниченной кусочно-гладким контуром L, и на самом контуре, то верна *интегральная формула Коши*

$$\mathrm{f(z_0)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{f(z)dz}}{\mathrm{z - z_0}} \qquad (\mathrm{z_0 \in G}),$$

где контур L обходится так, чтобы область G все время оставалась слева (обход контура против часовой стрелки).

Если функция $\mathrm{f(z)}$ аналитическая в области G и на её границе L, то для любого натурального n верна формула

$$\mathrm{f^{(n)}(z_0)} = \frac{\mathrm{n!}}{2\pi \mathrm{i}}\oint\limits_{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{f(z)dz}}{\mathrm{(z - z_0)^{n+1}}},$$

где $\mathrm{z_0 \in G,\ z \in L,\ f^{(n)}(z_0)}$ – значение n-ой производной функции $\mathrm{f(z)}$ в точке z_0.

Пример 2.29. Вычислить интеграл $\oint\limits_{L} \frac{dz}{z^2+1}$, где L – окружность радиуса R=1 с центром в точке $z = i$, причем обход контура осуществляется против часовой стрелки.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/(z+i)}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}, \quad f(z) = \frac{1}{z+i}.$$

Функция $f(z) = \frac{1}{z+i}$ является аналитической внутри рассматриваемого круга и на его границе, поэтому справедливы формулы Коши. В соответствии с последней формулой получаем

$$\oint\limits_{L} \frac{dz}{z^2+1} = \oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Пример 2.30. Вычислить интеграл $\oint\limits_{L} \frac{\sin z}{z^2}dz$, где L – любой замкнутый контур, который не проходит через точку $z = 0$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

Решение. Если точка $z = 0$ находится вне контура L, то функция $\frac{\sin z}{z^2}$ будет аналитической на контуре L и в области, ограниченной этим контуром, поэтому в соответствии с теоремой интеграл равен нулю:

$$\oint\limits_{L} \frac{\sin z}{z^2}dz = 0.$$

Если точка $z=0$ принадлежит области, ограниченной контуром L, то справедливыми будут формулы для функции $f(z)=\sin z,\ z_0=0,\ n=1.$ На основании формулы для этого случая, поскольку $f'(z)=(\sin z)'=\cos z,$ получим

$$\int_L \frac{\sin z}{z^2}dz = 2\pi i\cos 0 = 2\pi i.$$

2.6. Ряд Тейлора. Ряд Лорана

Функция $\mathrm{f}(\mathrm{z})$, однозначная и аналитическая в точке $z=z_0$, разлагается в окрестности этой точки в *ряд Тейлора*

$$\mathrm{f}(\mathrm{z})=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{C_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}},$$

коэффициенты $\mathrm{C_n}$ которого определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(n=0,1,2,\ldots),$$

где Г – окружность с центром в точке $z=z_0$, расположенная в окрестности точки z_0, в которой функция $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ аналитическая. Центр окружности круга сходимости находится в точке z_0. Функция $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ – однозначная и аналитическая в кольце $\mathrm{r}<|\mathrm{z}-\mathrm{z_0}<\mathrm{R}|$ (не исключены случаи $\mathrm{r}=0,\ \mathrm{R}=+\infty$), разлагается в этом кольце в *ряд Лорана*

$$\mathrm{f}(\mathrm{z})=\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty}\mathrm{C_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{-1}\mathrm{C_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}+\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{C_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}},$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}(n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

где Г – произвольная окружность с центром в точке z_0, расположенная внутри этого кольца.

В формуле ряд $\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{-1}\mathrm{C_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{\mathrm{C_{-n}}}{(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}}$ называется *главной частью ряда Лорана*, а ряд $\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathrm{C_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}=\mathrm{C_0}+\mathrm{C_1}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})+\mathrm{C_2}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^2+\ldots$ называется *правильной частью ряда Лорана*.

Пример 2.31. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/(2-z)$ в окрестности точки $z_0=0$.

Решение. Преобразуем эту функцию следующим образом:

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2(1-z/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

Поскольку $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\ldots \quad (|t|<1)$, то при $t=z/2$ получим

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\ldots \qquad \left(\left|\frac{z}{2}\right|<1\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right),$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\ldots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots$$

Ряд сходится при $|z/2|<1,$ или $|z|<2$.

Пример 2.32. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/(5-3z)$ в окрестности точки $z_0=1.$

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{5-3(z-1)-3}=\frac{1}{2-3(z-1)}=\frac{1}{2(1-3(z-1)/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}(z-1)}.$$

В соответствии с формулой при $t=3(z-1)/2$ получаем:

$$\frac{1}{1-\frac{3}{2}(z-1)}=1+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^3}{2^3}(z-1)^3+\ldots$$

Итак,

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3(z-1)/2}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^3}{2^3}(z-1)^3+\ldots\right],$$

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}(z-1)+\frac{3^2}{2^3}(z-1)^2+\ldots+\frac{3^n}{2^{n+1}}(z-1)^n+\ldots$$

Ряд сходится при $|3(z-1)/2|<1,$ или $|z-1|<2/3.$

Пример 2.33. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=tg\,z$ в окрестности точки $z_0=0.$

Решение. Ближайшая от начала координат особая точка функция $tg\,z$ есть $z=\pi/2$

Заметив, что $tg\,z$ - нечетная функция, поэтому в разложении будут только члены с нечётными показателями. Использовав равенство $\sin z=\cos z\cdot tg\,z$ и ряды для $\sin z$ и $\cos z$, получим:

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\left(C_1z+C_3z^3+C_5z^5+C_7z^7+\ldots\right).$$

Сравнивая коэффициенты при $z,z^3,z^5,z^7,\ldots$ в обеих частях равенства, находим:

$$1=C_1,-\frac{1}{3!}=C_3-\frac{1}{2!}C_1,\frac{1}{5!}=C_5-\frac{1}{2!}C_3+\frac{1}{4!}C_1,-\frac{1}{7!}=C_7-\frac{1}{2!}C_5+\frac{1}{4}C_3-\frac{1}{6!}C_1\ldots$$

Из этих уравнений определяем коэффициенты:

$$C_1=1,\ C_3=1/3,\ C_5=2/15,\ C_7=17/315.$$

Следовательно, $tg\,z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\ldots$

Пример 2.34. Найти первые три члена ряда Тейлора по степеням z функции $f(z)=e^{\sin z}$

Решение. Поскольку $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots$, то при $t=\sin z$ получим:

$$e^{\sin z}=1+\frac{\sin z}{1!}+\frac{\sin^2 z}{2!}+\frac{\sin^3 z}{3!}+\dots,$$

$$e^{\sin z}=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)+\frac{1}{2!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)^3+\dots=$$

$$=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)+\frac{1}{2!}z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots\right)^2+\frac{1}{3!}z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots\right)^3+\dots=$$

$$=1+z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{8}-\frac{z^5}{15}+\dots$$

Итак, $e^{\sin z}=1+z+\frac{z^2}{2}+\dots$

Пример 2.35. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана в следующих «кольцах»:1) $0<|z|<1;$ 2) $|z|>1;$ 3) $0<|z-1|<1.$

Решение. Во всех этих кольцах данная функция является аналитической, и поэтому она может быть разложена в них в соответствующий ряд Лорана. Представим эту функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

1) Поскольку $|z|<1,$ то получим:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\dots$$

Главная часть ряда Лорана здесь имеет только один член.

2) Если $|z|>1,\ mo\ |1/z|<1$ поэтому:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right),$$

$$\frac{1}{z(1-z)}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\dots$$

В этом разложении отсутствует правильная часть.

3) Если $0<|z-1|<1$ то функцию $\frac{1}{z}$ нужно разложить в геометрический ряд со знаменателем $z-1$:

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=-\frac{1}{1-z}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$$

Главная часть полученного ряда Лорана содержит только один член.

Пример 2.36. Функцию $f(z)=1/(z-1)(z-2)$ разложить в ряд Лорана, приняв $z_0=0$.

Решение. Данная функция имеет две особые точки: $z=1,\ z=2$. Следовательно, имеется три кольца с центром в точке 0, в каждом из которых функция аналитическая: 1) круг $|z|<1$; 2) кольцо $1<|z|<2$; 3) внешность круга $|z|\le 2$, т.е. $|z|>2$.

Функцию $f(z)$ разлагаем на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1};\quad \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

1) Поскольку $|z|<1,\ |z/2|<1,$ то получим:

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\ldots-\frac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots, \qquad \text{(I)}$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots \qquad \text{(II)}$$

Сложив ряды (I) и (II), найдём, что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\ldots$$

Полученный ряд является рядом Тейлора.

2) Если $1<|z|<2,$ то ряд (I) сходящийся, т.к. $(|z/2|<1)$, но ряд (II) расходится (так как $|z|>1$). Разложение (II) заменим другим:

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right). \qquad \text{(III)}$$

Ряд (III) сходится, поскольку $|z|>1$ и $|1/z|<1$.

Сложив ряды (I) и (III), получим ряд Лорана для данной функции:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\ldots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots-\frac{1}{z^n}-\ldots,$$

в котором $C_n=-1/2^{n+1}\ (n=0,1,2,\ldots),\quad C_{-n}=-1\ (n=1,2,\ldots)$.

3) Когда $|z|>2,$ то равенство (III) верно, поскольку и $|z|>1,$ то ряд в правой части формулы (I) уже будет расходящимся. Разложение (I) заменим другим:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\ldots \qquad \text{(IV)}$$

Этот ряд сходится, так как $|z|>2$ и, следовательно $|2/z|<1.$ Сложив (III) и (IV) получим разложение данной функции в ряд Лорана:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+\frac{2^3-1}{z^4}+\ldots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\ldots$$

для которого $C_n=0\ (n=0,1,2,\ldots)$, $C_{-n}=2^{n-1}-1\ (n=1,2,3\ldots)$.

Пример 2.37. Функцию $f(z)=z^4/(z-2)^2$ разложить в ряд Лорана по степеням $z-2$.

Решение. Обозначим $z-2=Z$, тогда:

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(Z+2)^4}{Z^2}=\frac{Z^4+8Z^3+24Z^2+32Z+16}{Z^2}=$$

$$=\frac{16}{Z^2}+\frac{32}{Z}+24+8Z+Z^2,$$

т.е. $\dfrac{z^4}{(z-2)^2}=\dfrac{16}{(z-2)^2}+\dfrac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2$.

Здесь главная часть ряда Лорана имеет два члена, правильная – три члена. Поскольку полученное разложение содержит только конечное количество членов, то оно справедливо для любой точки плоскости, кроме $z=2$.

Пример 2.38. Найти разложение функции $\dfrac{1}{3-z}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ в окрестности точки $z_0=1$. Указать главную и правильную части ряда и его области сходимости.

Решение. Сначала выделим выражение $(z-1)$ в знаменателе дроби $\dfrac{1}{3-z}$:

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2-(z-1)}=\frac{1}{2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.$$

Теперь воспользуемся разложением дроби $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=z$ в той области, где z «мало» (т.е. в открытом круге $q=|z|<1$).

Тогда $\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$ представим в виде ряда Лорана, сходящегося в области, где $|q|=\left|\dfrac{z-1}{2}\right|$ «мало», т.е. в открытом круге $\left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$, или $|z-1|<2$.

Отсюда:

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z-1}{2}+\ldots+\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{z-1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\ldots}_{\text{правильная часть}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Область сходимости – открытый круг $|z-1|<2$

Пример 2.39. Разложить в ряд Тейлора по степеням бинома $z-i$ функцию $f(z)=z^5$

Решение.

Находим производные функции $f(z)=z^5$: $f^{'}(z)=5z^4$, $f^{''}(z)=20z^3$, $f^{'''}(z)=60z^2$

$f^{IV}(z)=120z,\ f^{V}(z)=120,\ f^{VI}(z)=f^{VII}(z)=...=0.$

Определяем значение производных в точке $a=i$: $f(i)=i,\ f^{'}(i)=5,\ f^{''}(i)=-20i$

$f^{'''}(i)=-60,\ f^{IV}(i)=-120i,\ f^{V}(i)=120.$

Отсюда $f(z)=i+5(z-i)-10i(z-i)^2-10(z-i)^3+5i(z-i)^4+(z-i)^5.$

Рядом Тейлора функции $f(z)=z^2$ является многочлен пятой степени.

Пример 2.40. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=1/(2x-5)$ в окрестности точки $z=\infty$.

Решение. Имеем $f(z)=\dfrac{1}{2z-5}=\dfrac{1/(2x)}{1-5/2z}.$

В окрестности точки $z=\infty.$ выполнятся неравенство $|5/(2z)|<1,$ поэтому $f(z)$ можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a=1/(2z)$ и знаменателем $q=1/(5z).$

Следовательно, $f(z)=\dfrac{1}{2z}+\dfrac{5^2}{2^2z^2}+\dfrac{5^2}{2^3z^3}+\dfrac{5^3}{2^4z^4}+...,\ \textit{или}\ f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n-1}}{2^n z^n}.$

В разложении нет правильной части. Ряд сходится в области $|z|>5/2$ (вне круга расходится).

2.7. Нули функции. Особые точки

Рассмотрим функцию $\mathrm{f}(\mathrm{z})$, аналитическую в точке z_0. Точка z_0 называется *нулем функции* $\mathrm{f}(\mathrm{z})$, порядка (или кратности) n, когда выполняются условия: $\mathrm{f}(\mathrm{z}_0)=0,\ \mathrm{f}^{'}(\mathrm{z}_0)=0,...,\mathrm{f}^{(\mathrm{n}-1)}(\mathrm{z}_0)=0,\ \mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0)\neq 0.$

Если $n=1,$ то точка z_0 называется простым нулём.

Особой точкой функции $\mathrm{f}(\mathrm{z})$, называется точка z_0, в которой эта функция не является аналитической. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $\mathrm{f}(\mathrm{z})$, когда существует окрестность этой точки, в которой $\mathrm{f}(\mathrm{z})$, аналитическая всюду, кроме z_0.

Особая точка z_0 функции f(z) называется *устранимой*, когда существует конечный предел этой функции в данной точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(z)=c.$

Точка z_0 называется *полюсом функции* f(z), когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(z)=\infty.$ Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Точку z_0 называют *полюсом порядка* $n(n\ge 1)$ функции $f(z)$, когда эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. В случае $n=1$ полюс называют *простым*.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было привести к виду $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$- функция, аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\ne 0$.

Точка z_0 называется существенно особой точкой функции f(z), когда в ней функция f(z) не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Пример 2.41. Доказать, что точка $z_0=0$ является нулём второго порядка для функции $f(z)=1-\cos z.$

Решение. Разложим в ряды данную функцию и её первую и вторую производные:

$$f(z)=1-\cos z=1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right),$$

$$f(z)=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\ldots,\quad f'(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

$$f''(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots$$

Поскольку $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)\ne 0,$ то $z_0=0$ - нуль второго порядка для функции $f(z)=1-\cos z.$

Пример 2.42. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=z^7/(z-\sin z)$.

Решение. Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора, получим:

$$f(z)=\frac{z^7}{z-\sin z}=\frac{z^7}{z-\left(z-z^3/3!+z^5/5!-\ldots\right)}=\frac{z^7}{z^3/3!-z^5/5!+\ldots},$$

$$f(z)=z^4\cdot\frac{1}{1/3!-z^2/5!+\ldots};\ f(z)=z^4\varphi(z),\ \varphi(z)=\frac{1}{1/3!-z^2/5!+\ldots}$$

Таким образом, функция $f(z)$ записана в виде, где $\varphi(z)$- функция, аналитическая в точке $z_0=0,$ причем $\varphi(0)=6\ne 0.$ Значит, точка $z_0=0$ - нуль четвертого порядка для данной функции.

Пример 2.43. Найти нули функции $f(z)=(z^2+1)^3\sin z$ и определить их порядки.

Решение. Когда $f(z)=0$ или $(z^2+1)^3 \sin z=0$, то $z^2+1=0$ либо $\sin z=0$. Из первого равенства следует, что $z=-i,\ z=i$, а из второго, что $z=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$.

Пусть $z=-i$, тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде: $f(z)=(z+i)^3\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)=(z-1)^3\sin z$ является аналитической в точке $z=-i$, причем $\varphi(-i)=-8i\sin i=8sh1\neq 0$. Значит, точка $z=-i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что $z=i$ – нуль третьего порядка. Функция $\sin z$ имеет нули $z=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$.

Действительно, $\sin z=(-1)^k\sin(z-k\pi)=(-1)^k\left[(z-k\pi)-\frac{(z-k\pi)^3}{3!}+\frac{(z-k\pi)^5}{5!}-...\right]$. Это нули первого порядка для функции $f(z)=(z^2+1)^3\sin z$: $f(k\pi)=0$, но $f'(k\pi)\neq 0$, *ибо* $f'(z)=6z(z^2+1)^2\sin z+(z^2+1)^3\cos z$.

Пример 2.44. Доказать, что точка $z_0=0$ для функции $f(z)=(e^x-1)/z$ является устранимой особой точкой.

Решение.

Действительно, поскольку $e^x=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...,\qquad \frac{e^x-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...,$

$\lim\limits_{x\to0} f(z)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{z}=1,\ mo\ z_0=0$ - устранимая особая точка.

Пример 2.45. Найти полюсы функции $f(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

Решение. Так как для функции $\varphi(z)=1/f(z)=(z^2-1)(z^2+1)^2/z$ точки $z_1=-1,\ z_2=1$ - нули первого порядка, $z_3=-i,\ z_4=i$ - нули второго порядка, то для функции $f(z)$ точки ±1 - полюсы первого порядка, точки $\pm i$ полюсы второго порядка.

Пример 2.46. Исследовать особые точки функции $f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$.

Решение.

Поскольку $z^3+z^2-z-1=z^2(z+1)-(z+1)=(z+1)(z^2-1)=(z+1)^2\times(z-1)$, то функция имеет особые точки $z=-1,\ z=1$. Исследуем точку $z=-1$. Функцию $f(z)$ приведём к виду $f(z)=\frac{\sin z/(z-1)}{(z+1)^2}$, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2}$, $\varphi(z)=\frac{\sin z}{z-1}$, где $\varphi(z)$- функция, аналитическая в окрестности тоски $z=-1$, причём $\varphi(-1)=\frac{\sin(-1)}{-2}\neq 0$. Следовательно, точка $z=-1$ является полюсом второго порядка.

Аналогично, записав функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\frac{\sin z/(z+1)^2}{z-1}$, $f(z)=\frac{\varphi_1(z)}{z-1}$, $\varphi_1(z)=\frac{\sin z}{(z+1)^2}$, заключаем, что $z=1$ - простой полюс данной функции.

Пример 2.47. Найти особые точки функции $f(z)=e^{1/z}$ и определить их типы.

Решение. Принимая во внимание, что $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}+...,$ при $t=1/z$ получим $e^{1/z}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+...+\frac{1}{n!z^n}+...$

Этот ряд сходится всюду, кроме точки $z=0.$ Его можно рассматривать как разложение функции $e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0.$ Поскольку главная часть ряда имеет бесконечное множество членов, то точка $z=0.$ является существенно особой точкой для функции $e^{1/z}$.

2.8. Вычеты функций

Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$, в изолированной особой точке z_0 называется число, которое обозначают через $res\,f(z_0)$ и определяют формулой $res\,f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, где интеграл взят в положительном направлении по контуру γ. Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени лорановском разложении функции $f(z)$, в окрестности точки z_0:

$$res\,f(z_0)=C_{-1}.$$

Вычет функции в устранимой особой точке равен нулю.

Если z_0 — полюс n-го порядка функции $f(z)$,, то

$$\mathrm{res}\,f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{f(z)(z-z_0)^n\right\}.$$

В случае простого полюса (n=1)

$$\mathrm{res}\,f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$$

Если z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$,, то для нахождения $\mathrm{res}\,f(z_0)$ необходимо найти коэффициент C_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$, в окрестности точки z_0; это и будет $\mathrm{res}\,f(z_0)$.

Теорема. Если функция $f(z)$ является аналитической на границе Г области G и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1,z_2,...,z_n$, то $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{res}\,f(z_k)$.

Функция f(z) является *аналитической в бесконечно удаленной точке* $z=\infty$, если функция $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична в точке $\xi=0$.

Пусть функция f(z) аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z=\infty$).

*Теорема***.** Если $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$,, то её лорановское разложение в окрестности данной точки не содержит положительных степеней z; когда $z=\infty$ — полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z, в случае существенно особой точки – бесконечное множество положительных степеней z.

Вычетом функции f(z) в бесконечности называется величина $\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – окружность достаточно большого радиуса $|z|=\rho$, которую точка z проходит по часовой стрелке (при этом окрестность точки $z=\infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z=z_0$).

Теорема. Если функция f(z) имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то сумма всех её вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю: $\operatorname{res} f(\infty)+\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)=0,$

Пример 2.48. Найти вычет функции $f(z)=\frac{z+1}{z^2}$.

Решение. Данную функцию можно записать как $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ и рассматривать эту сумму как разложение в ряд Лорана по степеням z, для которого C_{-1}=1. В соответствии с формулой находим, что $res\ f(0)=1$ (z_0 =0 – особая точка).

Замечание. Вычет можно найти и с помощью другой формулы. Поскольку z_0=0 – полюс второго порядка, то:

$$rez\ f(0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d(((z+1)/z^2)\cdot z^2}{dz}=\lim_{z\to 0}\frac{d(z+1)}{dz}=1.$$

Пример 2.49. Найти вычеты функции $f(z)=\frac{z}{(z-2)(z-4)}$.

Решение. Эта функция имеет два простых полюса: $z=2$ и $z=4$. Находим:

$$res\ f(2)=\lim_{z\to 2}\frac{z}{(z-2)(z-4)}\cdot(z-2)=\lim_{z\to 2}\frac{z}{z-4}=\frac{2}{2-4}=-1,$$

$$res\ f(4)=\lim_{z\to 4}\frac{z(z-4)}{(z-2)(z-4)}=\lim_{z\to 4}\frac{z}{z-2}=\frac{4}{4-2}=2.$$

Пример 2.50. Найти вычет функции $f(z)=\frac{z^2}{(z-1)^3}$.

Решение. Поскольку z_0=1 – полюс третьего порядка, то получаем:

$$res\ f(1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2((z^2/(z-1)^3)\cdot(z-1)^3)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.$$

Пример 2.51. Найти вычет функции $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}$.

Решение. Точка $z_0=1$ является единственной конечной особой точкой функции $f(z)$. Чтобы найти $res\ f(1)$, разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$; при этом используем ряд Тейлора для $\cos t$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots$$

При $t = 1/(z-1)$ это разложение принимает следующий вид:

$$f(z) = z^2 \cdot \cos\frac{1}{z-1} = [1 + (z-1)]^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \ldots\right] =$$

$$= \left[1 + 2(z-1) + (z-1)^2\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \ldots\right].$$

Нас интересует только коэффициент при $1/(z-1)$. Соответствующий член ряда имеет вид $2(z-1) \cdot \left(\frac{-1}{2!(z-1)^2}\right) = \frac{-1}{z-1}$. Значит, C_{-1}=1, поэтому $res\ f(1)$ =C_{-1}= – 1.

Пример 2.52. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{ln(z+2)}{z^2} dz$, где γ – окружность $|z| = 1/2$, которую точка z проходит в положительном направлении.

Решение. В круге $|z| \le 1/2$ содержится только одна особая точка подынтегральной функции – это полюс второго порядка $z = 0$. Найдем вычет функции $f(z)$ в точке $z = 0$:

$$res\ f(0) = \lim_{z \to 0}\left[z^2 \frac{\ln(z+2)}{z^2}\right]' = \lim_{z \to 0}[\ln(z+2)]' = \lim_{z \to 0}\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}.$$

Тогда получаем:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{ln(z+2)}{z^2}dz, \oint\limits_{\gamma}\frac{ln(z+2)}{z^2}dz = \pi i$$

Пример 2.53. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$ в следующих случаях:

1) γ – окружность $|z| = 1$; 2) γ – окружность $|z| = 3$; 3) γ – окружность $|z| = 5$.

Решение. Найдем вычеты функции $f(z) = 1/z(z+2)(z+4)$ относительно простых полюсов $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = -4$:

$$res\ f(0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0}\frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{8},$$

$$res\ f(-2) = \lim_{z \to -2}(z+2) f(z) = \lim_{z \to -2}\frac{1}{z(z+4)} = -\frac{1}{4},$$

$$res\ f(-4) = \lim_{z \to -4}(z+4) f(z) = \lim_{z \to -4}\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{8}.$$

1) В области, ограниченной окружностью $|z| = 1$, находится только один полюс $z = 0$, поэтому $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}$.

2) Окружность $|z| = 3$ ограничивает область, которая содержит полюсы $z_1 = 0$ и $z_2 = -2$, тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{4}$.

3) Внутри области, ограниченной контуром $|z| = 5$, находятся три полюса: $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = -4$, поэтому $\int\limits_{\lambda} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0.$

Пример 2.54. Найти $\int\limits_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$ где γ - замкнутый контур, внутри которого находятся полюсы $z = 1,\ z = 2,\ z = 3.$

Решение. Определим вычеты подынтегральной функции:

$$\underset{1}{res}\ f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{(z-2)(z-3)} = 1,\ \underset{2}{res}\ f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{z+1}{(z-1)(z-3)} = -3,\ \underset{3}{res}\ f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = 2.$$

Следовательно, $\int\limits_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz = 2\pi i(1-3+2) = 0.$

Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

В данных методических материалах рассматриваются темы в объеме рабочей программы по дисциплине «Теория функций комплексного переменного», позволяющие самостоятельно выполнить контрольные задания.

Выполнению работы должны предшествовать ознакомление с соответствующими разделами курса рекомендуемой литературы и лекциями.

При подготовке к контрольным работам необходимо рассмотреть теоретический материал и разобрать примеры решения задач из пункта Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям.

Аудиторные контрольные работы по дисциплине
«Теория функции комплексного переменного»

Аудиторные и домашние контрольные работы

1.
1. Составить квадратное уравнение
   $X^2+2x+5=0$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   5x–2y+(x+y)i=4+5i
3. Выполнить действия
   а) $\frac{17-6i}{3-4i}$ б) $(1-i)^3$ в) $i^{40} - i^{21}$

2.
1. Составить квадратное уравнение по его корням
   $x_1 = 1 + i\sqrt{3};\quad x_2 = 1 - i\sqrt{3};$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   5xi–2+4y=9i+2x+3yi

3. Выполнить действия

а) $\frac{4-3i}{2+i}$ б) $(1+i)^3$ в) i^3-i^{100}

3.

1. Решить квадратное уравнение
   X^2-6x+18=0
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   9+2xi+4yi=10i+5x-6y
3. Выполнить действия

   а) $\frac{i*17}{3+i*5}$ б) $(1+i)^4$ в) $i-i^{33}$

4.

1. Решить квадратное уравнение
   X^2-4x+5=0
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   2xi+3yi+17=3x+2y+18i
3. Выполнить действия

   а) $\frac{i*5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$ б) $(1-i)^4$ в) $i^{17}+i(1-i)$

5.

1. Составить квадратное уравнение по его корням
   $x_1=3-i;\ \ x_2=3+i;$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   4x-5y-9+7(3x-y)i=10x+14yi
3. Выполнить действия

   а) $\frac{i*3}{\sqrt{2}+i}$ б) $(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ в) $i^8(1-i^3)$

6.

1. Решить квадратное уравнение
   X^2-10x+41=0
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   3+4xi+5yi=12i+5x-2y
3. Выполнить действия

   а) $\frac{i*2}{1+i}$ б) $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})^2$ в) $i(1-i^{23})$

7.

1. Составить квадратное уравнение по его корням
   $x_1=\frac{1-i*3}{2}\quad x_2=\frac{1+i*3}{2}$
2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   x(2+i)-y(1-i)=1+3i
3. Выполнить действия

   а) $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$ б) $(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ в) $\frac{i^{4n+3}+i^{15}}{2+i^{17}}$

8.

1. Составить квадратное уравнение по его корням

$x_1 = \frac{1}{5}(2 - i*3)$ $x_2 = \frac{1}{5}(2 + i*3)$

2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел
   x(1+i)-y(2+i)= 3i+1
3. Выполнить действия
   а) $\frac{-\sqrt{3}+i^{39}}{i^{20}}$ б) $(-1+i\sqrt{3})^6$ в) $\frac{i^8+3i^{11}}{1+2i^{19}}$

Ответы к заданию

1. *1.* -1-2i; -1+2i. *2*. x=2; y=3. *3. а)* 3+i*2; *б)* -2(1+i); *в)* 1-i. **2.** *1.* x^2-2x+4=0. *2*. x=3; y=2. *3. а)* 1-i*2; *б)* 2(1-i); *в)* -1-i. **3.** *1.* 3+3i; -3-3i. *2*. x=3; y=1. *3. а)* $\frac{1}{2}(5-i*3)$; *б)-4*; *в)* 2i. **4.** *1.* 2+i; 2-i. *2*. x=3; y=4. *3. а)* $-\sqrt{3}+i\sqrt{2}$; *б)-4*; *в)* 21+i*2. **5.** *1.* x^2-6x+10=0. *2*. x=y=-9,3. *3. а)* $1+i*\sqrt{2}$; *б)* $-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$; *в)* 1+i. **6.** *1.* 5+i*4; 5-i*4. *2*. x=$1\frac{2}{11}$; y=$1\frac{5}{11}$. *3. а)* i+1; *б)* -1+i*$2\sqrt{6}$; *в)* -1+i. **7.** *1.* $2x^2$-2x+5=0. *2*. x=$1\frac{1}{3}$; y=$1\frac{2}{3}$. *3. а)* $\frac{1}{5}(1+i*2\sqrt{6})$; *б)* 1; *в)* $-\frac{2}{5}(1+2i)$. **8.** *1.* $25x^2$-20x+13=0 *2*. x=5; y=-2. *3. а)* $-\sqrt{3}-i$; *б)* 64; *в)* -1+i.

1.

1. Составить квадратное уравнение по его корням
   X_1=5-i*3 X_2=5-i*3
2. Выполнить действия
   (2+i)+(-3-i)-(4-i*3) $\frac{5+i*3}{5-i*3}$
3. Построить слагаемые
   Z_1=-2+i z_2=2-i*3
4. Выполнить действия
   $\left(\cos 12^\circ + i*\sin 12^\circ\right)^{45}$ $\left(2e^{-i5\pi/8}\right)^8$
5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме
   $z = \frac{1-i}{e^{-i*3\pi/4}}$

2.

1. Решить квадратное уравнение
   X^2-6x+34=0
2. Выполнить действия
   (3+i*5) (3-i*5)(-2+i)
3. Построить комплексные числа
   Z_1=2-i*3 z_2=1+i*2
4. Выполнить действия
   $\frac{-1+i\sqrt{3}}{e^{-i*\pi/3}}$ $(2(\cos\frac{\pi}{3}+i*\sin\frac{\pi}{6}))^{-6}$
5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме
   $\frac{-1+i\sqrt{3}}{e^{-i*\pi/3}}$ $\frac{-2i}{e^{i*\pi/2}}$

3.

1. Построить комплексные числа
   Z_1=-1+2*i Z_2=4i

2. Построить слагаемые
Z_1=-3-i Z_2=1-4i
И их сумму
3. Перевести в показательную форму
$1/2-\sqrt{3}/(2i)$ $3(\cos(\pi/3)+i*\sin(\pi/3))$
4. Выполнить действия
$\frac{e^{-i*\pi/2}}{(-\sqrt{3}+i)^3}$ $\frac{12e^{-i*\pi/3}}{(1+\sqrt{3}i)^2}$ $\frac{(1+i)^4}{e^{-i*\pi/2}}$

4.

1. Построить комплексные числа
Z_1=-2-3*i Z_2=-4
А так же им сопряженные и противоположные
2. Построить уменьшаемое Z_1=4-i вычитаемое Z_2=-2-2i и их разность
3. Перевести в показательную форму
$-1/4+1/(4i)$ $3(\cos(3\pi/4)+i*\sin(3\pi/4))$
4. Выполнить действия
$\frac{i*e^{i*\pi/3}}{(\sqrt{3}+i)^4}$ $\frac{(1+i)}{\sqrt{2}e^{-i*\pi/4}}$ $\frac{18e^{i*\pi/2}}{(1-\sqrt{3}i)^2}$

5.

1. Составить квадратное уравнение по его корням
X_1=5-i*3 X_2=5-i*3
2. Выполнить действия
(2+i)+(-3-i)-(4-i*3) $\frac{5+i*3}{5-i*3}$
3. Построить слагаемые
Z_1=-2+i z_2=2-i*3
4. Выполнить действия
$\left(\cos 12^\circ+i*\sin 12^\circ\right)^{45}$ $\left(2e^{-i5\pi/8}\right)^8$
5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме
$z=\frac{1-i}{e^{-i*3\pi/4}}$

6.

1. Решить квадратное уравнение
X^2-6x+34=0
2. Выполнить действия
(3+i*5) (3-i*5)(-2+i)
3. Построить комплексные числа
Z_1=2-i*3 z_2=1+i*2
4. Выполнить действия
$\frac{-1+i\sqrt{3}}{e^{-i*\pi/3}}$ $(2(\cos\frac{\pi}{3}+i*\sin\frac{\pi}{6}))^{-6}$
5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме
$\frac{-1+i\sqrt{3}}{e^{-i*\pi/3}}$ $\frac{-2i}{e^{i*\pi/2}}$

7.

1. Построить комплексные числа
Z_1=-1+2*i Z_2=4i
2. Построить слагаемые

Z_1=-3-i Z_2=1-4i
И их сумму
3. Перевести в показательную форму
$1/2-\sqrt{3}/(2i)$ $3(\cos(\pi/3)+i*\sin(\pi/3))$
4. Выполнить действия
$\frac{e^{-i*\pi/2}}{(-\sqrt{3}+i)^3}$ $\frac{12e^{-i*\pi/3}}{(1+\sqrt{3}i)^2}$ $\frac{(1+i)^4}{e^{-i*\pi/2}}$

8.

1. Построить комплексные числа
Z_1=-2-3*i Z_2=-4
А так же им сопряженные и противоположные
2. Построить уменьшаемое Z_1=4-i вычитаемое Z_2=-2-2i и их разность
3. Перевести в показательную форму
$-1/4+1/(4i)$ $3(\cos(3\pi/4)+i*\sin(3\pi/4))$
4. Выполнить действия
$\frac{i*e^{i*\pi/3}}{(\sqrt{3}+i)^4}$ $\frac{(1+i)}{\sqrt{2}e^{-i*\pi/4}}$ $\frac{18e^{i*\pi/2}}{(1-\sqrt{3}i)^2}$.

Индивидуальное домашнее задание

1. Для данных функций найти их действительную часть u(x,y) и мнимую часть v(x,y):
1.1 z; 1.2 iz; 1.3 z^3; 1.4 $z+\bar{z}$; 1.5 ($(\bar{z})^2$.
2. Для данных функций f(z), где $z=re^{i\varphi}$, найти $|f(z)|$ и $\operatorname{Arg} f(z)$:
2.1 $f(z)=z^2$; 2.2 $f(z)=\frac{1}{z}$; 2.3 $f(z)=e^z$; 2.4 $\frac{z}{|z|}$.
3. Указать область дифференцируемости функции и вычислить производную.
3.1 $f(z)=\bar{z}$; 3.2 $f(z)=\frac{1}{z}$; 3.3 $f(z)=i\bar{z}$; 3.4 $f(z)=z+2i$.
4. Вычислить интеграл $\int\limits_l \operatorname{Im} z dz$, где l:
4.1 отрезок прямой от точки 0 до точки 1+2i;
4.2 дуга параболы $y=2x^2$ от точки 0 до точки 1+2i;
4.3 вычислить интеграл $\int (i\bar{z}+z^2)dz$, где l – часть окружности $|z|=2, \arg z\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$;
4.4 вычислить интеграл $\int\limits_l \sin z dz$, где l – отрезок прямой от точки 0 до точки $\pi+i\pi$.
5. Найти разложение функции $\frac{1}{z^2}\sin z$ в ряд Лорана:
а) в особой точке $z_0=0$; б) в особой точке ∞.
Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

Задания для самостоятельной работы

1.Представить в тригонометрической форме комплексные числа.

1.1. а) $2+4i$; б) $\sqrt{3}-i$; в) 2001; 1.2. а) $3-2i$; б) $\sqrt{5}+i$; в) 2002;
1.3. а) $1+2i$; б) $2-i$; в) $3-2i$; 1.4. а) $1-i$; б) $-3+2i$; в) $5+i$;
1.5. а) $2-i$; б) $3+4i$; в) $z-3i$; 1.6. а) $5+i$; б) $1-3i$; в) $2+i$;
1.7. а) $z+i$; б) $z+1$; в) $4-3i$; 1.8. а) $z-3i$; б) $1+3i$; в) $3-2i$;
1.9. а) $-2+i$; б) $1+i$; в) $1+2i$; 1.10. а) $4-3i$; б) $2+i$; в) $5-i$.

2. Найти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$, если:

2.1. $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$; 2.2. $z_1=1-i$, $z_2=-3+2i$;
2.3. $z_1=2-i$, $z_2=3+4i$; 2.4. $z_1=5+i$, $z_2=1-3i$;
2.5. $z_1=z+i$, $z_2=z+1$; 2.6. $z_1=z-3i$, $z_2=1+3i$;
2.7. $z_1=-2+i$, $z_2=1+i$; 2.8. $z_1=4-3i$, $z_2=2+i$;
2.9. $z_1=2+3i$, $z_2=5-i$; 2.10. $z_1=2i-1$, $z_2=2i+1$.

3. Возвести в степень комплексное число:

3.1. $(i^8+3)^5$, $(1-i^3)^3$; 3.2. $(1+i^5)^4$, $(-3+i)^5$;
3.3. $(2+3i^2)^3$, $(4-2i^3)^2$; 3.4. $(3-i^5)^2$, $(1+2i^3)^2$;
3.5. $(i^4+3)^3$, $(-1+i)^5$; 3.6. $(1+i^7)^{10}$, $(\sqrt{3}+i)^3$;
3.7. $(\sqrt{3}-i^3)^2$, $(1+i^3\sqrt{3})^2$; 3.8. $(-1+i\sqrt{3})^7$, $(1+2i^3)^3$;
3.9. $(2-i^7)^5$, $(2+i^3)^4$; 3.10. $(1+2i^5)^3$, $(1-2i^3)^6$.

4. Найти все значения корня.

4.1. $\sqrt[3]{-i}$; 4.2. $\sqrt[5]{1-i}$; 4.3. $\sqrt[3]{-1}$; 4.4. $\sqrt[3]{1}$; 4.5. $\sqrt[6]{i}$;
4.6. $\sqrt{i}$; 4.7. $\sqrt{1+i}$; 4.8. $\sqrt[3]{-1+i}$; 4.9. $\sqrt[4]{-i}$; 4.10. $\sqrt[3]{1+i}$.

5.Найти значение функции:

5.1. Дана функция $f(z)=\dfrac{1}{x-iy}$, где $z=x+iy$. Найти её значение $f(i+1)$.

5.2. Дана функция $f(z)=\dfrac{1}{x-iy}$, где $z=x+iy$. Найти её значение $f(i)$.

5.3. Дана функция $f(z)=\dfrac{1}{x-iy}$, где $z=x+iy$. Найти её значение $f(3-2i)$.

5.4. Дана функция $f(z)=x^2+iy^2$, где $z=x+iy$. Найти её значение $f(1+2i)$.

5.5. Дана функция $f(z)=x^2+iy^2$, где $z=x+iy$. Найти её значение $f(2-3i)$.

5.6. Дана функция $f(z)=x^2+iy^2$, где $z=x+iy$. Найти её значение $f(-i)$.

5.7. Вычислить значение функции $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$ в точке $z_0=-2+i$.

5.8. Вычислить значение функции $f(z)$ в точках z_1 и z_2: $f(z)=z^2-2z+i$, $z_1=-2+3i$, $z_2=4-3i$.

5.9. Вычислить значение функции $f(z)$ в точках z_1 и z_2: $f(z)=z^2+i$, $z_1=1-i$, $z_2=\dfrac{i}{2}$.

5.10. Вычислить значение функции $f(z)$ в точках z_1 и z_2: $f(z)=z^2-2z+i$, $z_1=1-i$, $z_2=1+i$.

6. Найти:

6.1. $e^{\pi i}$. 6.2. $e^{\frac{\pi i}{2}}$. 6.3. $\cos i$. 6.4. $\sin(1+2i)$. 6.5. $\ln(-1)$.

6.6. $Ln(-1)$. 6.7. $\ln i$. 6.8. Lni. 6.9. $\ln(3+4i)$. 6.10. $Ln(3+4i)$.

7. Определить, дифференцируема ли функция $f(z)$. Если да, то найти её производную.

7.1. $f(z)=(x^2+y^2)-2xyi$; 7.2. $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$;

7.3. $f(z)=iz^2-3z+1$; 7.4. $f(z)=z+2i$;

7.5. $f(z)=z^6$; 7.6. $f(z)=\dfrac{1}{z^3}$;

7.7. $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}$; 7.8. $f(z)=ax^2+2bxy+cy^2$;

7.9. $f(z)=z^2+2i$; 7.10. $f(z)=z^2-z+i$.

8. Вычислить интеграл.

8.1. $\int z^2dz$, где AB – отрезок прямой, соединяющей точки $z_A=1$, $z_B=i$.

8.2. $\oint\limits_l \dfrac{z^2dz}{z+i}$ по замкнутой кривой $l:|z|=\dfrac{1}{2}$.

8.3. $\oint\limits_l \dfrac{z^2dz}{z+i}$ по замкнутой кривой $l:|z+i|=1$.

8.4. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{(z+2)^3\cdot z}$ по замкнутой кривой $l:|z-2|=1$.

8.5. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{(z+2)^3\cdot z}$ по замкнутой кривой $l:|z|=1$.

8.6. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{(z+2)^3\cdot z}$ по замкнутой кривой $l:|z+2|=1$.

8.7. $\int\limits_l \bar{z}\,dz$, где l – отрезок действительной оси от точки $z=-1$ до точки $z=1$.

8.8. $\int\limits_l \bar{z}\,dz$, где l – верхняя окружность $|z|=1$ от точки $z=-1$ до точки $z=1$.

8.9. $\int\limits_l (1+i-2\bar{z})dz$, где l – отрезок прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

8.10. $\int\limits_l \dfrac{dz}{z-a}$, где l – окружность радиуса r с центром в точке a.

9. Найти разложение функции в ряд Лорана в точке z_0 по степеням $z-z_0$.

9.1. $\dfrac{1}{z}\cos z$, где $z_0=0$. 9.2. $z\cdot\sin z$, где $z_0=0$.

9.3. $z\cdot\sin z$, где $z_0=\infty$. 9.4. $\sin(2+z)$, где $z_0=0$.

9.5. $\frac{2}{z-1}$, где $z_0=1$.

9.6. $\frac{z}{z-1}$, где $z_0=1$.

9.7. $\frac{2}{z+2}$, где $z_0=0$.

9.8. $e^{\frac{1}{z+1}}$, где $z_0=-1$.

9.9. $e^{\frac{1}{z+1}}$, где $z_0=\infty$.

9.10 $\frac{z}{z-2}$, где $z_0=2$.

10. Найти вычет функции.

10.1. $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$.

10.2. $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}$.

10.3. $f(z)=\frac{z+1}{z^2}$.

10.4. $f(z)=\frac{z-1}{(z+1)(z-2i)}$.

10.5. $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$.

10.6. $f(z)=\frac{z-1}{(z-2i)}$.

10.7. $f(z)=\frac{z}{(z+3i)}$.

10.8. $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

10.9. $f(z)=\frac{1}{z^2-9}$.

10.10. $f(z)=\frac{z}{\sin z}$.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Готовиться к экзамену необходимо последовательно, с учетом контрольных вопросов, разработанных ведущим преподавателем кафедры. Сначала следует определить место каждого контрольного вопроса в соответствующем разделе темы учебной программы, а затем внимательно прочитать и осмыслить рекомендованные научные работы, соответствующие разделы рекомендованных учебников. При этом полезно делать хотя бы самые краткие выписки и заметки. Работу над темой можно считать завершенной, если вы сможете ответить на все контрольные вопросы и дать определение понятий по изучаемой теме.

Для обеспечения полноты ответа на контрольные вопросы и лучшего запоминания теоретического материала рекомендуется составлять план ответа на контрольный вопрос. Это позволит сэкономить время для подготовки непосредственно перед экзаменом за счет обращения не к литературе, а к своим записям.

При подготовке необходимо выявлять наиболее сложные вопросы, с тем, чтобы обсудить их с преподавателем на лекциях и консультациях.

Нельзя ограничивать подготовку к экзамену простым повторением изученного материала. Необходимо углубить и расширить ранее приобретенные знания за счет новых идей и положений.