МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
## Геометрия

**Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

**Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины**

### Тема. Понятие вектора. Равенство векторов

**План**

1. *Разные подходы к понятию вектора.*
2. *Ориентация вектора, лежащего на оси.*
3. *Равенство векторов.*
4. *Свободные и закреплённые векторы.*

К понятию вектора существует два подхода: алгебраический (аксиоматический) и геометрический. В алгебре понятие вектора является основным (неопределяемым). Свойства векторов и операций над ними описываются известной системой аксиом векторного пространства.

В геометрии вектор определяется через понятие направленного отрезка.

***Определение.*** ***Направленным отрезком*** называется отрезок, у которого указан порядок концов. Два направленных отрезка называются ***эквиполентными***, если их длины равны, они параллельны и одинаково направлены.

***Вектором*** называется класс эквиполентных направленных отрезков.

Каждый отрезок, входящий в этот класс, называется ***представителем вектора***.

***Определение.*** *Длиной* (или **модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

Модуль нулевого вектора равен нулю: $|\vec{0}| = 0$. Более того, нулевой вектор является нулевым элементом относительно сложения векторов.

***Определение.*** Вектор $\vec{b}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$, если:

1) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, т.е. они имеют противоположные направления;

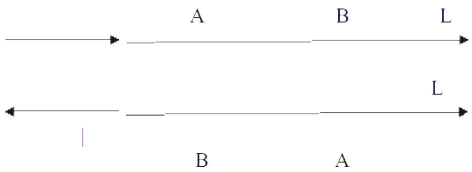
2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ – имеют равные модули.

Обозначение. Вектор противоположный вектору $\vec{a}$ обозначается $-\vec{a}$.

***Определение.*** Два вектора называются ***равными***, если они могут быть совмещены (при совпадении направлений) путём параллельного переноса, т.е. если они параллельны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины.

*Ориентация вектора, лежащего на оси. Сонаправленные и противоположно направленные векторы.*

Пусть L произвольная ось и вектор $\overrightarrow{AB}$, лежит на оси L. Может быть два случая:




В первом случае начало вектора – точка A предшествует концу вектора, точке B, а во втором случае наоборот, начало вектора следует за его концом.

***Определение.*** Вектор, лежащий на оси, называется *сонаправленным* с осью, если его начало предшествует его концу (конец вектора следует за его началом).

В противном случае говорят, что вектор и ось имеют противоположные направления.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с осью L, то этот факт мы будем обозначать так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow L$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось L имеют противоположные направления, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow L$.

***Определение.*** Вектор $\overrightarrow{AB}$, лежащий на оси L, называется *правоориентированным*, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow L$ и называется *левоориентированным*, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow L$.

На первом рисунке вектор $\overrightarrow{AB}$ правоориентирован на оси L, а на втором рисунке – левоориентирован.

***Определение.*** Два вектора, лежащие на одной прямой называются *сонаправленными*, если при любом выборе положительного направления на этой прямой оба вектора будут иметь одинаковую ориентацию. В противном случае векторы называются *противоположно направленными*.

Обозначение. $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$ – векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправленные, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$ – векторы и $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления (противоположно направлены).

Пусть теперь два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых. Тогда обе прямые лежат в одной плоскости. Проведем секущую АС (Через начала векторов). При этом возможны два случая. Секущая АС, проведенная через начала обоих векторов делит плоскость, в которой лежат обе параллельные прямые a и b, на две полуплоскости. В первом случае концы векторов лежат в одной полуплоскости, а во втором случае – в разных полуплоскостях.

***<u>Определение</u>***. Два вектора, лежащие на параллельных прямых, называются *сонаправленными*, если их концы лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проведенной через их начала.

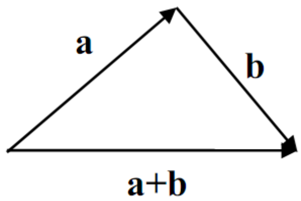
В противном случае говорят, что векторы имеют *противоположные направления* (*противоположно направлены*).

***<u>Определение</u>***. Пусть a и b две параллельные оси. На каждой оси возьмем по одному правоориентированному вектору. Если эти векторы сонаправленные, то данные оси называются *сонаправленными*. В противном случае говорят, что оси имеют *противоположные направления*.

Обозначения для сонаправленных и противоположно направленных осей такое же, как и для векторов.

В физике часто рассматриваются *закреплённые векторы*, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление в любую точку пространства. В этом случае вектор называется *свободным*. Мы договоримся рассматривать только ***свободные векторы***.

***Сложение векторов*** определяется по правилу треугольника. Затем доказывается , что сумма не зависит от выбора представителей векторов.




***Произведением вектора а на число*** $\lambda$ называется вектор $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, такой что $|\mathbf{b}|=|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, если $\lambda>0$, и $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$, если $\lambda<0$. В школе геометрически доказываются теоремы (свойства операций):

1). $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
2). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
3). $(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$
4). $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$
5). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\alpha=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$

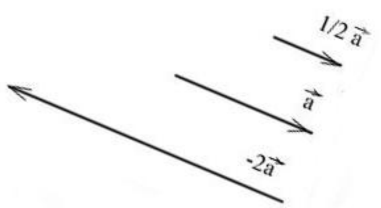
## Тема. Операции над векторами

### План

1. *Линейные операции над геометрическими векторами.*
2. *Проекция вектора на ось.*
3. *Векторы в пространстве.*
4. *Теорема о разложении вектора по ортам координатных осей.*

5. Условие коллинеарности векторов в координатах.
6. Операции над векторами, заданными в координатной форме.

Рис. 2




***Произведение вектора на число***

**Определение.** *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* $\lambda$ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda| > 1$) или сжатием (при $|\lambda| > 1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$. (Рис. 2)

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением

$\vec{b} = \lambda\vec{a}$. (1)

Следовательно, равенство (1) выражает условие коллинеарности двух векторов.

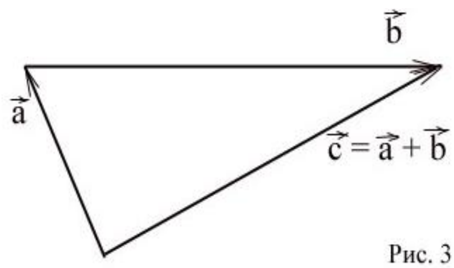



Рис. 3

***Сумма векторов***

**Определение.** *Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 3):

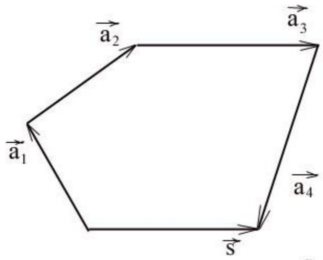



Рис. 4

Это определение может быть распределено на любое конечное число векторов. Пусть в пространстве даны *n* свободных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Если к концу вектора $\vec{a}_1$ приложить начало вектора $\vec{a}_2$, а к концу вектора $\vec{a}_2$ - начало вектора $\vec{a}_3$ и т.д. и, наконец, к концу вектора $\vec{a}_{n-1}$ – начало вектора $\vec{a}_n$, то суммой этих векторов служит замыкающий вектор $\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}_1$, а конец - с концом последнего вектора $\vec{a}_n$. (Рис. 4)

**Определение.** Слагаемые $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называются составляющими вектора $\vec{s}$, а сформулированное правило – *правилом многоугольника*. Этот многоугольник может и не быть плоским.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число -1 получается противоположный вектор $-\vec{a}$. Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ имеют одинаковые длины и противоположные направления. Их сумма $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$ даёт *нулевой вектор*, длина которого равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

***Проекция вектора на ось***

*Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:*

$$\text{пр}_l\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi$$

Как известно, проекцией точки *A* на прямую (плоскость) служит основание $A_1$ перпендикуляра $AA_1$, опущенного из этой точки на прямую (плоскость).

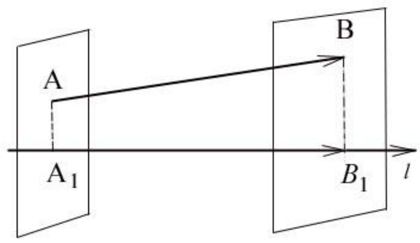



Рис. 5

Пусть $\overrightarrow{AB}$ - произвольный вектор (Рис. 5), а $A_1$ и $B_1$ - проекции его начала (точки *A*) и конца (точки *B*) на ось *l*. (Для построения проекции точки *A*) на прямую проводим через точку *A* плоскость, перпендикулярную прямой. Пересечение прямой и плоскости определит искомую проекцию.

**Определение.** *Составляющей вектора* $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ *на оси l* называется такой вектор $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}_l$, лежащий на этой оси, начало которого совпадает с проекцией начала, а конец - с проекцией конца вектора $\overrightarrow{AB}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *l* называется число

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB}=\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|=\pm\left|\vec{a}_l\right|,$$

равное длине составляющего вектора на этой оси, взятое со знаком плюс, если направление составляющей совпадает с направлением оси *l*, и со знаком минус, если эти направления противоположны.

***Основные свойства проекций вектора на ось:***

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.
2. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число.
3. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций на эту же ось слагаемых векторов.

4. Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

***Векторы в пространстве***

***Прямоугольная декартова система координат в пространстве***

**Определение.** Упорядоченная система трёх взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины называется *прямоугольной декартовой системой координат в пространстве*.

В этой упорядоченной системе координатных осей *0xyz* ось *Ox* называется *осью абсцисс*, ось *0y* – *осью ординат*, и ось *0z* – *осью аппликат*.

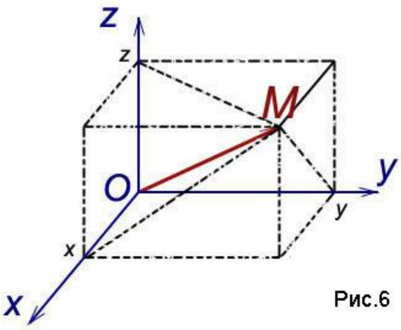


Рис.6

С произвольной точкой *M* пространства свяжем вектор

$\overrightarrow{OM}$,

называемый *радиус-вектором* точки *M* и спроецируем его на каждую из координатных осей. Обозначим величины соответствующих проекций:

$$\text{пр}_x\overrightarrow{OM} = x,$$
$$\text{пр}_y\overrightarrow{OM} = y,$$
$$\text{пр}_z\overrightarrow{OM} = z.$$

Числа *x, y, z* называются *координатами точки M* , соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*, и записываются в виде упорядоченной точки чисел: *M (x; y; z)* (рис.6).

**Определение.** Вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением оси, называют *единичным вектором* (или *ортом*) оси. Обозначим через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Соответственно орты координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*

$(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1).$

**Теорема.** Всякий вектор может быть разложен по ортам координатных осей:

$$\vec{a} = \vec{xi} + \vec{yi} + \vec{zk}. \qquad (2)$$

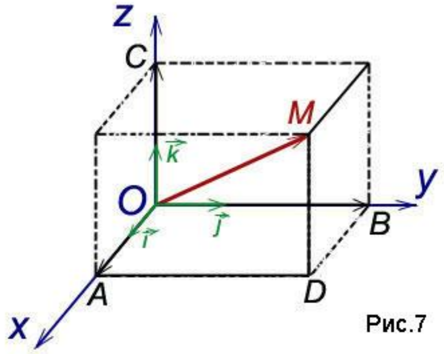


Рис.7

Равенство (2) называется разложением вектора по координатным осям. Коэффициентами этого разложения являются проекции вектора на координатные оси. Таким образом, коэффициентами разложения (2) вектора по координатным осям являются координаты вектора.

После выбора в пространстве определённой системы координат вектор и тройка его координат однозначно определяют друг друга, поэтому вектор может быть записан в форме

$$\vec{a} = (x; y; z). \qquad (3)$$

Представления вектора в виде (2) и (3) тождественны.

*Условие коллинеарности векторов в координатах*

Как мы уже отмечали, векторы называются коллинеарными, если они связаны отношением

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Пусть даны векторы $\vec{a}\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right),\ \vec{b}\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$. Эти векторы коллинеарны, если координаты векторов связаны отношением

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda,$$

то есть, координаты векторов пропорциональны.

Вследствие взаимной перпендикулярности координатных осей длина вектора

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} = (x; y; z)$$

равна длине диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах

$$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k},$$

и выражается равенством

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (4)$$

Вектор полностью определяется заданием двух точек (начала и конца), поэтому координаты вектора можно выразить через координаты этих точек.

Пусть в заданной системе координат начало вектора $\vec{a}$ находится в точке

$$A(x_1; y_1; z_1),$$

а конец – в точке

$$B(x_2; y_2; z_2).$$ **(рис.8).**

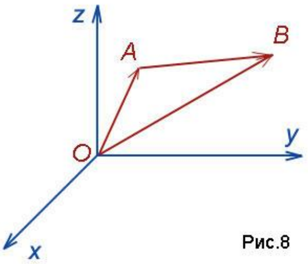


Рис.8

Тогда

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{i} + z_1\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{i} + z_2\vec{k}.$$

Из равенства

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

следует, что

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$

$$= \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right).$$

Отсюда

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

или в координатной форме

$$\vec{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (5)$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям одноимённых координат конца и начала вектора*. Формула (4) в этом случае примет вид

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (6)$$

*Операции над векторами, заданными в координатной форме*

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданные своими проекциями:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

или

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1),$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

или

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2).$$

Укажем действия над этими векторами.

*1.Сложение:*

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(x_1 + x_2;\ \ y_1 + y_2;\ \ z_1 + z_2\right),$$

т.е. при сложении двух векторов одноимённые координаты складываются.

*2.Вычитание:*

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(x_1 - x_2;\ \ y_1 - y_2;\ \ z_1 - z_2\right),$$

т.е. при вычитании двух векторов одноимённые координаты вычитаются.

*3.Умножение вектора на число:*

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k},$$

или, что то же

$$\lambda\vec{a} = \left(\lambda x_1;\ \ \lambda y_1;\ \ \lambda z_1\right),$$

т.е. при умножении вектора на число все координаты умножаются на это число.

## Тема. Линейная зависимость векторов. Базис векторов пространства

### План

1. *Разложение вектора по базису.*
2. *Линейная зависимость и независимость геометрических векторов.*

*3. Свойства линейно зависимых векторов.*

Множество векторов на прямой назовем одномерным векторным пространством $R^1$, множество векторов на плоскости – двумерным векторным пространством $R^2$, в пространстве – трехмерным векторным пространством $R^3$.

В пространстве $R^3$ обычно используют прямоугольную декартову систему координат *Oxyz* где любая точка *M* пространства, имеющая координаты *x* (абсциссу), *y* (ординату) и *z* (аппликату), обозначается *M(x,y,z).*

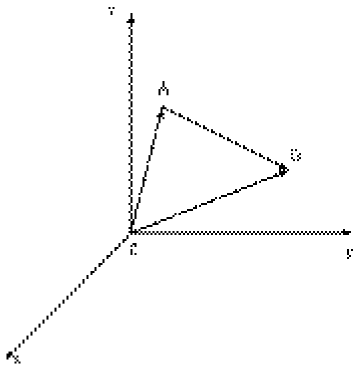
***Определение***. Вектор $\overrightarrow{OA}$, начало которого находится в начале координат, а конец в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ , называют радиус–вектором точки *A* и обозначают $\vec{r}_1(A)$ или просто $\vec{r}_1$ Так как его координаты совпадают с координатами точки *A*, то его разложение по ортам имеет вид:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{\imath} + (y_2 - y_1)\bar{\jmath} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1, y_1, z_1)$, и конец в точке $B(x_2, y_2, z_2)$, может быть записан в виде $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, где $\bar{r}_2$ – радиус-вектор точки B; $\bar{r}_1$ – радиус-вектор точки A.

Поэтому разложение вектора по ортам имеет вид:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{\imath} + (y_2 - y_1)\bar{\jmath} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$



Его длина равна расстоянию между точками A и B:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Свободный вектор, например $\bar{d}$, заданный в координатном пространстве $Oxyz$, может быть представлен в виде $\bar{b} = b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}$, где $b_x, b_y, b_z$ – проекции вектора $\bar{b}$ на соответствующие оси координат (координаты вектора), а $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ – орты этих осей. Пишут $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

Длина вектора (модуль вектора) определяется по формуле:

$$|\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Направление вектора определяется углами $\alpha, \beta, \gamma$, образованными им с осями координат $Ox$, $Oy$, $Oz$. Косинусы этих углов (направляющие косинусы вектора) вычисляются по формулам:

$$cos\alpha = \frac{b_x}{|\bar{b}|},\ cos\beta = \frac{b_y}{|\bar{b}|},\ cos\gamma = \frac{b_z}{|\bar{b}|}.$$

Тогда координаты вектора будут равны:

$$b_x = |\bar{b}|\, cos\alpha,\ b_y = |\bar{b}|\, cos\beta,\ b_z = |\bar{b}|\, cos\gamma.$$

Подставив эти выражения в формулу вычисления длины вектора, установим, что направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

***Замечание***.

Координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$, то есть $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

*Разложение вектора по базису*

***Определение***. Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называется вектор $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\overline{a_n}$ .

Говорят, что вектор $\bar{b}$ раскладывается по векторам $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ , если он является линейной комбинацией этих векторов.

***Определение***.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует такая линейная комбинация $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\overline{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно коэффициентах т.е.

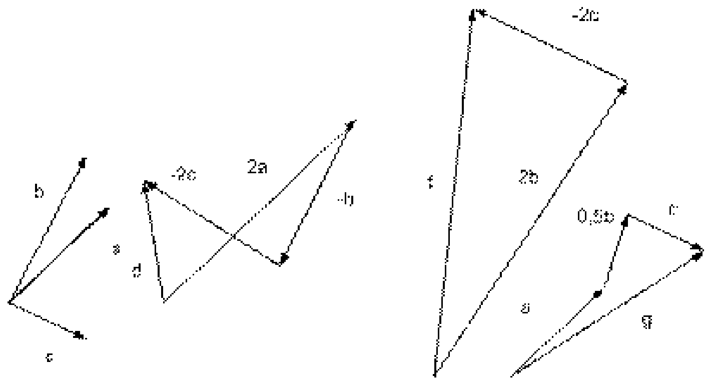
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots \lambda_n^2 \neq 0,$$

Если же только при $\lambda_i = 0$ выполняется

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\overline{a_n} = 0,$$

то векторы называются *линейно независимыми*.

Примеры линейных комбинаций векторов:




Векторы $\bar{d}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$ на рисунке и $\bar{h} = 0$ являются линейными комбинациями векторов

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $\bar{d} = 2\bar{a} + (-1)\bar{b} + (-2)\bar{c}$, $\bar{f} = 0\bar{a} + 2\bar{b} + (-2)\bar{c}$, $\bar{g} = 1\bar{a} + 0{,}5\bar{b} + 1\bar{c}$ $\bar{h} = 0\bar{a} + 0\bar{d} + 0$.

*Свойства линейно зависимых векторов:*

1. Если среди векторов $\overline{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
4. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимые векторы коллинеарные.
5. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимые вектора компланарны.
6. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Справедливы следующие утверждения:

***Определение***. Система векторов называется базисом пространства $R^n$, если векторы этой системы линейно независимы и всякий вектор из $R^n$ линейно выражается через векторы данной системы.

***Теорема***. Разложение любого вектора в базисе, если оно существует, является единственным.

***Теорема***. Один вектор $\bar{a}$ линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.

Определение. Базисом на прямой $R^1$ называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

***Теорема***. Два вектора $\bar{a}, \bar{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

***Определение***. Базисом на плоскости $R^2$ называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

***Теорема***. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

***Определение.*** Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ являются линейно независимыми, если они не лежат в одной плоскости.

Базисом в трехмерном пространстве $R^3$ называется упорядоченная тройка любых линейно независимых векторов.

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ – базис в $R^3$, то любой другой вектор, например $\bar{b}$, единственным образом разлагается по этому базису

$\bar{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$, где числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ находятся единственным образом и называются координатами вектора $\bar{b}$ в базисе $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$.

Определение. Базис $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ называется ортогональным (прямоугольным), если векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ попарно перпендикулярны.

***Определение.*** Ортогональный базис называется ортонормированным, если образующие его векторы имеют длину, равную единице.

Базис в пространстве обычно обозначают $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, а ортонормированный базис обозначают $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

***Пример.*** Даны векторы $\bar{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\bar{b}(-1;\ 0;\ 3)$, $\bar{c}(2;\ 1;\ -1)$ и $\bar{d}\ (3;\ 2;\ 2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение. Если $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – какие угодно некомпланарные векторы, то всякий вектор $\bar{d}$ может быть представлен в виде $\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – числа.

Такое представление вектора и называется разложением его по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты этого разложения являются координатами вектора $\bar{d}$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Векторы образуют $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

То есть, если определитель матрицы системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$
.

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ линейно независимые и образуют базис.

Запишем разложение вектора $\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} + \lambda_3 \overline{c}$, в координатной форме и решим полученную систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 = d_1 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 = d_2 \\ \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 = d_3, \end{cases}$$

для данного примера система имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 2 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера. Уже известен определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

системы, найдем дополнительные определители и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\Delta_{\lambda_1} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \lambda_1 = \frac{\Delta_{\lambda_1}}{\Delta} = -\frac{1}{4};$$

$$\Delta_{\lambda_2} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_{\lambda_2}}{\Delta} = \frac{7}{4};$$

$$\Delta_{\lambda_3} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_{\lambda_3}}{\Delta} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$: $\overline{d} = \{-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}; \frac{5}{2}\}$.

## Тема. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их свойства

**План**

1. *Скалярное произведение векторов и его свойства.*
2. *Векторное произведение векторов и его свойства.*
3. *Смешанное произведение векторов и его свойства.*

***<u>Определение.</u>*** *Скалярным произведением* векторов **a** и **b** называется число
**ab** = | **a** | | **b** | cos(**a^b**).

В декартовой прямоугольной системе координат имеем:
**ab** = $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Свойства скалярного произведения:

1). **ab** =**ba**

2).(**a+b**)**c=ac +bc**

3).(α**b**)**a**=α(**ba**)

4).**aa**≥ 0

Скалярное умножение векторов используется в школьной геометрии при доказательстве теорем и решении задач.

***Определение.*** *Векторным произведением* векторов **a** и **b** называется вектор **c=**[**ab**], удовлетворяющий условиям:

1. |**c**|=|**a**| |**b**|sin(**a**^**b**)
2. **c** ⊥ **a**, **c** ⊥ **b**
3. **a,b,c** – правая тройка векторов.

В декартовых прямоугольных координатах:

$$\mathbf{c} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} \qquad (1)$$

(условия 1,2,3 проверяются непосредственными вычислениями).

**Свойства:**

1).[**ba**]**= -** [**ab**]

2).[(k**a**)**b**]=k[**ab**]

3).[**a**(**b+c**)]=[**ab**]+[**ac**]  - свойства следуют из (1) и свойств определителей.

Геометрический смысл модуля векторного произведения:

|[**ab**]|= 2 $S_\Delta$ , где Δ - треугольник, построенный на векторах **a**, **b** (очевидно, из условия 1.)

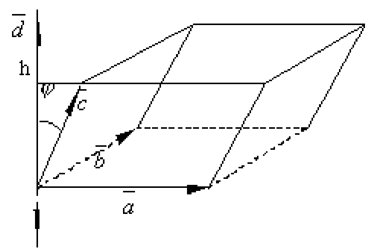
***Определение.*** *Смешанным произведением* трех векторов **a**, **b, c** называется число

***Определение***. *Смешанным произведением* трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называют число, равное $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Обозначается $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Здесь первые два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ умножается скалярно на третий вектор $\bar{c}$. Очевидно, такое произведение есть некоторое число.

Рассмотрим свойства смешанного произведения.

1. *Геометрический смысл* смешанного произведения. Смешанное произведение 3-х векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах, т.е. $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \pm V_{пар}$.

Таким образом, $V = \left|(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\right|$ и $V_{пир} = \dfrac{1}{6}\left|(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\right|$.




***Доказательство***. Отложим векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ от общего начала и построим на них параллелепипед. Обозначим $\bar{d} = \bar{a}\times\bar{b}$ и заметим, что $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = S_{\bar{a},\bar{b}}$. По определению скалярного произведения

$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cos(\bar{d}\,\hat{;}\,\bar{c}) = S_{\bar{a},\bar{b}}\left|\bar{c}\right|\cos\varphi$. Предполагая, что $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ и обозначив через *h* высоту параллелепипеда, находим $h = \left|\bar{c}\right|\cos\varphi$.

Таким образом, при $\varphi < \frac{\pi}{2}$ $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = S_{\bar{a}\bar{b}} h = V$.

Если же $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi < 0,\ h = |\bar{c}|\cos(\pi - \varphi) = -|\bar{c}|\cos\varphi$ и $|\bar{c}|\cos\varphi = -h$. Следовательно, $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = -V$.

Объединяя оба эти случая, получаем $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \pm V$ или $V = |(\bar{a}\bar{b}\bar{c})|$.

Из доказательства этого свойства в частности следует, что если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая, то смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) > 0$, а если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая, то $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) < 0$.

2. Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо равенство

$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

*Доказательство* этого свойства следует из свойства 1. Действительно, легко показать, что $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$ и $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \pm V$. Причём знаки "+" и "–" берутся одновременно, т.к. углы между векторами $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}$ и $\bar{a}$ и $\bar{b} \times \bar{c}$ одновременно острые или тупые.

3. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.

Действительно, если рассмотрим смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, то, например, $(\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{a}) \cdot \bar{c} = -(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = -(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ или

$(\bar{c}\bar{b}\bar{a}) = (\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a} = -(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = -\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = (\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = -(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

4. Смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю или векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны.

Доказательство.

1. Предположим, что $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$, т.е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$, тогда $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ или $\bar{c} = 0$ или $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{c}$.

Если $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то $\bar{a} = \bar{0}$ или $\bar{b} = \bar{0}$ или $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Поэтому $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны.

Если $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{c}$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - компланарны.

2. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны и α – плоскость, которой они параллельны , т. е. $\bar{a} \parallel \alpha,\ \bar{b} \parallel \alpha$ и $\bar{c} \parallel \alpha$. Тогда $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \alpha$, а значит $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{c}$, поэтому $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$ или $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$.

Т.о., необходимым и достаточным условием компланарности 3-х векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Кроме того, отсюда следует, что три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис в пространстве, если $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) \neq 0$.

Если векторы заданы в координатной форме $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},\ \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k},\ \bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$, то можно показать, что их смешанное произведение находится по формуле:

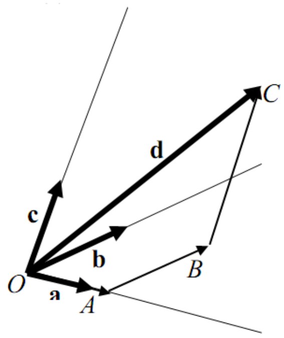
$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Т. о., смешанное произведение $(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$ равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят координаты первого вектора, во второй строке – координаты второго вектора и в третьей строке – третьего вектора.

***Теорема*.**

В пространстве существуют три линейно независимых вектора, любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

***Доказательство.*** Легко видеть, что три некомпланарных вектора линейно независимы. Если даны 4 вектора **a, b, c, d** из которых **a, b, c** линейно независимы (некомпланарны), то вектор **d** можно геометрически разложить по трем данным (см. чертеж).




$OA \parallel \mathbf{a}$, $AB \parallel \mathbf{b}$, $BC \parallel \mathbf{c}$

$\mathbf{d}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$

## Тема. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии

**План**

*1. Задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскостей.*

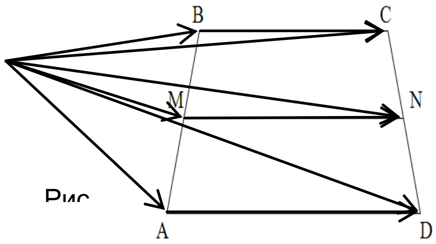
*2. Задачи на доказательство деления некоторого отрезка в заданном отношении или на нахождение отношения, в котором точка делит отрезок.*

*3. Задачи на доказательство или использование принадлежности трёх точек прямой.*

***Задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскостей***

При решении этих задач наиболее часто используется признак коллинеарности двух векторов и единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

*Задача 1.* Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон, равен половине векторной суммы двух других противолежащих (соотношение 8)




*Дано:*
ABCD– четырехугольник
M– середина AB
N– середина CD

*Доказать:* $$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}).$$

*Решение.*

Пусть *O* – произвольная точка. Согласно соотношению 3 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),$ имеем

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$$

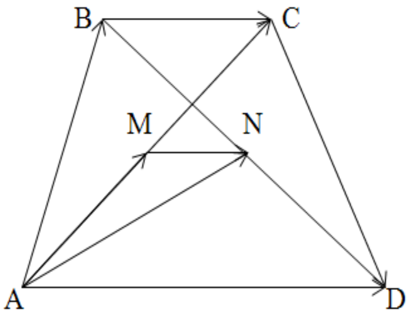



Рис.1

*Задача 2.* Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям.

*Дано:*
ABCD– трапеция
AC, BD – диагонали
M– середина AC
N– середина BD
*Доказать: MN* || *AD*.

*Анализ.* Покажем, что *MN* || *AD*. Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$

*Решение.* Так как *M* и *N* – середины отрезков *AC* и *BD*, то(соотношение 3)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right),$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right).$$

Но $\overrightarrow{BC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$, поэтому $\lambda\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ Тогда

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \lambda\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AD}$, Тогда $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$: что и требовалось доказать.

*Задача 3.*Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и длина ее равна полусумме длин оснований.

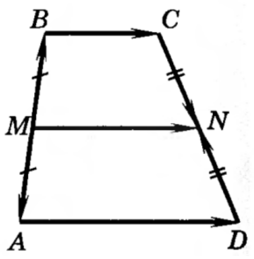



Рис.15.

*Дано:*
ABCD– трапеция
M– середина AB
N– середина CD

*Доказать: MN* || *AD*. $MN = \frac{AD+BC}{2}$

*Анализ.* Для доказательства параллельности достаточно показать, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны

*Решение.*

1) Согласно рассмотренной задаче 1

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

2) Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ и, значит, *MN* || *AD*.

3) Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right|$ = *AD* + *BC*, поэтому

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

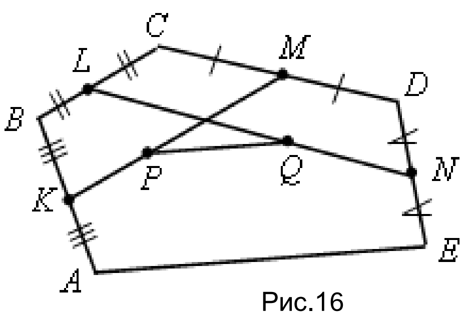



Рис.16

*Задача 4.* Точки *K*, *L*, *M*, *N* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DE* пятиугольника *ABCDE*, а точки *P* и *Q* – середины отрезков *KM* и *LN*. Докажите, что *PQ* || *AE* и *PQ* = 1/4 *AE*.

*Дано:*

ABCDE– пятиугольник
*K*, *L*, *M*, *N* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DE*
*P* и *Q* – середины отрезков *KM* и *LN*
*Доказать PQ* || *AE* и *PQ* = 1/4 *AE*.

*Решение.*

Пусть *O* – произвольная точка. Согласно соотношению 3

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}).$$

Из этих равенств следует, что

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Отсюда следует, что *PQ* || *AE* и *PQ* = $\frac{1}{4}$ *AE*.

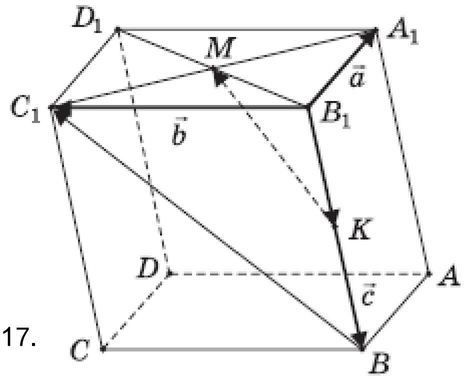



Рис.17.

*Задача 5.* В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M— середина диагонали $A_1C_1$ грани $A_1B_1C_1D_1$, точка K— середина ребра $BB_1$. Докажите, что прямые $A_1B_1$, KM и $BC_1$ параллельны некоторой плоскости.

*Дано:*
$ABCDA_1B_1C_1D_1$– параллелепипед
M— середина диагонали $A_1C_1$
K— середина ребра $BB_1$
*Доказать* $A_1B_1$, KM и $BC_1$ ‖ $\gamma$

*Решение.*

Введем векторы: $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{a},\quad \overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b},\quad \overrightarrow{B_1B}=\vec{c}$

Тройку $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ некомпланарных векторов примем в качестве базиса. Разложим векторы $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{KM}$ по векторам этого базиса.

Имеем: $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{B_1C_1}-\overrightarrow{B_1B}=\vec{b}-\vec{c};$

$$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{B_1M}-\overrightarrow{B_1K}=0,5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-0,5\vec{c}=0,5\vec{a}+0,5\vec{b}-0,5\vec{c};$$

$$\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BC_1}=\vec{a}+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\ \Rightarrow\ 0,5\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BC_1}\right)=0,5\vec{a}+0,5\vec{b}-0,5\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{KM}=0,5\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BC_1}\right)=0,5\overrightarrow{B_1A_1}+0,5\overrightarrow{BC_1}.$$

Это означает, что векторы $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{KM}$ компланарны, следовательно, они параллельны некоторой плоскости $\gamma$, тогда этой плоскости параллельны и прямые $A_1B_1$, KM и $BC_1$, для которых векторы являются направляющими.

***Задачи на доказательство деления некоторого отрезка в заданном отношении или на нахождение отношения, в котором точка делит отрезок***

Для того чтобы точка C делила отрезок AB так, что $|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{CB}| = m:n$ ,

необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки O выполнялось равенство: $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$

Доказательство.

По условию $|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{CB}| = m:n$, следовательно $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$. Но

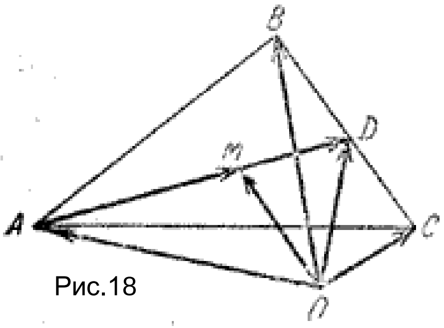


Рис.18

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},$$

$$n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

*Задача 6.* Доказать, что медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке M такой, что точка M делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

*Решение.*

Пусть точка M делит медиану AD треугольника ABC в отношении 2:1.Тогда по соотношению 2 получаем (m = 2, n = 1)

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OD}$ где O — произвольная точка пространства. Точка D — середина стороны BC, поэтому, согласно соотношению 3 : $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Тот же результат получится для любой другой медианы треугольника ABC. Это говорит о том, что M — общая точка всех трех медиан.

Практика решения более сложных задач такого типа показала, что работу нужно вести в следующем направлении: постараться разложить один из векторов (чаще всего конец такого вектора – точка, которая делит данный отрезок в заданном отношении) по двум основным векторам (они неколлинеарны) двумя различными способами. Используя единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, установить зависимость между коэффициентами в разложении вектора, что потом дает возможность найти искомое соотношение.

*Задача 7.* На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$, а на продолжении стороны BC такая точка N что $|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$. В

каком отношении точка P пересечения AB и *MN* делит каждый из этих отрезков.

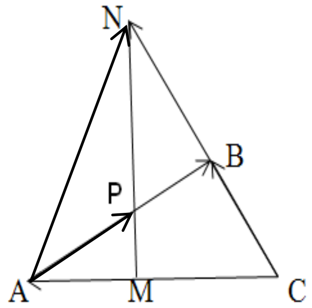



Рис.19.

*Дано:*

ABC– треугольник

$|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$ $|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$

$N \in BC$

$MN \cap AB = P$

*Найти:* $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|}, \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$

*Решение:*

Пусть $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = x$ и $\frac{|\mathrm{AP}|}{|\mathrm{PB}|}$ =y

Выберем базисные векторы $\overline{CB} = \vec{a}, \overline{CA} = \vec{b}.$

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами

а) $\frac{|\mathrm{AP}|}{|\mathrm{PB}|}$ =y, тогда $\frac{|\mathrm{AP}|}{|\mathrm{AB}|}$ $=\frac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ *и* $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1}\cdot(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1}\cdot(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\cdot\vec{a} - \frac{y}{y+1}\cdot\vec{b}$$

б) $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = x$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{AM} + \frac{x}{x+1}\cdot\overrightarrow{AN}$

Но $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1}\cdot(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{2x}{x+1}\cdot a - \frac{1+4x}{4(x+1)}\cdot b$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам(соотношение 7) , получим систему

$$\begin{cases} y/(y+1) = 2x/(x+1), \\ y/(y+1) = (1+4x)/(4(x+1)), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/4, \\ y = 2/3. \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = \frac{1}{4}$ и $\frac{|\mathrm{AP}|}{|\mathrm{PB}|} = \frac{2}{3}$

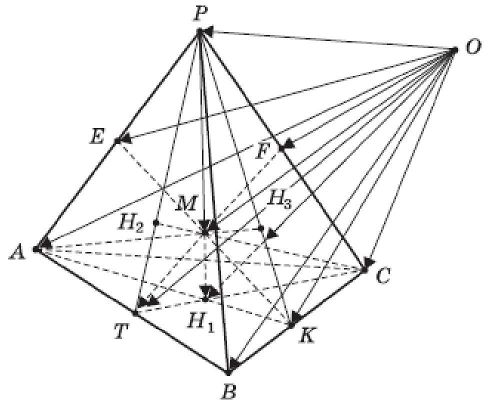



Рис.20.

*Задача 8*. Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противолежащей грани, называется медианой этого тетраэдра. Докажите что все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и эта точка делит каждую из медиан в отношении 3:1, считая от вершины.

*Доказательство.*

Пусть $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ — центроиды граней соответственно ABC, ABP, BCP, ACP; M — точка, делящая медиану $PH_1$ тетраэдра PABC в отношении $PM:MH_1 = 3:1$.

Тогда $PM : PH_1 = 3 : 4$, откуда $PM = \frac{3}{4}PH_1$. Для любой точки O пространства и центроида $H_1$ грани ABC выполняется:

$$\overrightarrow{OH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$ (соотношение 4)

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PH_1} =$$

$$= \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OH_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Аналогично доказывается, что для точек $M_1$, $M_2$ и $M_3$, делящих медианы соответственно $CH_2$, $AH_3$, $BH_4$ тетраэдра в отношении 3 : 1, считая соответственно от вершин C, A и B, выполняется то же равенство, то есть

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Это означает, что точки M, $M_1$, $M_2$ и $M_3$ совпадают, то есть все четыре медианы $PH_1$, $CH_2$, $AH_3$ и $BH_4$ тетраэдра пересекаются в одной точке M и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от соответствующей вершины, что и требовалось доказать.

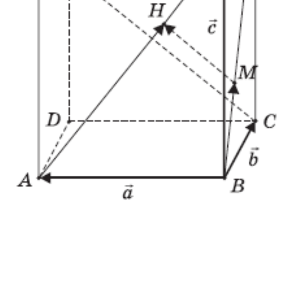



Рис.21.

*Задача 9.* На диагоналях $AB_1$ и $BC_1$ граней $AA_1B_1B$ и $BB_1C_1C$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и $A_1C$ параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

*Решение.*

Введем векторы: $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{BC}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$

Тройку $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ примем в качестве базиса и разложим векторы $\overrightarrow{AB_1},\ \overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ по векторам этого базиса. Имеем: $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA}=\vec{c}-\vec{a};\ \ \overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}+\vec{c};$

$$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

Так как точка H лежит на диагонали $AB_1$, то векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ коллинеарны, поэтому (соотношение 7) существует такое число x, что $\overrightarrow{AH}=x\cdot\overrightarrow{AB_1}=x(\vec{c}-\vec{a})$. Аналогично, в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ существует такое число y, что $\overrightarrow{BM}=y\cdot\overrightarrow{BC_1}=y(\vec{b}+\vec{c})$.

По правилу ломаной находим:

$$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=$$

$$=-y(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}+x(\vec{c}-\vec{a})=$$

$$=(1-x)\vec{a}-y\vec{b}+(x-y)\vec{c}.$$

По условию MH ‖ $A_1C$, значит, существует такое число t, что $\overrightarrow{MH}=t\cdot\overrightarrow{CA_1}$, то есть выполняется равенство:

$$(1-x)\vec{a}-y\vec{b}+(x-y)\vec{c}=t(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (1-x-t)\vec{a}+(t-y)\vec{b}+(x-y-t)\vec{c}=\vec{0}.$$

Вследствие некомпланарности векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ и единственности разложения вектора по базису, приходим к выводу: 1– x–t =0, t–y=0, x–y–t = 0. Решением этой системы уравнений является: $y=t=\frac{1}{3},\ \ x=\frac{2}{3}.$ Тогда значит, $MH:CA_1 = 1:3$.

***Задачи на доказательство или использование принадлежности трёх точек прямой***

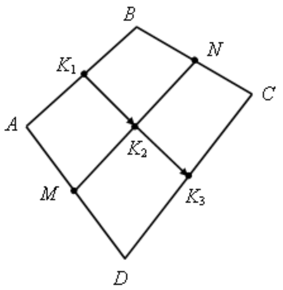



Рис.22.

*Задача 10.* Точки *M* и *N* лежат соответственно на сторонах *AD* и *BC* четырехугольника *ABCD*, причем *AM*:*MD*=*BN*:*NC*== 3:4.

Докажите, что середины отрезков *AB*, *MN* и *CD* лежат на одной прямой.

*Доказательство.*

Пусть $K_1$ – середина *AB*, $K_2$ – середина *MN*, $K_3$ – середина *CD*. Согласно соотношению 8 имеем

$$\overrightarrow{K_1K_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}),\ \ \overrightarrow{K_1K_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

.

Из условия следует, что $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$,

поэтому $\overrightarrow{K_1K_2}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}$.

Таким образом, векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки $K_1$, $K_2$ и $K_3$ лежат на одной прямой.

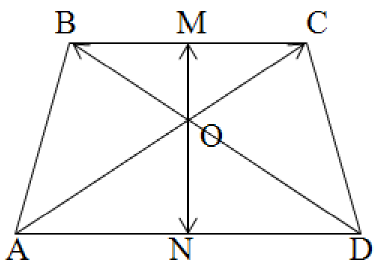



Рис.23.

*Задача 11.* В трапеции ABCD точки M и N середины оснований BC и AD соответственно. Докажите, что точка O пересечения диагоналей AC и BD лежит на прямой MN.

*Доказательство.*

Для того, чтобы доказать, что $O\in MN$ достаточно доказать, что $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны.

Для этого нужно разложить векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ по базисным векторам.

В качестве базисных векторов возьмём $\overrightarrow{OB}=\vec{a}$ $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$. По соотношению 3 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{OD}\ \uparrow\downarrow\ \overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB},k<0$

$\overrightarrow{OA}\ \uparrow\downarrow\ \overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}=n\overrightarrow{OC},n<0$

Из подобия треугольников BOC и AOD: $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$

Значит k=n, т.е. $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(k\vec{a}+k\vec{b}\right)=\frac{k}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\cdot\overrightarrow{OM}$, значит $O\in MN$.

## Тема. Аффинная система координат на плоскости. Ориентация плоскости. Ориентированные углы

### План

1. *Аффинная система координат.*
2. *Полярная система координат.*
3. *Аффинные преобразования плоскости (пространства). Простейшие свойства аффинных преобразований.*
4. *Ориентация плоских фигур и пар векторов.*

***Аффинная система координат***

***Аффинной системой координат*** на плоскости (в пространстве) называется совокупность, включающая точку (начало координат) и базис направляющего векторного пространства: $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ – на плоскости и $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ – в пространстве.

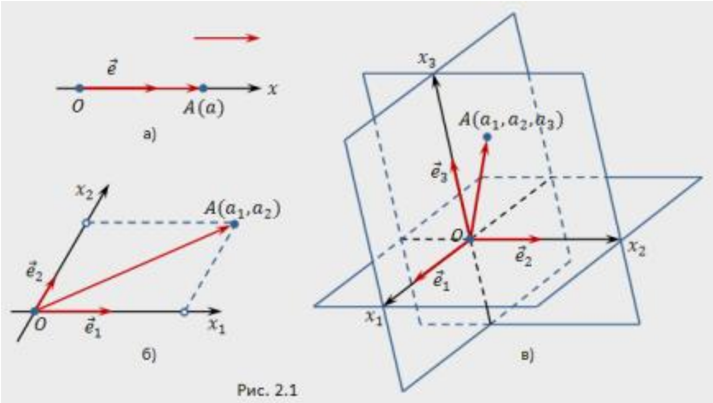


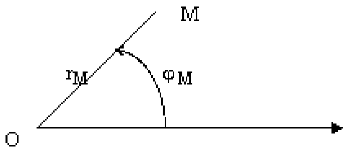
Рис. 2.1

Аффинные координаты точки А (рис. б) – это координаты вектора в базисе, определяющем аффинную систему.

***Полярная система координат на плоскости***

Возьмем на данной плоскости произвольную точку О и назовем её полюсом. Проведем на данной плоскости из точки О направленный луч, который назовем полярным лучом. Пусть М – произвольная точка данной плоскости. Соединим точку М с полюсом отрезком прямой и назовем этот отрезок ОМ и его длину $r_M = OM$ – полярным радиусом точки М.

Угол поворота $\varphi_M \in [0;2\pi)$ полярного луча вокруг полюса против часовой стрелки до совпадения с полярным радиусом точки М назовем полярным углом точки М.




Упорядоченная пара действительных чисел $(r_M;\varphi_M)$ называется ***полярными координатами точки М.***

***<u>Определение.</u> Полярной системой координат на плоскости*** называется полюс и полярный луч вместе с понятием полярных координат любой точки плоскости.

Полярная система координат в пространстве переходит в сферическую либо в цилиндрическую системы координат.

***Простейшие свойства аффинных преобразований***

***Свойство 1.*** При аффинном преобразовании точки, не лежащие на одной прямой, преобразуются в точки, не лежащие на одной прямой.

***Свойство 2***. При аффинном преобразовании аффинный репер отображается в аффинный репер.

Доказательство этого предложения непосредственно вытекает из свойства 1.

***Свойство 3.*** При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая линия.

***Свойство 5.*** При аффинном преобразовании отрезок переходит в отрезок, луч в луч, угол в угол.

***Теорема 1.***

Множество аффинных преобразований плоскости образует группу.

***Следствие.*** Движения и подобия составляют подгруппы в группе аффинных преобразований.

Группа аффинных преобразований, как будет вытекать из следующего утверждения, гораздо шире группы подобий. Она содержит подгруппы, отличные от подобия.

***Ориентация плоских фигур***

Введём понятие ориентации плоских фигур, причём здесь можно ограничиться лишь рассмотрением ориентации треугольников: каждый треугольник может быть ориентирован двумя способами, то есть обход его контура может совершаться в двух взаимно противоположных направлениях – «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки».

***Определение.*** Аффинные преобразования *первого рода* сохраняют ориентацию всех треугольников, а аффинные преобразования *второго рода* меняют её на противоположную.

***Ориентация пар векторов***

***Определение.*** Если на плоскости задана система координат, то одну из двух ориентаций плоских фигур называют обычно положительной, а другую – отрицательной. За положительную принимается ориентация, определяемая обходом координатного треугольника $OE_1E_2$ или, что то же самое, направлением вращения от вектора $e_1$ к вектору $e_2$ (на угол, меньший $180^0$).

***Определение.*** В связи с этим введём также понятие *ориентации пары векторов*: будем называть пару векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *ориентированной положительно*, если направление вращения (на наименьший возможный угол) от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совпадает с направлением вращения от $e_1$ к $e_2$; в противном случае пару векторов и назовём *ориентированной отрицательно*.

## Тема. Преобразование аффинной системы координат

**План**

1. *Преобразования аффинных координат.*
2. *Задача преобразования координат.*
3. *Основная теорема теории аффинных преобразований.*

***Формулы преобразования аффинных координат***

Рассмотрим на плоскости две аффинные системы координат $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ и $\left(O',\vec{e'}_1,\vec{e}_2{}'\right)$. Первую систему назовем старой, а вторую новой.

Пусть М – произвольная точка плоскости, которая в старой системе имеет координаты $M(x,y)$, а в новой системе – $M(x',y')$.

Задача преобразования координат состоит в следующем: зная координаты нового начала координат и новых координатных векторов в старой системе, выразить координаты точки М в старой системе через координаты той же точки в новой системе.

Пусть новое начало координат $O'$ и новые координатные векторы $\vec{e'}_1,\vec{e}_2{}'$ в старой системе координат имеют координаты:

$$O'(x_0,y_0) \qquad (1); \qquad \begin{aligned} \vec{e'}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2{}' &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

По определению координат векторов и точек:

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}'$$

Учитывая эти равенства, получим:

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' = x'\left(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2\right) + y'\left(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2\right) = \\ = \left(a_{11}x' + a_{21}y'\right)\vec{e}_1 + \left(a_{21}x' + a_{212}y'\right)\vec{e}_2 \quad (3)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2; \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}; \end{aligned} \quad (4)$$

то из (3) и (4) получим:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{21}y' + x_0; \\ y = a_{21}x' + a_{212}y' + y_0 \end{cases} \quad (5).$$

Так выражается координаты точки М в старой системе через её координаты в новой системе

Формулы (5) называются *формулами преобразования аффинной системы координат*.

Мы замечаем, что в этих формулах матрица, составленная из коэффициентов при , есть в точности матрица перехода от базиса к базису , а свободными членами служат координаты нового начала в старой системе. Так как векторы не коллинеарны, то  поэтому система (5) всегда разрешима. Это позволяет выразить координаты точки М в новой системе через координаты той же точки в старой системе.

***Основная теорема теории аффинных преобразований***

***<u>Теорема.</u>***

Существует одно и только одно аффинное преобразование, переводящее произвольные  три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, в три произвольные точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой.

***Доказательство.***

Доказать единственность аффинного преобразования можно показав, что коэффициенты преобразования *a, b,* и *c* выражаются однозначно через координаты точек *A*($a_1$), *B*($b_1$), *C*($c_1$) и *A'(a'), B'(b'), C'(c').*

Так как точки *A', B', C'* являются образами точек *A, B* и *C*, то их координаты можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} a' = aa_1 + b\bar{a}_1 + c, \\ b' = ab_1 + b\bar{b}_1 + c, \\ c' = ac_1 + b\bar{c}_1 + c. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно коэффициентов преобразования *a, b, c*, получим их выражение через координаты точек *A, B, C* и *A', B', C'*:

$$\begin{cases} a = \dfrac{a'\bar{b}_1 + \bar{a}_1 c' + b'\bar{c}_1 - \bar{b}_1 c' - b'\bar{a}_1 - a'\bar{c}_1}{a_1\bar{b}_1 + \bar{a}_1 c_1 + b_1\bar{c}_1 - a_1\bar{c}_1 - \bar{a}_1 b_1 - \bar{b}_1 c_1}, \\ b = \dfrac{a_1 b' + a' c_1 + b_1 c' - b' c_1 - a' b_1 - a_1 c'}{a_1\bar{b}_1 + \bar{a}_1 c_1 + b_1\bar{c}_1 - a_1\bar{c}_1 - \bar{a}_1 b_1 - \bar{b}_1 c_1}, \\ c = \dfrac{a_1\bar{b}_1 c' + \bar{a}_1 b' c_1 + a' b_1\bar{c}_1 - a'\bar{b}_1 c_1 - \bar{a}_1 b_1 c' - a_1 b'\bar{c}_1}{a_1\bar{b}_1 + \bar{a}_1 c_1 + b_1\bar{c}_1 - a_1\bar{c}_1 - \bar{a}_1 b_1 - \bar{b}_1 c_1}. \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты преобразования находятся однозначно. Опустив громоздкие выкладки, отметим, что определитель рассмотренного аффинного преобразования не равен нулю, таким образом, доказано существование и единственность искомого аффинного преобразования.

## Тема. Уравнения прямой и окружности на плоскости.

**Взаимное расположение прямых**

**План**

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом.*
2. *Общее уравнение прямой на плоскости.*
3. *Взаимное расположение прямых на плоскости.*
4. *Уравнение прямой, проходящей через точку, с заданным угловым коэффициентом.*
5. *Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.*
6. *Уравнение прямой в «отрезках».*
7. *Уравнение окружности.*

***Уравнение прямой с угловым коэффициентом*** $y = kx + b$

Сначала исследуем прямую, которая задана уравнением $y = kx$. Эта прямая всегда проходит через начало координат, т. е. через точку $O(0;0)$. Коэффициент k называется угловым коэффициентом. Равен он тангенсу угла наклона, образуемого прямой с положительным направлением оси $Ox$ (рис. 1), т. е. $k = tg\alpha$. Если учесть, что тангенс острого угла есть величина положительная, а тангенс тупого угла – величина отрицательная, то можно очень быстро представить расположение прямой на плоскости.

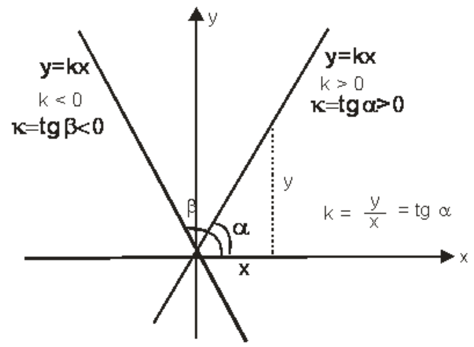



Рис. 1. Геометрический смысл углового коэффициента $k$

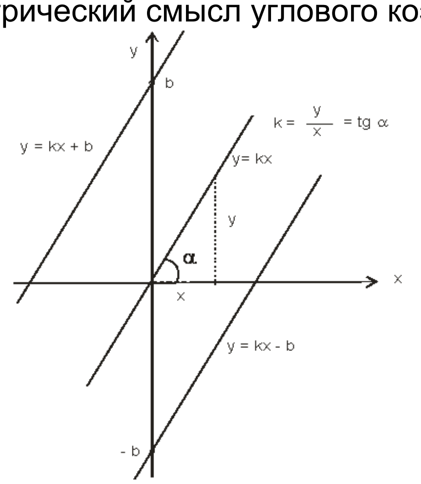



Рис. 2. Построение графика прямой $y = kx + b$

Прямая, заданная уравнением $y = kx + b$, параллельна прямой, описанной уравнением $y = kx$. Коэффициент $b$ есть величина отрезка, отсекаемого прямой $y = kx + b$ на оси $Oy$. Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. Для того, чтобы построить график прямой $y = kx + b$, зная график прямой $y = kx$, надо прямую $y = kx$ параллельно поднять на величину

$b$ относительно начала координат, если $b>0$. Если же величина $b$ отрицательная, тогда прямую $y=kx$ надо параллельно опустить на величину $b$ относительно начала координат (рис. 2).

***Общее уравнение прямой на плоскости***

Линейное уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой на плоскости.

Если коэффициент $C=0$, то прямая, уравнение которой в этом случае записывается $Ax+By=0$, проходит через начало координат.

Важную роль выполняют коэффициенты $A$, $B$. Вектор $\vec{n}\,(A;\,B)$, координатами которого являются эти числа, называется *нормальным* вектором прямой, заданной уравнением $Ax+By=0$.

Следует обратить внимание на тот факт, что $A$ - это проекция нормального вектора $\vec{n}\,(A;\,B)$ на ось $Ox$, $B$ - это проекция нормального вектора $\vec{n}\,(A;\,B)$ на ось $Oy$.

Вектор $\vec{n}\,(A;\,B)$, начало которого совпадает с началом координат, задает общее расположение прямой на плоскости: искомая прямая перпендикулярна вектору $\vec{n}\,(A;\,B)$

***Взаимное расположение прямых на плоскости***

На плоскости заданы прямые $L_1$, $L_2$ общими уравнениями:

$L_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0;\qquad L_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.$

Если выполнены условия $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые $L_1$, $L_2$ совпадают.

Если выполнены условия $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые $L_1$, $L_2$ параллельны.

Векторы $\vec{n}_1(A_1;\,B_1)$, $\vec{n}_2(A_2;\,B_2)$ - нормальные векторы прямых $L_1$ и $L_2$ соответственно.

Если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ обращается в ноль, т. е. $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, то прямые $L_1$ и $L_2$ перпендикулярны.

Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$ в координатной форме:

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

***Уравнение прямой, проходящей через точку, с заданным угловым коэффициентом***

На плоскости дана точка $M_0(x_0;\,y_0)$. Прямая, угловой коэффициент $k$ которой задан, проходит через эту точку $M_0(x_0;\,y_0)$ (рис. 6).

Уравнение ее имеет вид:

$$y-y_0=k\,(x-x_0)$$

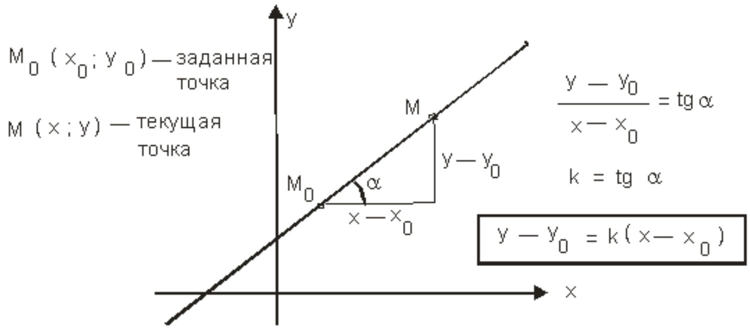



Рис. 6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$, с заданным угловым коэффициентом k

***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки***

На плоскости даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через эти точки, очень легко написать. На прямой возьмем текущую, т. е. любую, точку $M(x; y)$. Построим два вектора $\overrightarrow{M_1M}\ (x - x_1; y - y_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. По построению эти векторы коллинеарны. Условие коллинерности – это пропорциональность одноименных координат векторов:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это и есть искомое уравнение.

Преобразуем полученное равенство:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Заметим, что отношение $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ есть ни что иное как угловой коэффициент k (рис. 7)^ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$.

Изменится ли уравнение прямой, если будем рассматривать векторы $\overrightarrow{MM_2}(x - x_2; y - y_2)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$?

Ведь в этом случае уравнение прямой должны записать как $\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1}$, или иначе $y - y_2 = k(x - x_2)$.

*Вывод*. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

***Уравнение прямой через две заданные точки* M₁ *и* M₂**

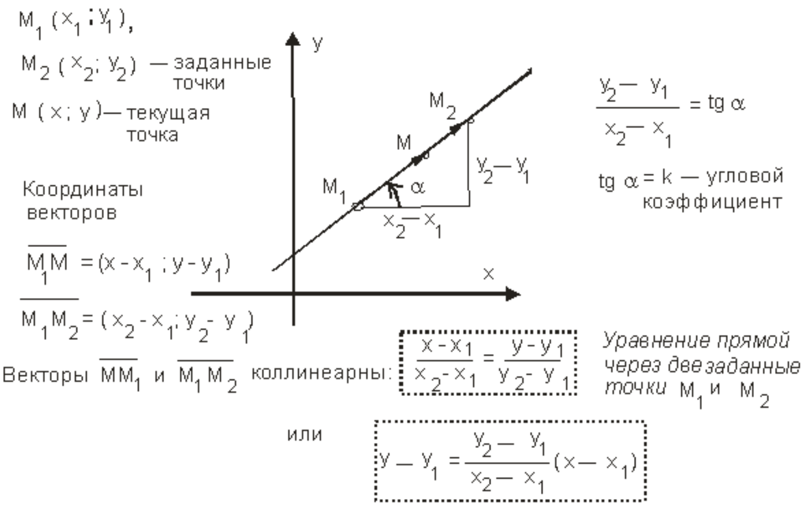



Рис. 7. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1$ и $M_2$

***Пример.*** Найти нормальный вектор прямой $3x - 2y + 6 = 0$.

*Решение*

Прямая задана общим уравнением $3x - 2y + 6 = 0$. Она не проходит через начало координат. Вектор $\vec{n}\,(3;-2)$ является нормальным вектором прямой, а это означает, что прямая перпендикулярна вектору $\vec{n}\,(3;-2)$.

*Ответ*: $\vec{n}\,(3;-2)$ - нормальный вектор прямой.

***Уравнение прямой в «отрезках»***

Предположим, прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Полагаем, что в уравнении коэффициент $C \neq 0$.

В противном случае задача упрощается, так как прямая проходит через начало координат.

Выполним тождественные преобразования:

$$Ax + By + C = 0 \;\Rightarrow\; Ax + By = -C \quad (C \neq 0) \;\Rightarrow\; \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь введены обозначения: $a = -C/A;\;\; b = -C/B.$

Уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и есть уравнение прямой «в отрезках».

Величина отрезка, который прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ отсекает на оси $Ox$ от начала координат, равна $a$.

Действительно, чтобы найти точку пересечения прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и оси $Ox$, надо решить систему, содержащую уравнения этих прямых:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \\ y = 0. \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{x}{a} = 1 \;\Rightarrow\; x = a.$$

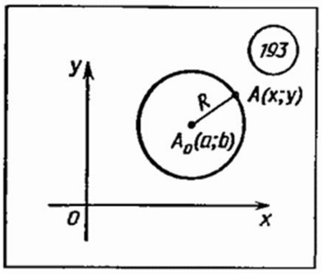
Аналогично можно показать, что величина отрезка, отсекаемого прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ на оси OY(x=0 – уравнение оси $_{OY}$) от начала координат, равна b. И теперь, чтобы построить прямую, записанную уравнением в «отрезках», надо в прямоугольной системе координат на оси OX от начала координат отложить отрезок величины a на оси OY от начала координат - отрезок величины b и, соединив их концы, получим искомый график прямой.

В уравнении $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ дроби $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{b}$ должны быть со знаками «+».

***Уравнение окружности***

Окружность с центром $A_0(a,b)$ и радиусом R задаётся уравнением:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

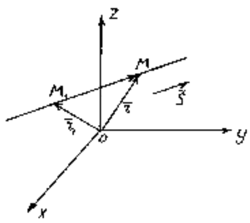



**Тема. Уравнения прямой и окружности в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве**

**План**

1. *Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой.*
2. *Канонические уравнения прямой.*
3. *Общие уравнения прямой, как линии пересечения двух плоскостей.*
4. *Угол между прямыми.*
5. *Взаимное расположение двух прямых в пространстве.*
6. *Угол между прямой и плоскостью*
7. *Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.*

***Прямая в пространстве. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой***




Положение прямой в пространстве вполне определяется заданием какой-либо её фиксированной точки $M_1$ и вектора $\vec{n}$, параллельного этой прямой.

*Определение.* Вектор $\vec{n}$, параллельный прямой, называется *направляющим* вектором этой прямой.

Итак, пусть прямая $l$ проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащую на прямой параллельно вектору $\vec{n}=m\vec{i}+q\vec{j}+p\vec{k}$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x,y,z)$ на прямой. Из рисунка видно, что $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{MM_1}$.

Векторы $\overrightarrow{MM_1}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, поэтому найдётся такое число $t$, что $\overrightarrow{MM_1}=t\vec{n}$, где множитель $t$ может принимать любое числовое значение в зависимости от положения точки $M(x,y,z)$ на прямой. Множитель $t$ называется параметром.

Обозначив радиус-векторы точек $M_1$ и $M$ соответственно через $\vec{r_1}=\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, получаем $\vec{r}=\vec{r_1}+t\vec{n}$.

Это уравнение называется *векторным* уравнением прямой.

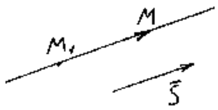
Оно показывает, что каждому значению параметра $t$ соответствует радиус-вектор некоторой точки $M$, лежащей на прямой.

Запишем это уравнение в координатной форме. Заметим, что $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r_1}=(x_1,y_1,z_1)$ и $t\vec{n}=(tx,ty,tz)$. Отсюда:

$$\begin{cases} x=x_1+tm, \\ y=y_1+tq, \\ z=z_1+tp \end{cases}.$$

Полученные уравнения называются *параметрическими уравнениями* прямой.

***Канонические уравнения прямой***




Пусть $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – точка, лежащая на прямой $l$, и $\vec{n}=m\vec{i}+q\vec{j}+p\vec{k}$ – её направляющий вектор. Вновь возьмём на прямой произвольную точку $M(x,y,z)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{MM_1}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$.

Ясно, что векторы $\overrightarrow{MM_1}$ и $\vec{n}$ коллинеарные, поэтому их соответствующие координаты должны быть пропорциональны, следовательно:

$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{q}=\dfrac{z-z_1}{p}$ – *канонические уравнения* прямой.

*Замечание*. Заметим, что канонические уравнения прямой можно было получить из параметрических, исключив параметр $t$.

Действительно, из параметрических уравнений получаем:

$$\frac{x-x_1}{m}=t,\ \frac{y-y_1}{q}=t,\ \frac{z-z_1}{p}=t \text{ или } \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{p}.$$

*Пример*. Записать уравнение прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ в параметрическом виде.

*Решение*.

Обозначим $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}=t$, отсюда

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1+2t, \\ z=1-t \end{cases}.$$

*Замечание.* Пусть прямая перпендикулярна одной из координатных осей, например оси Ох. Тогда направляющий вектор прямой $\vec{n}$ перпендикулярен Ох, следовательно, $m=0$. Следовательно, параметрические уравнения прямой примут вид:

$$\begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1 + tq, \\ z = z_1 + tp \end{cases}$$

Исключая из уравнений параметр $t$, получим уравнения прямой в виде

$$\begin{cases} x - x_1 = 0, \\ \dfrac{y - y_1}{q} = \dfrac{z - z_1}{p}, \end{cases}$$

Однако и в этом случае условимся формально записывать канонические уравнения прямой в виде $\dfrac{x - x_1}{0} = \dfrac{y - y_1}{q} = \dfrac{z - z_1}{p}$

Таким образом, если в знаменателе одной из дробей стоит нуль, то это означает, что прямая перпендикулярна соответствующей координатной оси.

Аналогично, каноническим уравнениям $\dfrac{x - x_1}{0} = \dfrac{y - y_1}{0} = \dfrac{z - z_1}{p}$ соответствует прямая перпендикулярная осям Ox и Oy или параллельная оси Oz.

***Общие уравнения прямой, как линии пересечения двух плоскостей***

Через каждую прямую в пространстве проходит бесчисленное множество плоскостей. Любые две из них, пересекаясь, определяют ее в пространстве. Следовательно, уравнения любых двух таких плоскостей, рассматриваемые совместно представляют собой уравнения этой прямой.

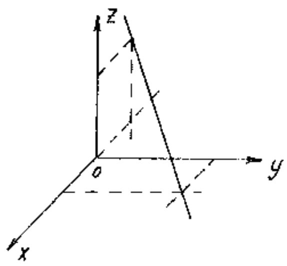
Вообще любые две не параллельные плоскости, заданные общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

определяют прямую их пересечения. Эти уравнения называются общими уравнениями прямой.

<u>Пример</u>.

Построить прямую, заданную уравнениями $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$



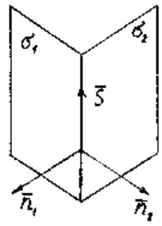

Для построения прямой достаточно найти любые две ее точки. Проще всего выбрать точки пересечения прямой с координатными плоскостями. Например, точку пересечения с плоскостью xOy получим из уравнений прямой, полагая *z=0*:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем точку $M_1(1,2,0)$.

Аналогично, полагая *y=0*, получим точку пересечения прямой с плоскостью xOz:

$$\begin{cases} x + z = 3, \\ x - z = -5 \end{cases}, \; M_2(-1,0,4)$$



От общих уравнений прямой можно перейти к её каноническим или параметрическим уравнениям. Для этого нужно найти какую-либо точку $M_1$ и направляющий вектор $\vec{n}$ прямой.

Координаты точки $M_1$ получим из данной системы уравнений, придав одной из координат произвольное значение. Для отыскания направляющего вектора, заметим, что этот вектор должен быть перпендикулярен к нормальным векторам обеих прямых:

$$\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k};\ \vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}.$$

Поэтому за направляющий вектор $\vec{n}$ прямой $l$ можно взять векторное произведение нормальных векторов:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

***Угол между прямыми***

Углом между прямыми в пространстве будем называть любой из смежных углов, образованных двумя прямыми, проведёнными через произвольную точку параллельно данным.

Пусть в пространстве заданы две прямые:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{p_1},\ \ l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Очевидно, что за угол φ между прямыми можно принять угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, q_1, p_1),\ \vec{s}_2 = (m_2, q_2, p_2)$, то по формуле для косинуса угла между векторами получим

$$\cos\varphi = \pm\frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + q_1q_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + q_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + q_2^2 + p_2^2}}$$

***Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых*** равносильны условиям параллельности и перпендикулярности их направляющих векторов $\vec{s}_1 = (m_1, q_1, p_1),\ \vec{s}_2 = (m_2, q_2, p_2)$.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма произведений соответствующих координат их направляющих векторов равна 0:

$$m_1m_2 + q_1q_2 + p_1p_2 = 0.$$

***Взаимное расположение двух прямых в пространстве***

Прямую в пространстве аналитически можно задать точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющим вектором **a**$\{a_1, a_2, a_3\}$.

По этим данным можно записать параметрические уравнения прямой:

$x= x_0+ta_1$ , $y=y_0+ta_2$, $z=z_0+ta_3$.

Плоскость в пространстве можно задать уравнением первой степени $ax+by+cz+d=0$.

Необходимые сведения из алгебры:

1. Два ненулевых вектора **a**$\{a_1, a_2, a_3\}$ и **b**$\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно зависимы (коллинеарны) тогда и только тогда, когда ранг $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 1.$

2. Три вектора **a**$\{a_1, a_2, a_3\}$, **b**$\{b_1, b_2, b_3\}$,}, **c**$\{c_1, c_2, c_3\}$ линейно зависимы (компланарны) тогда и только тогда, когда ранг $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} < 3$.

3. <u>Теорема Кронеккера-Капелли</u>. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

*Задача* 1. В пространстве аналитически заданы две прямые. Определить их взаимное расположение.

*Решение*. Пусть прямая *a* задана точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектором **a**$\{a_1, a_2, a_3\}$, а прямая *b* - точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектором **b**$\{b_1, b_2, b_3\}$.

Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг **A**$=r$, ранг **B**$=R$. Очевидно $1\le r \le R\le 3$.

Возможны случаи:

1). $r = R = 1$. Векторы **a** и **b** коллинеарны, вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ также им коллинеарен.

Прямые совпадают.

2).Векторы **a** и **b** коллинеарны, вектор им $\overrightarrow{M_0M_1}$ не коллинеарен. Прямые параллельны.

3). $r = R = 2$. Векторы **a** и **b** не коллинеарны, векторы **a,b** и $\overrightarrow{M_0M_1}$ компланарны.

Прямые пересекаются.

4).$r=2$, $R = 3$. Векторы **a** и **b** не коллинеарны, векторы **a,b** и $\overrightarrow{M_0M_1}$ не компланарны. Прямые скрещиваются.

*Задача* 2. В пространстве аналитически заданы две плоскости. Определить их взаимное расположение.

*Решение.* Пусть плоскости $П$ и $П_1$ заданы соответственно уравнениями:

$$ax+by+cz+d=0$$

(1)

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

Рассмотрим матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_2 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Пусть ранг **A**=$r$, ранг **B**=$R$. Очевидно $1\le r \le R\le 2$.

Возможны случаи:

1). $r=R=1$. Уравнения системы (1) зависимы (равносильны). Плоскости совпадают.

2). $r=R=2$. По теореме Кронекера-Капелли система (1) совместна. Плоскости имеют общие точки, но не совпадают. Значит, плоскости пересекаются по прямой.

3). $r=2$, $R=2$. По теореме Кронекера-Капелли система (1) не совместна. Плоскости не имеют общих точек (параллельны).

*Задача* 3. В пространстве аналитически заданы прямая и плоскость. Определить их взаимное расположение.

*Решение*. Пусть прямая $a$ задана точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектором $\mathbf{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, а плоскость $П$ уравнением $ax+by+cz+d=0$. Запишем параметрические уравнения прямой:

$$x= x_0+ta_1 ,\ \ y=y_0+ta_2,\ \ z=z_0+ta_3.$$

Подставим $x, y, z$ из уравнений прямой в уравнение плоскости, получим:

$$a(x_0+ta_1)+b(y_0+ta_2)+c(z_0+ta_3)+d=0$$

или $(aa_1 +ba_2 + ca_3)t + ax_0+by_0+ cz_0+d =0$

Введем обозначения: $p= aa_1+ba_2+ca_3$, $q = ax_0+by_0+ cz_0+d$, перепишем уравнение в виде $pt + q=0$.

При исследовании полученного уравнения с одним неизвестным возможны случаи:

1) $p\neq 0$. Уравнение имеет единственное решение. Прямая и плоскость имеют единственную общую точку (прямая пересекает плоскость).

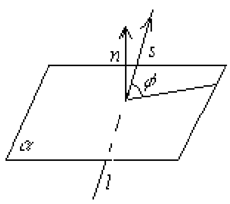
2) $p= q= 0$. Любое $t$ является решением уравнения. Все точки прямой лежат в плоскости.

3) $p=0$, $q\neq 0$. Уравнение не имеет решений. Прямая и плоскость не имеют общих точек (параллельны).

***Угол между прямой и плоскостью***

Углом между прямой и плоскостью будем называть угол, образованный прямой и её проекцией на плоскость. Пусть прямая и плоскость заданы уравнениями

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{p},\ \ \alpha: Ax+By+Cz+D=0$$




Рассмотрим векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$. Если угол между ними острый, то он будет равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$, где φ – угол между прямой и плоскостью.

Тогда $\cos\left(\vec{n},\vec{s}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$.

Если угол между векторами и $\vec{n}$ и $\vec{s}$ тупой, то он равен $\frac{\pi}{2}+\varphi$. Следовательно $\cos\left(\vec{n},\vec{s}\right)=-\sin\varphi$. Поэтому в любом случае $\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{s}\right)\right|$.

Вспомнив формулу вычисления косинуса угла между векторами, получим

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bq + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + q^2 + p^2}}.$$

***Условие перпендикулярности прямой и плоскости***

Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\vec{s}$ и нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости коллинеарны, т.е.

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{q} = \frac{C}{p}.$$

***Условие параллельности прямой и плоскости***

Прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$ перпендикулярны:

$$Am + Bq + Cp = 0.$$

## Тема. Приложение метода координат к решению задач школьного курса геометрии

### План

1. *Задачи на нахождение координат центра тяжести.*
2. *Задачи на смешанное и векторное произведения векторов.*

1. Рассмотрим сначала задачи, в которых применяется *метод координат в пространстве*. Начнем с задачи вспомогательного характера, которая часто используется при решении других задач.

**Задача 1**. Найти координаты центра тяжести (точки пересечения медиан) треугольника ABC, если в некоторой аффинной системе координат $O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ даны координаты его вершин:

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3).$$

*Решение*.

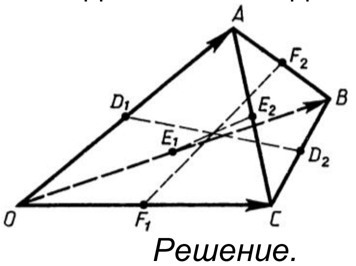
Пусть N — центр тяжести треугольника ABC, а *(x, y, z)* — координаты этой точки. Тогда $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (1).

Но векторы $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ являются радиус-векторами точек *N, A, B* и *C*, поэтому эти векторы в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ имеют координаты $\overrightarrow{ON}(x, y, z)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{OC} = (x_3, y_3, z_3)$.

Пользуясь формулой (1), получим:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \qquad (2).$$

**Задача 2**. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.




*Решение.*

Пусть OABC — данный тетраэдр, а $D_1, D_2;\ E_1, E_2;\ F_1, F_2$ – соответственно середины ребер $OA$ и $BC$; $OB$ и $AC$; $OC$ и $AB$.

Аффинную систему координат $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ выберем так, чтобы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB},\ \vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$.

В этой системе координат вершины тетраэдра имеют координаты $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

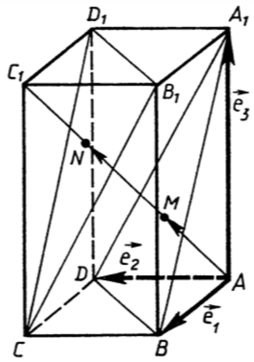
Найдем координаты середины M отрезка $D_1D_2$. Точки $D_1, D_2$ – середины отрезков $OA$ и $BC$, поэтому они имеют координаты $D_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $D_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, точка $M$ имеет координаты $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Точно так же находим координаты середин отрезков $E_1E_2$ и $F_1F_2$ и убеждаемся в том, что эти точки имеют те же координаты: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, поэтому они совпадают с точкой $M$.

**Задача 3.** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки $M$ и $N$ – центры тяжести треугольников $A_1BD$ и $B_1D_1C$.

Доказать, что точки $M$ и $N$ лежат на диагонали $AC_1$ параллелепипеда и делят эту диагональ на три равные части.




*Решение*.

Задача будет решена, если докажем, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC_1}$. Аффинную систему координат $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ выберем так, чтобы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD},\ \vec{e}_3 = \overrightarrow{AA_1}$.

В этой системе координат вершины параллелепипеда имеют координаты:

$$A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ C(1,1,0),\ D(0,1,0),\ A_1(0,0,1),\ B_1(1,0,1),\ C_1(1,1,1),\ D_1(0,1,1).$$

По формулам (2) находим координаты точек $M$ и $N$:

$$M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ N\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NC}$ имеют координаты:

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \overrightarrow{NC_1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC_1}$, поэтому точки M и N лежат на диагонали $AC_1$ и делят ее на три равные части.

2. Рассмотрим теперь примеры решения задач, в которых используются *смешанное и векторное произведения векторов*.

**Задача 4**. В данном параллелепипеде $OADBCA_1D_1B_1$ точки *P*, *Q* и *R* являются центрами граней, не содержащих точку *O*.

Найти отношение объема $V$ пирамиды $OPQR$ к объему $V_0$ данного параллелепипеда.

*Решение*.

Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}, \vec{c}=\overrightarrow{OC}$. По свойствам смешанного произведения, имеем:

$$V_0=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,\ V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}\right| \qquad (3).$$

Легко проверить, что векторы $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OR}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют координаты

$$\overrightarrow{OP}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{OR}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right).$$

По формуле, выражающей смешанное произведение через координаты векторов, имеем:

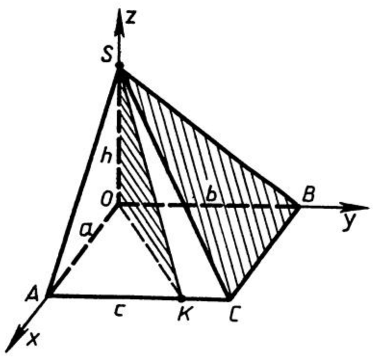
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$$

Учитывая равенство (3), получаем: $6V=\frac{1}{2}V_0$. Таким образом, $\frac{V}{V_0}=\frac{1}{12}$.

**Задача 5**. Дана четырехугольная пирамида *SOACB*, ребра *OA*, *OB* и *OS* которой взаимно перпендикулярны и имеют длины: $OA=a, OB=b, OS=h$.

Основанием пирамиды служит прямоугольник *OACB*, на стороне *AC* которого взята точка *K* так, что $AK=c$.

Найти угол $\varphi$ между плоскостями *SBC* и *SOK*.




*Решение*.

Прямоугольную правую систему координат *Oxyz* выберем так, как показано на рисунке. В этой системе координат вершины пирамиды и точка *K* имеют координаты:

$$O(0,0,0),\ A(a,0,0),\ B(0,b,0),\ C(a,b,0),\ S(0,0,h),\ K(a,c,0).$$

Угол $\varphi$ между плоскостями *SBC* и *SOK* равен углу между двумя векторами, перпендикулярными соответственно к этим плоскостям.

В качестве таких векторов могут быть выбраны векторы $\vec{p} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}\right]$ и $\vec{q} = \left[\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}\right]$, поэтому $\varphi = \left(\vec{p}, \vec{q}\right)$.

Найдем координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и по этим координатам вычислим $\cos\varphi$.

Векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OK}$ имеют координаты:

$$\overrightarrow{BC} = (a,0,0),\ \overrightarrow{SB} = (0,b,-h),\ \overrightarrow{OS} = (0,0,h),\ \overrightarrow{OK} = (a,c,0).$$

Найдём координаты векторов $\vec{p} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}\right]$ и $\vec{q} = \left[\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}\right]$ по формуле векторного произведения:

$$\vec{p} = (0, ah, ab);\ \vec{q} = (-hc, ah, 0).$$

Получаем:

$$\cos\varphi = \frac{ah}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{b^2+h^2}}.$$

## Тема. Кривые второго порядка на плоскости

**План**

*1. Алгебраическое уравнение второго порядка.*
*2. Эллипс*
*3. Гипербола.*
*4. Парабола*
5. Полярные координаты

Алгебраическим уравнением второго порядка называется уравнение вида: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$ где хотя бы один из коэффициентов A,B,C отличен от нуля. Линии, задаваемые такими уравнениями, будем называть кривыми второго порядка. Рассмотрим некоторые из них.

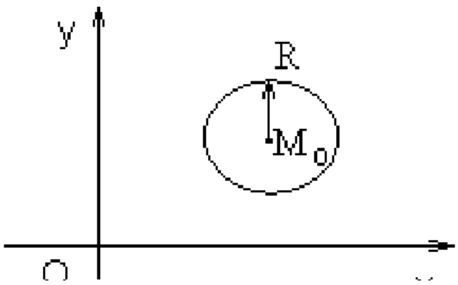



Рис.1. Окружность.

Под окружностью понимают геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки, называемой центром окружности. Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0)$ и некоторое число R ($R$ >0). Тогда уравнение окружности с центром в точке $M_0$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Если центр окружности $M_0$ находится в точке O(0,0), то уравнение будет иметь вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример. Установить вид кривых второго порядка, заданных уравнениями:

а) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

б) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7 = 0.$

*Решение*:

а) Перепишем данное уравнение, выделяя полный квадрат:

$$\underline{x^2 + 2\cdot 3x + 9} - 9 + \underline{y^2 - 2\cdot 2y + 4} - 4 - 3 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

Данное уравнение определяет окружность с центром в точке $M_0$(-3,2) и радиусом 4.

б) Преобразуем данное уравнение, также выделяя полный квадрат:

$$\underline{x^2 + 2\cdot 2x + 4} - 4 + \underline{y^2 - 2y + 1} - 1 + 5 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0.$$

Полученное равенство возможно лишь при x=-2, y=1. Данное уравнение определяет только одну точку с координатами x=-2, y=1. M(-2,1).

в) Преобразуем данное уравнение аналогично:

$$\underline{x^2 - 2x + 1} - 1 + \underline{y^2 + 2\cdot 2y + 4} - 4 + 7 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = -2.$$

Это уравнение не имеет решения. Следовательно, не существует точек, удовлетворяющих данному уравнению.

***Эллипс***

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

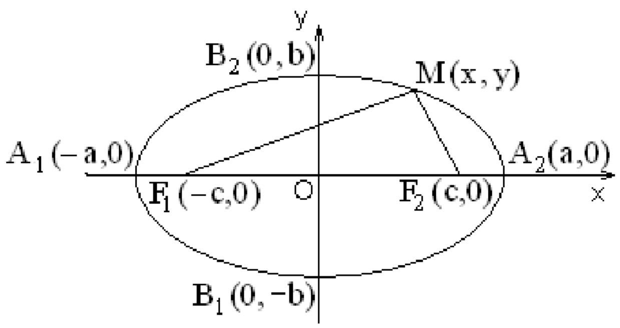



Рис.2. Эллипс.

Обозначим фокусы $F_1$ и $F_2$, расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c.$ Пусть

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a, \quad |F_1O| = |OF_2| = c.$$

С помощью алгебраических преобразований можно получить следующее уравнение рассмотренного эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.2.1)$$

где $b^2 = a^2 - c^2 > 0,$ так как $a > c.$

Уравнение (5.2.1) называется каноническим уравнением эллипса. Точка O(0,0) является центром эллипса. Величины a и b (где a>0 и b>0) называются полуосями эллипса (отрезки 2a и 2b являются, соответственно, осями эллипса). Центр эллипса может находиться в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение эллипса с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и осями, параллельными координатным осям, имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Пример. Показать, что уравнение $4x^2+9y^2-16x-18y-11=0$ определяет эллипс. Сделать чертеж.

*Решение*.

Преобразуем данное уравнение, выделяя полный квадрат:

$$4x^2-16x+9y^2-18y-11=0 \Rightarrow$$

$$4(x^2-2\cdot 2x+4-4)+9(y^2-2y+1-1)-11=0 \quad \Rightarrow$$

$$4((x-2)^2-4)+9((y-1)^2-1)-11=0 \quad \Rightarrow \quad 4(x-2)^2+9(y-1)^2=36.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 36:

$$\frac{4(x-2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $M_0(2,1)$ и a = 3, b = 2.

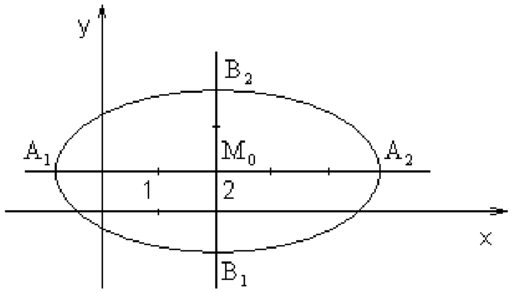



Рис.3. Построение эллипса.

Для построения эллипса отметим в плоскости Оху точку $M_0(2,1)$ и проведем через эту точку прямые, параллельные осям ох и оу. Отметим на горизонтальной прямой точки $A_1$ и $A_2$, отстоящие от $M_0$ на 3 единицы; на вертикальной прямой – точки $B_1$ и $B_2$, отстоящие от $M_0$ на 2 единицы. Точки $A_1, B_2, A_2, B_1$ соединим плавной линией. Эллипс построен.

***Гипербола***

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Обозначим фокусы $F_1$ и $F_2$, расстояние между ними $|F_1F_2|=2c$. Пусть $\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2a$. Тогда канонические уравнения гиперболы имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

где $b^2=c^2-a^2>0$, так как $a<c$

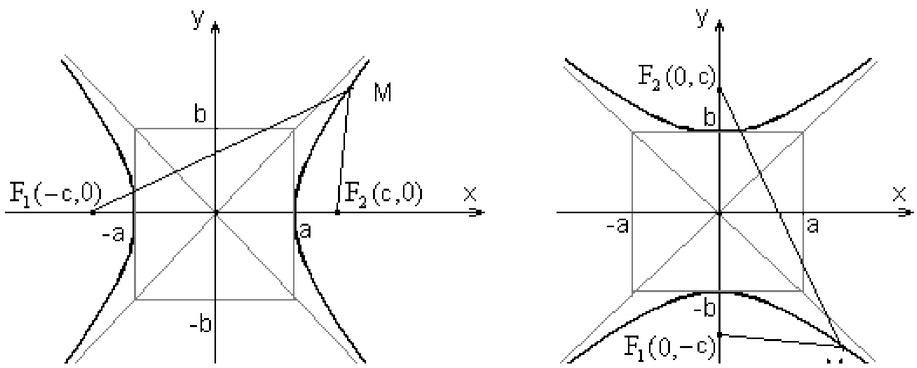



Рис.4. Гиперболы.

Гиперболы, изображенные на рисунке 4, имеют центр симметрии точку O(0,0) и две оси симметрии ох и оу. Величины a и b (где a>0 и b>0) называются полуосями гиперболы. При этом та ось симметрии, которую пересекает гипербола, называется действительной осью, а другая ось симметрии – мнимой. Если центр гиперболы находится в точке $M_0(x_0, y_0)$, а оси параллельны координатным осям, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1.$$

Пример. Показать, что уравнение $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$ определяет гиперболу. Сделать рисунок.

*Решение*.

Преобразуем данное уравнение, выделяя полный квадрат.

$$9x^2 + 18x - 4y^2 + 8y - 31 = 0$$

$$9(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) - 31 = 0$$

$$9(x^2 + 2x + 1 - 1) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 31 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$9((x+1)^2 - 1) - 4((y-1)^2 - 1) - 31 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 36.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 36.

$$\frac{9(x+1)^2}{36} - \frac{4(y-1)^2}{36} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Получили уравнение гиперболы вида (5.3.3) с центром в точке $M_0$(-1,1) и a = 2, b=3.

Для построения гиперболы отметим в плоскости Оху точку $M_0$(-1,1) и проведем через эту точку прямые, параллельные ох и оу. Отметим на горизонтальной прямой точки $A_1$ и $A_2$, отстоящие от $M_0$ на 2 единицы; на вертикальной прямой – точки $B_1$ и $B_2$, отстоящие от $M_0$ на 3 единицы. Построим прямоугольник, проходящий через указанные точки со сторонами, параллельными координатным осям. Проведем в этом прямоугольнике две диагонали. Искомая гипербола проходит через точки $A_1$ и $A_2$, асимптотически приближаясь к диагоналям прямоугольника.

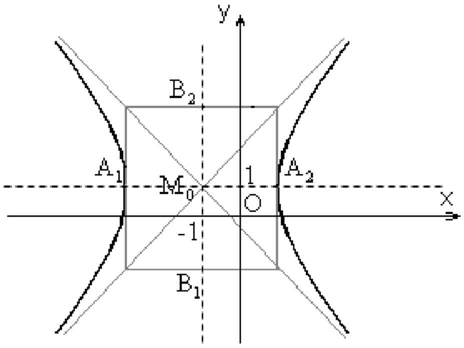


Рис.5. Построение гиперболы.

***Парабола***

Параболу можно определить как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной прямой, называемой директрисой, и данной точки, называемой фокусом.

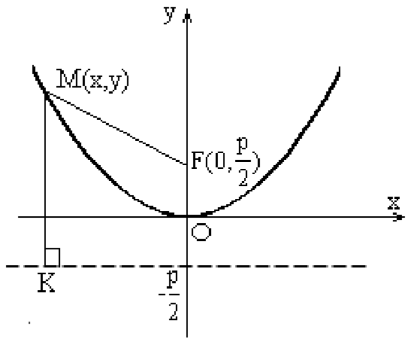


Рис.6. Парабола.

Пусть фокус F имеет координаты $F(0,\dfrac{p}{2}),$ уравнение директрисы $y=-\dfrac{p}{2};$ | MK | = | MF | . Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$x^2 = 2py$$

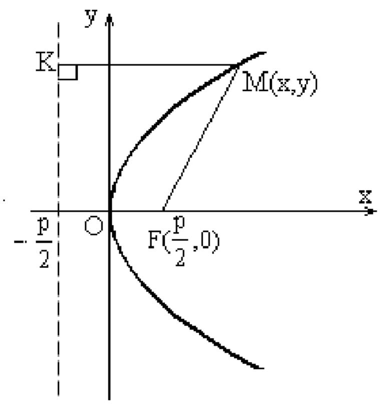


Рис.7. Парабола.

Если фокус имеет координаты $F(\dfrac{p}{2},0)$ (Рис.36), а уравнение директрисы $x=-\dfrac{p}{2},\quad |KM|=|MK|,$ то каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px$$

Точка O(0,0) является вершиной параболы. Если вершина параболы находится в точке $M_0(x_0, y_0),$ то уравнение параболы имеет вид:

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$$

или $(y - y_o)^2 = 2p(x - x_0)$

Пример. Показать, что уравнение

$y^2 -$ 4x - 2y – 11 = 0 определяет параболу.Сделать чертеж.

Решение.

Преобразуем данное уравнение, выделяя полный квадрат:

$y^2$ - 2y +1 – 1 – 4x – 11 = 0 ,

$$(y-1)^2 = 4x + 12 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = 4(x+3).$$

Получили уравнение параболы вида (5.4.4) с вершиной $M_0$(-3, 1); $p = \frac{4}{2} = 2.$ Построим директрису. Для этого проведем прямую, параллельную оси оу и отстоящую от вершины на $\frac{p}{2} = \frac{2}{2} = 1.$ Ее уравнение x = - 4. Фокус параболы имеет координаты F(-2, 1). | MK| = | MF|.

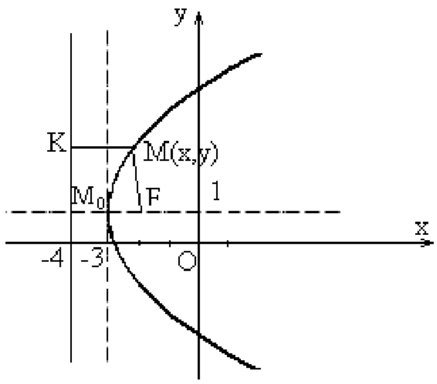



Рис.8. Построение гиперболы.

***Полярные координаты***

Полярная система координат на плоскости определяется заданием некоторой точки O, луча OP, исходящего из этой точки, и единицы масштаба. Точка O называется полюсом, а луч OP – полярной осью.

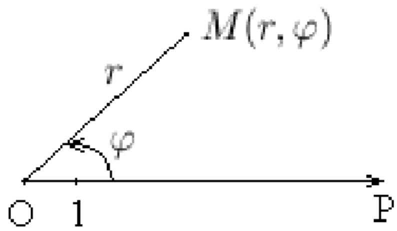



Рис.9. Полярные координаты.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим через r и $\varphi$ ее расстояние от полюса и угол, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки до направления OM. Эти числа называются полярными координатами точки M, причем величина r называется полярным радиусом, а $\varphi$ - полярным углом точки M. По определению величина $r \geq 0.$ Задание пары чисел $(r, \varphi)$ однозначно определяет точку M на плоскости.

Если ограничить изменение угла $\varphi$ пределами $0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ то и обратно каждой точке плоскости однозначно соответствует пара чисел (r, $\varphi$). Исключение составляет только полюс O, для которого r = 0, а угол $\varphi$ неопределенный.

На практике обычно обобщают понятие полярных координат. Для этого углы $\varphi$, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке, считают отрицательными и допускают, что - $\infty < \varphi < \infty$. При этом, правда, различным парам чисел $(r, \varphi + 2\pi n)$ будут соответствовать одни и те же точки плоскости (здесь n – любое целое число). Однако это не приводит к каким-либо противоречиям.

Если выбрать декартову систему координат так, чтобы ее начало O совпадало с полюсом полярной системы, а ось ox шла по полярной оси OP, то между полярными координатами (r, $\varphi$) и декартовыми координатами (x,y) для каждой точки M будет осуществляться следующая связь:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Из этих формул следует, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Замечание: Формула $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ определяет два угла $\varphi$ и $\varphi + \pi$ (в пределах от 0 до $2\pi$). Формулы (6.1.3) уточняют, какой из этих углов следует выбрать. Из формулы $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вытекает, что надо брать тот угол $\varphi$, для которого $\cos\varphi$ имеет тот же знак, что и x.

## Тема. Общее уравнение квадрики

### План

1. *Билинейные функции и их матрицы. Билинейные формы.*
2. *Квадратичные функции. Квадратичная форма от n переменных.*
3. *Замена переменных. Матрица замены.*
4. *Канонический вид квадратичной формы.*
5. *Инерция квадратичных форм.*
6. *Квадрика в аффинном пространстве.*

**Определение.** Пусть V – линейное пространство над полем F.

*Билинейной функцией* на пространстве V называется отображение B: V×V− F, линейное по каждому аргументу, т.е. такое, что

(1) (∀x,y,z∈V)(∀λ∈F)(B(x+y,z)=B(x, z)+B(y, z), B(λx, z) = λB(x, z)) (*линейность по первому аргументу);*

(2) (∀x,y,z∈V)(∀λ∈F)(B(x, y+z)=B(x, y)+B(x, z), B(x, λz)=λB(x, z)) *(линейность по второму аргументу)*.

Примером билинейной функции является скалярное произведение на евклидовом пространстве.

Вычислим значение билинейной функции B на векторах $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j$, которые линейно выражаются через системы $(e_1, e_2, \ldots e_m)$ и

$(f_1, f_2, \ldots f_n)$ соответственно. Имеем $B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{m} B\left(x_i e_i \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i B\left(e_i \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right)$, следовательно:

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j B(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, f_j)$$

Получили формулу: $B\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, f_j)$ (1).

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, B – билинейная функция на V.

**Определение**. Пусть $C = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ – базис пространства V. Положим $\beta_{ij} = B(c_i, c_j)$. *Матрицей билинейной функции* B в базисе C называется матрица $(\beta_{ij})_{n\times n}$.

Обозначение: $B_C,\ B \leftrightarrow_C B$.

Вычислим значение билинейной функции B на векторах $x = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j c_j$ через их столбцы координат $[x]_C, [y]_C$ и матрицу функции B и матрицу функции B в базисе C, используя формулу (1) сл.2:

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i c_i, \sum_{j=1}^{n} y_j c_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(c_i, c_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \beta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_j\right) = [x]_C^T \cdot B_C \cdot [y]_C^T \qquad (2)$$

Формой принято называть однородный многочлен от нескольких переменных, т.е. многочлен, у которого все одночлены имеют одинаковые степени. Например, линейная форма от n переменных над полем F имеет вид $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \in F$. При вычислении значения билинейной функции по координатам векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ в базисе получается значение билинейной формы (т.е. формы от набора переменных, разбитого на две равные части так, что форма линейна по каждой части набора переменных) от координат векторов

**Определение**. Билинейной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ над полем $F$ называется многочлен

$$b = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i y_j,\ \beta_{ij} \in F;\ \ i, j \in \overline{1, n}$$

Например, билинейная форма

$$x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 5x_1 y_3 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2 - 6x_2 y_3 - 9x_3 y_1 + 8x_3 y_2 - 7x_3 y_3$$

имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -6 \\ -9 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, B – билинейная функция на V

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, B – билинейная функция на V. Пусть C и C' – базисы пространства V, $B_C,\ B \leftrightarrow_C B;\ B_{C'},\ B \leftrightarrow_{C'} B'$.

Выясним связь между матрицами B и $B'$. Обозначим через T матрицу перехода от базиса C к базису C'. Пусть x, y ∈ V. Так как $[x]_C = T\cdot[x]_{C'},\ [y]_C = T\cdot[y]_{C'}$, с помощью формулы (2) сл.3 получаем:

$$[x]_C^T \cdot B_{C'} \cdot\ [y]_{C'} = B(x,y) = [x]_C^T B_C \cdot [y]_C = (T\cdot[x]_{C'})^T \cdot B_C \cdot T\cdot[y]_{C'} =$$
$$= [x]_{C'}^T \cdot T^T \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'}$$

Следовательно, для любых x, y∈V справедливо

$$[x]_C^T \cdot B_{C'} \cdot\ [y]_{C'} [x]_{C'}^T \cdot T^T \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'}\ .$$

Таким образом, получаем следующую формулу: $B_{C'} = T^T \cdot B_C \cdot T$ (3).

**Определение**. Билинейная функция B называется *симметричной*, если

$$(\forall x, y \in V) B(x,y) = B(y,x)$$

**Предложение.** Следующие условия эквивалентны для билинейной функции B:

(1) B является симметричной билинейной функцией;

(2) матрица B билинейной функции B в любом базисе является симметрической.

**Теорема.** Пусть V – n-мерное евклидово пространство. Для любой симметричной билинейной функции B на V существует ортонормированный базис пространства V, в котором B имеет диагональную матрицу.

**Определение.** Квадратичной функцией на линейном пространстве V называется отображение K: V→F, для которого существует билинейная функция B на V такая что K(x) = B(x,x).

Матрицей квадратичной функции K в базисе C называется матрица билинейной функции B в этом базисе.

Из формулы (2) получаем формулу для вычисления значения квадратичной функции от вектора:

$$K(x) = [x]_C^{\ T} \cdot B_C \cdot [x]_C \quad (4).$$

При изменении базиса матрица квадратичной функции изменяется в соответствии с формулой (3).

Очевидно, что если квадратичная функция K(x) определена с помощью билинейной функции B(x,y), то симметричная билинейная функция $\frac{1}{2}(B(x,y) + B(y,x))$ определяет ту же самую квадратичную функцию K(x).

**Предложение**. Симметричная билинейная функция определяется по заданной с ее помощью квадратичной функции однозначно.

**Следствие.** Пусть V – n-мерное евклидово пространство. Для любой квадратичной функции K существует ортонормированный базис пространства V, в котором K имеет диагональную матрицу.

**Определение.** Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем F называется многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$, где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in F;\ i, j \in \overline{1,n}$

Матрицей квадратичной формы называется матрица $(\alpha_{ij})_{n\times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Квадратичная форма служит для вычисления значения квадратичной функции по координатам вектора в данном базисе. Квадратичная функция определяет семейство эквивалентных друг другу квадратичных форм, по одной для каждого базиса. При переходе к другому базису матрица квадратичной формы изменяется в соответствии с формулой (3).

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – квадратичная форма над числовым полем F.

**Определение.** Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ – два набора переменных. Система равенств

$$\begin{cases} x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{21}y_2 + \ldots + \tau_{n1}y_n, \\ x_2 = \tau_{12}y_1 + \tau_{22}y_2 + \ldots + \tau_{n2}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \tau_{1n}y_1 + \tau_{2n}y_2 + \ldots + \tau_{nn}y_n, \end{cases},$$

где $\tau_{ji} \in F;\ i, j \in \overline{1,n}$, называется *заменой переменных*.

Матрицей замены называется квадратная матрица $T = (\tau_{ij})_{n \times n}$. Замена называется *невырожденной*, если $|T| \neq 0$.

Замену можно кратко записать в матричной форме:

$$X = T \cdot Y,\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,\ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T.$$

При подстановке в квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ их выражений из замены переменных и выполнении необходимых преобразований получается новая квадратичная форма $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Используя матричное представление, можно найти связь между этими формами (повторив вывод формулы (3)). Имеем в силу (5)
$f(X) = X^T \cdot A \cdot X = (T \cdot Y)^T \cdot A \cdot T \cdot Y = Y^T \cdot T^T \cdot A \cdot T \cdot Y = g(Y)$), откуда следует, что g(Y ) имеет матрицу $B = T^T \cdot A \cdot T$.

**Определение.** Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *эквивалентна* квадратичной форме $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, если существует невырожденная замена переменных $X = T \cdot Y$, которая переводит форму $f(X)$ в $g(Y)$.

Определенное только что отношение является отношением эквивалентности.

**Определение**. Рангом квадратичная формы называется ранг ее матрицы. Обозначение: r(f).

**Предложение**. Если квадратичные формы эквивалентны, то их ранги совпадают.

Предложение позволяет определить ранг квадратичной функции как ранг любой матрицы этой функции. Аналогично можно определить ранг билинейной функции.

**Определение**. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет канонический вид, если при $i \neq j$ все коэффициенты при $x_i x_j$ равны 0.

При F = R форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет нормальный вид, если она имеет канонический вид и ненулевые коэффициенты при квадратах имеют модуль 1 (соотв. равны 1).

Очевидно, что квадратичная форма имеет канонический вид тогда и только тогда, когда ее матрица диагональная. Ранг квадратичной формы в каноническом виде равен числу ее ненулевых коэффициентов.

**Теорема.** Для любой квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем F характеристики, отличной от 2 существует невырожденная замена переменных, которая приводит эту форму к каноническому виду.

**Теорема.** Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем R. В любом нормальном виде формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем R количество слагаемых с коэффициентом 1 и количество слагаемых с коэффициентом –1 постоянны и не зависят от способа приведения.

**Определение**. Количество коэффициентов 1 (соотв. –1) в нормальном виде квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ее *положительным* (соотв. *отрицательным*) *индексом инерции*.

**Следствие**. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – квадратичные формы над полем R. Для того, чтобы эти формы были эквивалентны над полем R, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые положительные и одинаковые отрицательные индексы инерции.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем R. Она определяет функцию от нескольких переменных, которую будем обозначать так же.

**Определение**. Форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно определенной, если для любых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in R$ из $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \ldots + \gamma_n^2 > 0$ следует $f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) > 0$.

**Теорема**. Следующие условия эквивалентны для квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем R:

(1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является положительно определенной;

(2) в любом каноническом виде формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;

(3) в некотором каноническом виде формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;

(4) $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ – нормальный вид формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем R.

**Определение**. Пусть $A \in R^{2\times 2}$. Минор матрицы A, стоящий в ее первых m строках и первых m столбцах, называется *угловым главным минором* матрицы A.

Обозначение: $\Delta_m$.

**Теорема**. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма над полем R с матрицей A. Форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда у матрицы A все угловые главные миноры $\Delta_m$ $\left(m \in \overline{1,n}\right)$ положительны.□

**Теорема**. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – положительно определенная, $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – произвольная квадратичные формы над полем R. Тогда существует невырожденная замена переменных, которая приводит форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к нормальному, а форму $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ к каноническому виду.

Пусть V – аффинное пространство над полем F размерности n. Пусть $A \in F^{n\times n}$ – ненулевая симметрическая матрица, $b \in F^{n,}$ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – столбец неизвестных.

Уравнение $x^T \cdot A \cdot x + b \cdot x + \lambda = 0$ (6) алгебраическое уравнение 2-й степени с n неизвестными.

**Определение**. *Квадрикой* в аффинном пространстве V называется геометрический образ алгебраического уравнения 2-й степени с n неизвестными относительно некоторого репера $\left(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n\right)$.

**Теорема**. При изменении репера уравнение квадрики, заданной исходным уравнением (1) остается алгебраическим уравнением 2-й степени с n неизвестными.

За счет изменения репера уравнение (1) может быть приведено к одному из следующих видов $\left(r=r(A),\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r,\mu_{r+1}\in F\setminus\{0\},\ \delta\in F\right)$:

1) $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_r y_r^2+\delta=0,$

2) $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_r y_r^2+\mu_{r+1}y_{r+1}=0$.

## Тема. Цилиндры и конусы. Эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды

### План

1. *Каноническое уравнение эллипсоида.*
2. *Метод сечений.*
3. *Каноническое уравнение однополостного гиперболоида.*
4. *Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.*
5. *Каноническое уравнение эллиптического параболоида.*
6. *Каноническое уравнение параболического параболоида.*

**Определение**. *Эллипсоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0\,.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипсоида*.

Отметим, что при $a=b=c$ приведенное уравнение равносильно уравнению x2

$x^2+y^2+z^2=a^2$, которое, как известно из школьного курса, задает сферу радиуса a с центром в начале координат.

Таким образом, сфера является частным случаем эллипсоида (подобно тому, как окружность есть частный случай эллипса).

Исследуем форму эллипсоида, применив так называемый *метод сечений*.

Суть этого метода состоит в следующем. Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям (эти плоскости имеют уравнения вида *x=h, y=h и z=h*, где *h* – некоторая константа). В сечениях получаются кривые, вид которых мы распознаем. Проведя достаточно много таких сечений, мы в итоге получим представление о форме поверхности.

Кривые, получающиеся в сечении той или иной поверхности плоскостями с уравнениями вида *w=h* будем писать только уравнение *F(x, y)=0* и называть его уравнением полученной кривой внутри плоскости *w=h* (или просто плоскостным уравнением этой кривой).

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями вида z=h. Получим кривую, которая внутри этой плоскости задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\ .$$

При |h|> c эта кривая является пустым множеством, при |h| = c – точкой, а при |h|<c – эллипсом с плоскостным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1\ .$$

При h=0 полуоси этого эллипса имеют наибольшие значения (равные a и b), с ростом |h| они уменьшаются и стремятся к 0 при |h| → c. Абсолютно аналогично устроены сечения эллипсоида плоскостями вида x=h и y=h (надо только соответствующим образом заменить неизвестные и параметры a, b, c в уравнении получающегося эллипса).

Форма эллипсоида представлена на рис. 1.

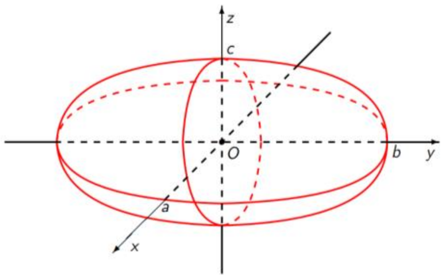



Рис. 1.

**Определение**. *Однополостным гиперболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

Изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью *z*=h получается эллипс с полуосями $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Значения полуосей минимальны при *h=0* и возрастают с ростом |*h*|.

В сечении плоскостью *x=h* получается:

-при |*h*|<*a* – гипербола, задаваемая внутри этой плоскости уравнением

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1\ ;$$

действительной и мнимой осями гиперболы являются проекции осей *Oy* и *Oz* соответственно на плоскость *x=h*, полуоси гиперболы максимальны при *h=0* и убывают с ростом *h*;

-при *h*=±*a* – пара пересекающихся прямых, задаваемых внутри плоскости *x=h* уравнениями $y=\frac{b}{c}z$ и $y=-\frac{b}{c}z$;

-при |*h*|>*a* – гипербола, задаваемая плоскостным уравнением

$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1\ ;$$

действительной и мнимой осями гиперболы являются проекции осей *Oz* и *Oy* соответственно на плоскость *x=h*; полуоси гиперболы возрастают с ростом *h*.

Наконец, сечения плоскостями вида *y=h* устроены аналогично сечениям плоскостями вида *x=h*. В целом однополостный гиперболоид выглядит так, как показано на рис. 2.

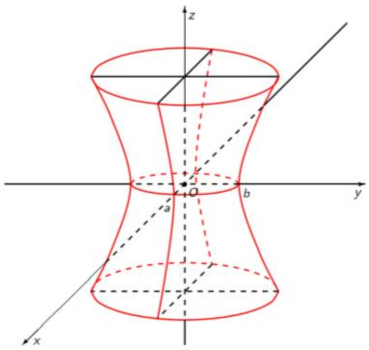



Рис. 2.

**Определение**. *Двуполостным гиперболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ a,b,c>0$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*.

Как и предыдущих случаях, изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью *z=h* получается кривая, которая внутри этой плоскости задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{h^2}{c^2}\ .$$

Если $|h|<c$, то эта кривая представляет собой пустое множество; если $|h|=c$, то кривая является точкой; если же $|h|>c$, то эта кривая является эллипсом с плоскостным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2\left(-1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(-1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1\ ,$$

полуоси которого растут с ростом $|h|$.

В сечении плоскостями *x=h* и *y=h* получаются гиперболы с плоскостными уравнениями

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$$

и

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}=1$$

соответственно, полуоси которых минимальны при *h=0* (т. е. при сечении координатными плоскостями *x=0* и *y=0*) и растут с ростом *h*.

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 3. Отметим, что эта поверхность состоит из двух частей, что и объясняет слово *двуполостный* в ее названии (аналогичное происхождение имеет слово *однополостный* в названии предыдущей поверхности).

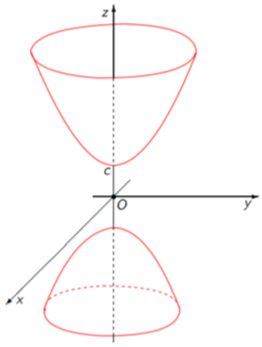



Рис. 3.

**Определение**. *Эллиптическим параболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,\ a,b>0,\ a\geq b\ .$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллиптического параболоида*.

В сечении этой поверхности плоскостью *z=h* получается:

-при *h<0* – пустое множество;

-при *h=0* – точка (начало координат);

-при *h>0* – эллипс с плоскостным уравнением $\frac{x^2}{2ha^2}+\frac{y^2}{2hb^2}=1$, полуоси которого растут с ростом *h*.

В сечении плоскостью *y=h* получается кривая с плоскостным уравнением

$$x^2=2a^2\left(z-\frac{h^2}{2b^2}\right)$$

Это парабола с параметром $a^2$, ветви которой направлены вверх, т.е. в положительном направлении оси *Oz*. При *h=0* ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением |*h*| она поднимается вдоль оси *Oz*.

Аналогичным образом устроено сечение плоскостью *x=h*: это парабола с плоскостным уравнением

$$y^2=2b^2\left(z-\frac{h^2}{2a^2}\right),$$

параметр которой равен $b^2$, а вершина совпадает с началом координат при *h=0* и поднимается вдоль оси *Oz* с ростом |*h*|.

Получающаяся поверхность изображена на рис. 4.

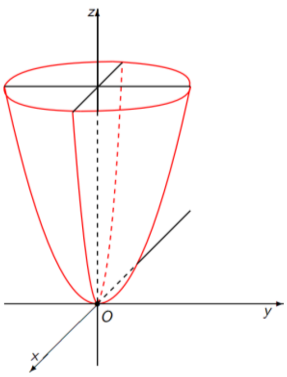



Рис. 4.

**Определение**. Гиперболическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,\ a,b>.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением гиперболического параболоида*.

Рассмотрим сечение этой поверхности плоскостью *z=h*. Получим кривую, которая внутри этой плоскости имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h$ .

При *h=0* в сечении получается пара пересекающихся прямых, которые в плоскости *Oxy* задаются уравнениями $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$.

При *h>0* сечение является гиперболой с плоскостным уравнением

$$\frac{x^2}{2ha^2}-\frac{y^2}{2hb^2}=1\ ,$$

у которой ортогональные проекции осей *Ox* и *Oy* на плоскость *z=h* являются действительной и мнимой осью соответственно, а полуоси гиперболы растут с ростом *h*.

При *h<0* также получается гипербола, только здесь полуоси гиперболы меняются ролями (по сравнению со случаем *h>0*), а ее полуоси растут с убыванием *h*.

Рассмотрим теперь сечение гиперболического параболоида плоскостью *y=h*. Получим кривую, задаваемую внутри плоскости уравнением

$$x^2=2a^2\left(z+\frac{h^2}{2b^2}\right).$$

Это парабола с параметром $a^2$ , ветви которой направлены вверх, т.е. в положительном направлении оси *Oz*. При *h=0* ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением |*h*| она поднимается вдоль оси *Oz*.

Аналогичная картина получается при сечении плоскостью *x=h*: вновь возникает парабола, которая теперь имеет плоскостное уравнение

$$y^2=-2b^2\left(z-\frac{h^2}{2a^2}\right)$$

Ее параметр равен $b^2$ , ветви параболы направлены вниз (в отрицательном направлении оси *Oz*). При *h=0* вершина параболы совпадает с начало координат, а с увеличением |*h*| она опускается вдоль оси *Oz*.

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 5.

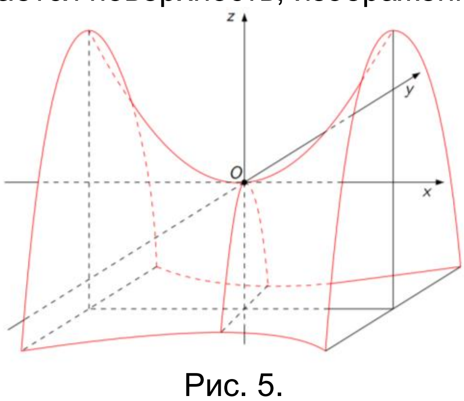



Рис. 5.

**Тема. Классификация квадрик в пространстве**

**План**

1. *Квадрики в пространстве. Примеры.*
2. *Теорема о видах квадрик в пространстве.*

**Определение**. *Квадрикой* в пространстве (или поверхностью второго порядка) называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению 2-го порядка с тремя неизвестными, т. е. уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z = 0 \quad (1),$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ отличен от нуля.

***Примеры квадрик в пространстве***

Примерами квадрик в пространстве являются эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды.

Рассмотрим еще несколько уравнений вида (1) и выясним, какие квадрики они задают:

1. $x^2 - y^2 = 0$ – то уравнение задает пару пересекающихся плоскостей с уравнениями $x - y = 0$ и $x + y = 0$.

2. $x^2 - 1 = 0$ – это уравнение задает пару параллельных плоскостей с уравнениями $x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$.

3. $x^2 = 0$ –это уравнение, очевидно, равносильно уравнению $x = 0$ и потому задает плоскость; в теории квадрик в пространстве квадрику такого типа принято называть *парой совпавших плоскостей.*

4. $x^2 + y^2 = 0$ – это уравнение равносильно равенствам $x = y = 0$ и потому задает в пространстве *прямую (ось аппликат).*

5. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ –это уравнение равносильно равенствам $x = y = z0$ и потому задает в пространстве *точку (начало координат).*

6. $x^2 - 1 = 0$ – точек, координаты которых удовлетворяли бы этому уравнению, не существует. Поэтому его геометрическим образом является *пустое множество*.

**Теорема 1**. Всякая квадрика в пространстве является или цилиндром (эллиптическим, гиперболическим или параболическим), или конусом, или эллипсоидом, или гиперболоидом (однополостным или двуполостным), или параболоидом (эллиптическим или параболическим), или парой плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпавших), или прямой, или точкой, или пустым множеством.

**Доказательство**.

Пусть в системе координат *Oxyz* квадрика σ задается уравнением (1). Пусть уравнение (1) приведено к виду (2) (это всегда можно сделать, выполнив поворот системы координат на соответствующий угол)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \quad (2),$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Выделив полный квадрат по *x*, получим

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_2y + 2a_3z + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_{11}}$. Сделав замену неизвестных:

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases},$$

(геометрически ей соответствует сдвиг вдоль оси *Ox*), получим уравнение

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_2 y' + 2a_3 z' + a_0'' = 0,$$

не содержащее линейного слагаемого по *x*.

Аналогично, если $a_{22} \neq 0$ [соответственно $a_{33} \neq 0$], то сдвигом вдоль оси *Oy* [соответственно *Oz*] можно избавиться от линейного слагаемого по *y* [соответственно по *z*].

Таким образом, можно считать, что если в уравнении (2) отличен от нуля коэффициент при квадрате некоторой неизвестной, то в нем нет линейного слагаемого по той же неизвестной.

Если в (2) все три коэффициента при квадратах неизвестных отличны от 0, то мы пришли к уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0,\ A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0 \quad (3).$$

Если в (2) отличны от 0 ровно два коэффициента при квадратах неизвестных, то, сделав при необходимости соответствующую замену неизвестных, мы получим уравнение вида

$$Ex^2 + Fy^2 + 2Gz + H = 0,\ E \neq 0, F \neq 0 \quad (4).$$

Предположим, наконец, что в (2) отличен от 0 ровно один коэффициент при квадрате неизвестной. Можно считать, что этим коэффициентом является $a_{22}$ (в противном случае можно сделать соответствующую замену неизвестных). Таким образом, уравнение квадрики имеет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_3 z + a_0 = 0,\ a_{22} \neq 0 \quad (5).$$

Если $a_3 = 0$, получим уравнение вида

$$Ky^2 + 2Lx + M = 0,\ K \neq 0 \quad (6).$$

Если $a_1 = 0$, то мы придем к тому же результату, произведя замену *x* на *z*, а *z* на *x*. Пусть, наконец, $a_1 \neq 0,\ a_3 \neq 0$. Сделаем следующую замену

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha, \\ y = y', \\ z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha \end{cases} \quad (7).$$

Эта замена соответствует повороту на угол α вокруг оси *Oy*. Подставив правые части равенств (7) вместо *x, y* и *z* в (5) и проведя необходимые преобразования, получим

$$a_{22}(y')^2 + 2(a_1\cos\alpha + a_3\sin\alpha)x' + 2(-a_1\sin\alpha + a_3\cos\alpha)z' + a_0 = 0,\ a_{22} \neq 0$$

Выбрав в качестве α решение уравнения $-a_1\sin\alpha + a_3\cos\alpha$ (или, что эквивалентно, $ctg\,\alpha = \dfrac{a_1}{a_3}$), получим уравнение вида (6).

Итак, можно можем считать, что квадрика σ задается одним из уравнений (3), (4) и (6).

Дальнейшие рассмотрения естественно разбиваются на три случая.

**Случай 1**. Квадрика задается уравнением вида (3). Здесь возможны два подслучая. ***Подслучай 1.1.*** $D \neq 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-D/A} + \frac{y^2}{-D/B} + \frac{z^2}{-D/C} = -1 \qquad (8).$$

Если числа $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C} > 0$, то, введя обозначения

$$a = \sqrt{-\frac{D}{A}}, b = \sqrt{-\frac{D}{B}}, c = \sqrt{-\frac{D}{C}},$$

получим *каноническое уравнение эллипсоида*.

Предположим теперь, что среди чисел $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ есть два положительных и одно отрицательное.

Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B} > 0,\ -\frac{D}{C} < 0$ (в противном случае следует переименовать неизвестные).

Введя обозначения, получим *каноническое уравнение однополостного гиперболоида*.

Пусть теперь среди чисел $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ есть одно положительное и два отрицательных. Можно считать, что первые два из них отрицательны, а третье положительно (в противном случае, как и ранее, следует соответствующим образом переименовать неизвестные).

Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}, b = \sqrt{\frac{D}{B}}, c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим уравнение $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Умножив его на −1, получим каноническое *уравнение двуполостного гиперболоида*.

Наконец, если числа $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ отрицательны, то уравнение (8) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

***Подслучай 1.2.*** D=0. Ясно, что в этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/B} + \frac{z^2}{1/C} = 0 \qquad (9).$$

Если числа $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$ имеют один и тот же знак, то уравнение (9) имеет единственное решение *x=0, y=0, z=0*, и потому его геометрическим образом является *точка (начало координат)*.

Пусть теперь среди чисел $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Умножив, если потребуется, уравнение (9) на −1, можно добиться того, чтобы среди этих чисел было два положительных и одно отрицательное. Более того, можно считать, что $\frac{1}{A} > 0, \frac{1}{B} > 0, \frac{1}{C} < 0$ (в противном случае, как обычно, следует соответствующим образом переименовать неизвестные).

Введя обозначения $a=\sqrt{\frac{1}{A}},\ b=\sqrt{\frac{1}{B}},\ c=\sqrt{-\frac{1}{C}}$, мы получим *каноническое уравнение конуса.*

**Случай 2**. Квадрика задается уравнением вида (4). Здесь возможны три подслучая.

***Подслучай 2.1.*** $G\neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$Ex^2+Fy^2=-2Gz-H=-2Gz\left(z+\frac{H}{2G}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=y, \\ z'=z+\dfrac{H}{2G} \end{cases},$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси *Oz*. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $E(x')^2+F(y')^2=-2G'z$ или $\frac{(x')^2}{-G/E}+\frac{(y')^2}{-G/F}=2z'$ (10).

Предположим сначала, что числа $-\frac{G}{E},-\frac{G}{F}$ имеют одинаковый знак. Если оба этих числа отрицательны, то, умножив уравнение (10) на –1, а затем сделав замену неизвестных $x''=x',y''=y',z''=-z'$, мы придем к уравнению того же вида, в котором $-\frac{G}{E}>0,-\frac{G}{F}>0$. Поэтому можно сразу считать, что выполнены два последних неравенства. Можно считать также, что $-\frac{G}{E}\geq-\frac{G}{F}$ (в противном случае можно переименовать $x'$ в $y'$, а $y'$ в $x'$).

Введя обозначения $a=\sqrt{-\frac{G}{E}},b=\sqrt{-\frac{G}{F}}$, мы получим *каноническое уравнение эллиптического параболоида*.

Пусть теперь числа $-\frac{G}{E},-\frac{G}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{G}{E}>0,-\frac{G}{F}<0$, (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x''=x',y''=y',z''=z'$). Введя обозначения $a=\sqrt{-\frac{G}{E}},b=\sqrt{\frac{G}{F}}$, мы получим *каноническое уравнение гиперболического параболоида*.

***Подслучай 2.2.*** $G=0,H\neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{x^2}{-H/E}+\frac{y^2}{-H/E}=1 \qquad (11).$$

Предположим сначала, что $-\frac{H}{E}>0, -\frac{H}{F}>0$. Можно считать, что $-\frac{H}{E}\ge -\frac{H}{F}$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x'=y, y'=x, z'=z$). Введя обозначения $a=\sqrt{-\frac{H}{E}}, b=\sqrt{-\frac{H}{F}}$, мы получим *каноническое уравнение эллиптического цилиндра*.

Пусть теперь числа $-\frac{H}{E}, -\frac{H}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{H}{E}>0, -\frac{H}{F}<0$, (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x'=y, y'=x, z'=z$). Введя обозначения $a=\sqrt{-\frac{H}{E}}, b=\sqrt{\frac{H}{F}}$, мы получим *каноническое уравнение гиперболического цилиндра*.

Наконец, если $-\frac{H}{E}<0, -\frac{H}{F}<0$, то уравнение (11) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является *пустое множество*.

***Подслучай 2.3.*** $G=H=0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{x^2}{H/E}+\frac{y^2}{H/E}=0 \qquad (12).$$

Предположим сначала, что числа $\frac{1}{E}, \frac{1}{F}$ имеют одинаковые знаки. Ясно, что в этом случае решениями уравнения (12) являются тройки чисел вида *(0;0;z)* (где *z* — любое число) и только они. Следовательно, это уравнение задает *прямую (ось Oz)*.

Пусть теперь числа $\frac{1}{E}, \frac{1}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $\frac{1}{E}>0, \frac{1}{F}<0$.

Введя обозначения $a=\sqrt{\frac{1}{E}}, b=\sqrt{-\frac{1}{F}}$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0.$$

Геометрическим образом последнего уравнения является совокупность плоскостей $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

Очевидно, что главные векторы этих плоскостей, т. е. векторы $\overrightarrow{n_1}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},0\right)$ и $\overrightarrow{n_2}=\left(\frac{1}{a},-\frac{1}{b},0\right)$ не пропорциональны. Следовательно, эти плоскости пересекаются. Итак, в рассматриваемом случае квадрика есть *пара пересекающихся плоскостей*.

**Случай 3**. Квадрика задается уравнением вида (6). Здесь возможны два подслучая.

***Подслучай 3.1***. $L \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (6) в виде

$$y^2 = -\frac{2L}{K}x - \frac{M}{K} = -\frac{2L}{K}\left(x + \frac{M}{2L}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{M}{2L}, \\ y' = y, \\ z' = z \end{cases},$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси *Ox*. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $(y')^2 = -\frac{2L}{K}x'$.

Полагая $p = -\frac{L}{K}$, получим уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, то оно является *каноническим уравнением параболического цилиндра*. Если же $p > 0$, то мы придем к тому же результату после замены неизвестных $x'' = -x', y'' = y', z'' = z'$.

***<u>Подслучай 3.2</u>***. $L = 0$. Уравнение (6) в этом случае можно переписать в виде

$$y^2 = -\frac{M}{K} \quad (13).$$

Если $-\frac{M}{K} > 0$, то полагая $a = \sqrt{-\frac{M}{K}}$, получим уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является *пара параллельных плоскостей y=a и y=–a*.

Если $-\frac{M}{K} = 0$, то уравнение (13) очевидно, эквивалентно уравнению *y=0*, которое задает *пару совпавших плоскостей*.

Если $-\frac{M}{K} < 0$, то уравнение (13) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является *пустое множество*.

Теорема полностью доказана.

**Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям**

## Тема. Понятие вектора. Равенство векторов Операции над векторами

### *Примеры решения задач*

***Направленным отрезком*** называется отрезок, у которого указан порядок концов. Два направленных отрезка называются ***эквиполентными***, если их длины равны, они параллельны и одинаково направлены.

***Вектором*** называется класс эквиполентных направленных отрезков.

Каждый отрезок, входящий в этот класс, называется ***представителем вектора***.

*Длиной* (или **модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

Модуль нулевого вектора равен нулю: $|\vec{0}|=0$. Более того, нулевой вектор является нулевым элементом относительно сложения векторов.

Вектор, лежащий на оси, называется *сонаправленным* с осью, если его начало предшествует его концу (конец вектора следует за его началом).

В противном случае говорят, что вектор и ось имеют противоположные направления.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с осью L, то этот факт мы будем обозначать так: $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow L$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось L имеют противоположные направления, то $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow L$.

*Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$* называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda|>1$) или сжатием (при $|\lambda|>1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda>0$, и меняется на противоположное, если $\lambda<0$.

*Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$

**Задача 1.** Найти длину вектора $\overline{\mathrm{AB}}$, если A(1;2;3); B(2;-5;4).

*Решение*:

Найдем координаты вектора $\overline{\mathrm{AB}}$: $\overline{\mathrm{AB}}${2-1;-5-2;4-3}; AB{1;-7;1}.

Найдем длину вектора $\overline{\mathrm{AB}}$:

$$|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + (-7^2) + 1^2} = \sqrt{1 + 49 + 1} = \sqrt{51}.$$

Ответ: $|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{51}$.

**Задача 2.** Найти длину радиус-вектора точки A(2;3;-1).

Решение:

Координаты радиус-вектора точки A совпадают с координатами самой точки: $\overline{\mathrm{OA}}${2;3;-1}.

Найдем длину радиус-вектора $\overline{\mathrm{OA}}$:

$$|\overline{\mathrm{OA}}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

Ответ: $|\overline{\mathrm{OA}}| = \sqrt{14}$.

**Задача 3.** Найти длину вектора $\bar{c} = \bar{a} + 3\bar{b}$, если $\bar{a}${1;-1;0}, $\bar{b}${3;-1;4}.

*Решение*.

Найдем координаты вектора $\bar{c}$: $\bar{c}${1+3·3;-1+3(-1);0+3·4}; $\bar{c}${10;-4;12}.

Найдем длину вектора $\bar{c}$:

$$|\bar{c}| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{100 + 16 + 144} = \sqrt{260}.$$

Ответ: $\bar{c}=\sqrt{260}$.

**Задача 4.** Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если A(1;-1;3), B(2;-3;4).

*Решение*.

Найдем координаты вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB}${2-1;-3-(-1);4-3}, $\overline{AB}${1;-2;1}.

Найдем длину вектора $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2^2) + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$$

Итак, $cos\alpha = \frac{2-1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$;$cos\beta = \frac{-3-(-1)}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$; $cos\gamma = \frac{4-3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

**Задача 5.** Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$\vec{a}$={1;-2;4}, $\vec{b}$={7;3;5}, $\vec{c}_1$=6$\vec{a}$-3$\vec{b}$, $\vec{c}_2$=$\vec{b}$-2$\vec{a}$.

*Решение*.

Координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ в декартовой прямоугольной системе координат:

$\vec{c}_1\{6-21;-12-9;24-15\}$ или $\vec{c}_1\{-15;-21;9\}$

$\vec{c}_2\{7-2;3+4;5-8\}$ или $\vec{c}_2\{5;7;-3\}$

Если векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ коллинеарны, то отношения их соответствующих координат равны.

$\frac{-15}{5} = \frac{-21}{7} = \frac{9}{-3} = -3 \Rightarrow$ векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарны.

**Задача 6**. Найти длину вектора $\bar{p} + 2\bar{q}$, если

$$\bar{p} = \bar{a} - \bar{b};\ \bar{q} = \bar{a} + 2\bar{b};\ |\bar{a}| = 1;\ |\bar{b}| = 3;\ (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{2}{3}\pi.$$

*Решение*.

Имеем

$$2\bar{q} = 2\cdot(\bar{a} + 2\bar{b}) = 2\bar{a} + 4\bar{b};$$

$$\bar{p} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b});$$

$$\bar{p} + 2\bar{q} = 2\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{a} + (-\bar{b}) = 3\bar{a} + 3\bar{b};$$

$$|\bar{p} + 2\bar{q}|^2 = (3\bar{a} + 3\bar{b})\cdot(3\bar{a} + 3\bar{b}) = 9\cdot(\bar{a} + \bar{b})^2 = 9\cdot(\bar{a}^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2) =$$

$$= 9\cdot\left(1 + 2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\frac{2}{3}\pi + 9\right) = 9\cdot\left(1 + 2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 9\right) = 9\cdot(1 - 3 + 9) = 63;$$

$$|\bar{p} + 2\bar{q}| = \sqrt{63}.$$

**Задача 7.** Найти вектор $\bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{x} = \{2,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию: скалярное произведение векторов $\bar{x}\cdot\bar{a} = 27$.

*Решение*.

Запишем условие коллинеарности двух векторов $\bar{a} = \lambda\,\bar{x}$ и полученный вектор $\bar{a}$ подставим в условие

$\bar{x} \cdot \bar{a} = 27;$

$\bar{x} \cdot \lambda = 27,\ \lambda \cdot |\bar{x}|^2 = 27,\ \lambda \cdot \left|2^2 + 1^2 + (-2)^2\right| = 27,\ 9\lambda = 27,\ \lambda = 3.$

Следовательно $\bar{a} = 3 \cdot \bar{x} = \{6, 3, -6\}$.

**Задания**

1. Найти длину вектора $\overline{CD}$, если: C($c_1$;$c_2$;$c_3$), D($d_1$;$d_2$;$d_3$).

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | -2 | -3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| -5 | 0 | 2 | 2 | 0 | -5 |
| 4 | 3 | 7 | 7 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 2 | -5 | 0 | -2 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 11 |

2. Найти длину радиус-вектора точки M(2;-3;6).

3. Найти длину вектора $\bar{b} = 3\bar{a} + 2\bar{c}$, если $\bar{a}${$a_1$;$a_2$;$a_3$}, $\bar{c}${$c_1$;$c_2$;$c_3$}.

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | -2 | -3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| -5 | 0 | 2 | 2 | 0 | -5 |
| 4 | 3 | 7 | 7 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 2 | -5 | 0 | -2 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 11 |

4.Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AD}$, если A($a_1$;$a_2$;$a_3$); D($c_1$;$c_2$;$c_3$)

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | -2 | -3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| -5 | 0 | 2 | 2 | 0 | -5 |
| 4 | 3 | 7 | 7 | 4 | 3 |
| 5 | 0 | 2 | -5 | 0 | -2 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 11 |

5. Даны векторы $\bar{a}$=2$\bar{\imath} - 5\bar{\jmath} + \bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} - \bar{k}$.
Найти: а) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; б) $\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$; в) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

6. Найти угол между векторами $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$ и $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ — единичные векторы и угол между ними равен 120˚.

7. Проверить компланарность векторов

$$\bar{a} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} + 4\bar{k},\ \bar{b} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath},\ \bar{c} = 3\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + 4\bar{k}.$$

## Тема. Линейная зависимость векторов. Базис векторов пространства

***Примеры решения задач***

Упорядоченная система трёх взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины называется *прямоугольной декартовой системой координат в пространстве*.

В этой упорядоченной системе координатных осей *0xyz* ось *Ox* называется *осью абсцисс*, ось *0y* – *осью ординат*, и ось *0z* – *осью аппликат*.

Числа *x, y, z* называются *координатами точки M*, соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*, и записываются в виде упорядоченной точки чисел: *M (x; y; z)*.

Вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением оси, называют *единичным вектором* (или *ортом*) оси.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называется вектор $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\overline{a_n}$.

Говорят, что вектор $\bar{b}$ раскладывается по векторам $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$, если он является линейной комбинацией этих векторов.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует такая линейная комбинация $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \dots + \lambda_n\overline{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно коэффициентах т.е. $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots \lambda_n^2 \neq 0, \lambda_i = 0$

В противном случае векторы называются *линейно независимыми*.

*Свойства линейно зависимых векторов:*

1. Если среди векторов $\overline{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
4. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимые векторы коллинеарные.
5. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые три линейно зависимые вектора компланарны.
6. Любые четыре вектора линейно зависимы.

**Задача 1**. Разложить вектор $\bar{a} = \{4, 2, 0\}$ по векторам

$$\bar{p} = \{1, -1, 2\},\ \bar{q} = \{2, 2, -1\},\ \bar{r} = \{3, 7, -7\}.$$

*Решение*.

Разложить вектор $\bar{a}$ по векторам $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ это значит представить его в виде линейной комбинации $\bar{a} = c_1\bar{p} + c_2\bar{q} + c_3\bar{r}$, где $c_1, c_2, c_3$ – искомые числа.

Представим линейную комбинацию в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 2 = -c_1 + 2c_2 + 7c_3 \\ 0 = 2c_1 - c_2 - 7c_3 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид: $c_1 = 3; c_2 = -1; c_3 = 1.$

Следовательно: $\bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q} + \bar{r}$.

**Задача 2**. Найти направляющие косинусы вектора силы $\bar{F}=\{1,-1,1\}$, приложенной в точке $B(5,1,0)$, и момент этой силы относительно точки $A(3,2,-1)$.

*Решение*.

Найдем направляющие косинусы вектора силы:

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{|F|}=\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\beta=\frac{F_y}{|F|}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\gamma=\frac{F_z}{|F|}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Момент силы определим как векторное произведение вектора $\overline{AB}$ на вектор $\bar{F}$.

Имеем

$$\overline{AB}=\{2,-1,1\}$$

$$\bar{F}=\{1,-1,1\}$$

$$\bar{m}=\overline{AB}\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\bar{j}-\bar{k}$$

$$\bar{m}=\{0,-1,-1\}.$$

## Задания

1. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ базис. Если образуют, то разложите вектор $\vec{x}$ по этому базису.

1. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}.$

2. $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}13\\2\\7\end{pmatrix}.$

3. $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\5\\5\end{pmatrix}.$

4. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}.$

5. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\8\end{pmatrix}.$

2. Два вектора $\vec{a}\{2;-3;6\}$ и $\vec{b}\{-1;2;-2\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$.

3. Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При каких значениях α и β для векторов $\vec{u}=\alpha\vec{a}+2\beta\vec{b}, \vec{v}=-2\beta\vec{a}+3\alpha\vec{b}, \vec{w}=4\vec{a}-\vec{b}$ выполняется равенство $2\vec{u}-\vec{v}=\vec{w}$?

4. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

5. Найдите угол между векторами $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$ и $\vec{b}=4\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3$, если $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=3$, $\left(\vec{e}_1\,\hat{,}\,\vec{e}_2\right)=\left(\vec{e}_1\,\hat{,}\,\vec{e}_3\right)=60^0$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ взаимно-перпендикулярны.

6. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известны его длина и углы $\alpha,\beta$ и $\gamma$, которые он образует с векторами базиса $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ ; $\vec{k}$

а) $|\vec{a}|=4$, $\alpha=60^0$, $\beta=45^0$, $\gamma=60^0$;

б) $|\vec{a}|=8$, $\alpha=135^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=60^0$;

в) $|\vec{a}|=2$, $\alpha=120^0$, $\beta=45^0$, $\gamma=120^0$.

## Тема. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их свойства

### *Примеры решения задач*

*Скалярным произведением* векторов **a** и **b** называется число

**ab** = |**a**| |**b**| cos(**a^b**).

В декартовой прямоугольной системе координат имеем:

**ab** = $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Свойства скалярного произведения:

1). **ab** =**ba**

2).(**a+b**)**c=ac +bc**

3).(α**b**)**a**=α(**ba**)

4).**aa**≥ 0

Скалярное умножение векторов используется в школьной геометрии при доказательстве теорем и решении задач.

*Векторным произведением* векторов **a** и **b** называется вектор **c=**[**ab**], удовлетворяющий условиям:

1. |**c**| = |**a**| |**b**| sin(**a^b**)

2. **c** ⊥ **a**, **c** ⊥ **b**

3. **a,b,c** – правая тройка векторов.

В декартовых прямоугольных координатах:

$$\mathbf{c}=\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\} \qquad (1)$$

(условия 1,2,3 проверяются непосредственными вычислениями).

**Свойства:**

1).[**ba**]**= -** [**ab**]

2).[(k**a**)**b**]=k[**ab**]

3).[**a**(**b+c**)]=[**ab**]+[**ac**] - свойства следуют из (1) и свойств определителей.

Геометрический смысл модуля векторного произведения:

$|[\mathbf{ab}]|$ = 2 $S_\Delta$ , где $\Delta$ - треугольник, построенный на векторах **a**, **b** (очевидно, из условия 1.)

*Смешанным произведением* трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называют число, равное $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Обозначается $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Здесь первые два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ умножается скалярно на третий вектор $\bar{c}$. Очевидно, такое произведение есть некоторое число.

*Геометрический смысл* смешанного произведения. Смешанное произведение 3-х векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах, т.е. $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \pm V_{пар}$.

Таким образом, $V = |(\bar{a}\bar{b}\bar{c})|$ и $V_{пир} = \frac{1}{6}|(\bar{a}\bar{b}\bar{c})|$.

**Задача 1**. Вычислить проекцию вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}+\bar{c}$, если $\bar{a}=\{1,-3,4\}$, $\bar{b}=\{3,-4,2\}$, $\bar{c}=\{-1,1,4\}$.

*Решение*.

Обозначим $\bar{b}+\bar{c}=\bar{d}$, тогда $\bar{d}=\{2,-3,6\}$

$\bar{a}\cdot\bar{d}=|\bar{a}|\cdot|\bar{d}|\cos\left(\bar{a}\wedge\bar{d}\right)=|\bar{d}|\cdot np_{\bar{d}}\bar{a}$, отсюда

$$np_{\bar{d}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{d}}{|\bar{d}|};\ np_{\bar{d}}\bar{a}=\frac{1\cdot 2+(-3)\sqrt{(-3)+4\cdot 6}}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{35}{7}=5.$$

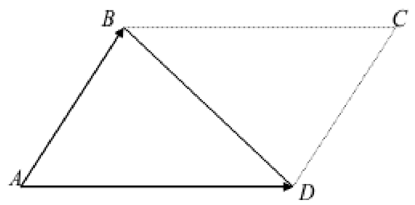
Ответ: 5.

**Задача 2**.

Найти площадь треугольника $ABD$, если $A(1,1,1)$; $B(2,0,1)$; $D(1,2,-1)$.

*Решение*.

Построим параллелограмм $ABCD$ на векторах $AB$ и $AD$:




$\overline{AB}=\{1,-1,0\}$;

$\overline{AC}=\{0,1,-2\}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$$

$$S_{ABCD} = \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ (кв.ед.)}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot S_{ABCD} = \frac{3}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

**Задача 3**. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1,1,1\}$ и $\overline{b} = \{2,0,3\}$ и образующий с осью $OX$ тупой угол, если $|x| = \sqrt{6}$ .

*Решение*.

Если $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}$, тогда вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ .

Найдем вектор $\overline{c}$ : $\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$

Так как $\overline{x}$ тоже перпендикулярен $\overline{a}$ и $\overline{b}$, следовательно вектора $\overline{x}$ и $\overline{c}$ - коллинеарны. Запишем условие коллинеарности векторов: $\overline{x} = \lambda\overline{c}$, $\overline{x} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

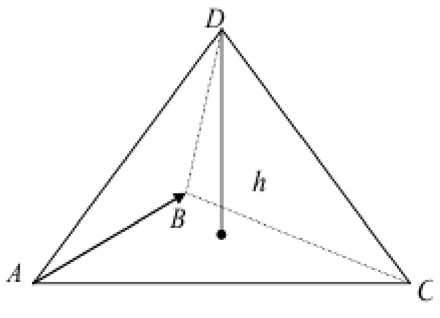
По условию $|\overline{x}| = \sqrt{6}$ , то есть $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6};\ |\lambda| = 1,$ отсюда $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1.$

Так как вектор $\overline{x}$ образует с осью $OX$ тупой угол, то его проекция на ось $OX$ должна быть отрицательной.

Отсюда $\lambda = -1,$ а $\overline{x} = \{-1,-1,2\}.$

**Задача 4**. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины $D$, если ее вершины $A(2,3,1),\ B(4,1,-2),\ C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8)$.

*Решение*.




Найдем векторы:

$\overline{AB} = \{2,-2,-3\};$

$\overline{AC} = \{4,0,6\};$

$\overline{AD} = \{-7,-7,7\}.$

Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой модуля смешанного произведения этих векторов:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right| \text{ или } V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot h\ ,$$

где $h$ – высота пирамиды, а площадь прямоугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ равна одной второй векторного произведения $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

Вычислим смешанное произведение векторов

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=308$$

Отсюда $V$ пирамиды $=\frac{1}{6}\cdot 308=\frac{154}{3}$.

Вычислим векторное произведение векторов:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\bar{i}+24\bar{j}+8\bar{k}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{28}{2}=14;$$

Найдем высоту пирамиды: $h=\frac{3\cdot V}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3\cdot 154}{3\cdot 14}=11;\ \underline{h=11}$.

**Задача 5**. Даны векторы $\vec{a}\{3;-1;-2\}$ и $\vec{b}\{1;2;-1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]$; 2) $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

*Решение*.

Воспользуемся свойствами векторного произведения:

1) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]=\left[2\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}=\left\{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{5;1;7\}.$$

Следовательно, $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]=\{10;2;14\}$.

2)

$$\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=\left[2\vec{a},2\vec{a}+\vec{b}\right]+\left[-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},2\vec{a}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},2\vec{a}\right]-\left[\vec{b},\vec{b}\right]=$$

$$=4\left[\vec{a},\vec{a}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\vec{b}\right]=4\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Следовательно, $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=\{20;4;28\}$.

**Задания**

1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

| *№ п/п* | $\bar{a}$ | $\bar{b}$ | $\lvert\bar{p}\rvert$ | $\lvert\bar{q}\rvert$ | $\lvert\bar{p}\hat{\ }\bar{q}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{p}+2\overline{q}$ | $3\overline{p}-\overline{q}$ | 1 | 2 | $\frac{\pi}{6}$ |
| 2 | $3\overline{p}+\overline{q}$ | $\overline{p}-2\overline{q}$ | 4 | 1 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 3 | $\overline{p}-3\overline{q}$ | $\overline{p}+2\overline{q}$ | $1/5$ | 1 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 4 | $3\overline{p}-2\overline{q}$ | $\overline{p}+5\overline{q}$ | 4 | $1/2$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| 5 | $\overline{p}-2\overline{q}$ | $2\overline{p}+\overline{q}$ | 2 | 3 | $\frac{3\pi}{4}$ |

2. Определить компланарны ли векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ .

| № п/п | $\overline{a}$ | $\overline{b}$ | $\overline{c}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | (2, 3,1) | (-1, 0, -1) | (2, 2, 2) |
| 2 | (3, 2, 1) | (2, 3, 4) | (3, 1, -1) |
| 3 | (1, 5, 2) | (-1, 1, -1) | (1, 1, 1) |
| 4 | (1, -1, -3) | (3, 2, 1) | (2, 3, 4) |
| 5 | (3, 3, 1) | (1, -2, 1) | (1, 1, 1) |
| 6 | (3, 1, -1) | (-2, -1, 0) | (5, 2, -1) |
| 7 | (4, 3, 1) | (1, -2, 1) | (2, 2, 2) |
| 8 | (4, 3, 1) | (6, 7, 4) | (2, 0, -1) |
| 9 | (3, 2, 1) | (1, -3, -7) | (1, 2, 3) |
| 10 | (3, 7, 2) | (-2, 0, -1) | (2, 2, 1) |

3. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A$, $B$, $C$ и $D$ и ее высоту, опущенную из вершины $D$ на грань $ABC$ .

| № п/п | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (0, 1, 2) | (2, 1, 7) | (2, 7, 4) | (0, 0, 4) |
| 2 | (1, 2, 3) | (2, 8, -4) | (0, 5, 4) | (2, 9, 4) |
| 3 | (1, 1, 1) | (2, 4, -2) | (2, 0, 2) | (0, 1, -1) |
| 4 | (1, -1, 1) | (0, 2, 3) | (1, -1, 0) | (0, 2, 2) |
| 5 | (2, 1, 3) | (4, -2, 0) | (1, 3, -3) | (7, 5, 2) |
| 6 | (-2, 0, 4) | (1, 3, -1) | (4, -1, 3) | (2, 7, 3) |
| 7 | (1, 2, 3) | (0, 0, 0) | (1, 4, 3) | (1, 8, -1) |
| 8 | (-1, 2, 0) | (1, 0, 3) | (0, 2, 2) | (1, 8, 3) |
| 9 | (2, -1, 1) | (3, 3, 2) | (2, 1, 0) | (4, 1, -3) |
| 10 | (2, 1, -1) | (-3, 1, 2) | (0, 1, 2) | (-1, 8, 3) |

4. Выполнить задания.

1. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ , если $A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4), D(-1;1;1)$.

2. Проверьте, лежат ли точки $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(7;5;-3)$ в одной плоскости.

3. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{6;3;4\}, \vec{b} = \{-1;-2;-1\}, \vec{c} = \{2;1;2\}$.

4. Найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}=\{1;2;2\}, \vec{b}=\{2;1;2\}, \vec{c}=\{4;8;9\}$.

5. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1;3;6), B(2;2;1), C(-1;0;1), D(-4;6;-3)$.

6. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, если $A(1;2;-2), B(-1;4;0), C(4;1;1), D(5;5;-3)$.

7. Проверьте, лежат ли точки $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ в одной плоскости.

8. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{-1;-2;-1\}, \vec{b}=\{4;3;6\}, \vec{c}=\{2;1;2\}$.

9. Найдите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3), D(3;7;2)$.

10. При каком значении *к* точки лежат в одной плоскости $A(1;0;3), B(-1;3;4), C(1;2;1), D(\kappa;2;5)$.

**Тема. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии**

1. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями 2x - y + 5 = 0 и x - 2y + 4 = 0, диагонали его пересекаются в точке M(1, 4). Найти длины его высот

2. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек A(2, 2) и B(1, 0). Найти это расстояние

3. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями y = x - 2 и 5y = x + 6, диагонали его пересекаются в точке M(1, 4). Найти длины его высот

4. Даны точки A(-4, 0) и B(0, 6). Через середину отрезка $AB$ провести прямую, отсекающую на оси $Ox$ отрезок, вдвое больший, чем на оси $Oy$

5. Найти площадь параллелограмма ABCD, если его вершины A(3;-2;4), B(0;-1;6), C(1;-3;6), D(1;-1;0).

6. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок *b*=-3 и составляющей с осью Ox угол 60˚.

7. Даны вершины треугольника ABC. Вычислить координаты центра тяжести этого треугольника. Найти длину медианы *AM*.

а) $A(2, -5)$, $B(1, -2)$, $C(4, 7)$;

б) $A(-1, -1)$, $B(3, 5)$, $C(-4, 1)$;

в) $A(3, -1)$, $B(1, 1)$, $C(2, 3)$

8. Решить задачи,

а). Точка $C(-2,1)$ делит отрезок *AB* в отношении $AC:CB=2:3$. Найти координаты точки *B*, если $A(-10,5)$.

б). Точка $C(3,5)$ делит отрезок $AB$ в отношении $AC:CB=3:4$. Найти координаты точки $A$, если $B(-1,1)$.

в). Точка $C(-2,3)$ делит отрезок *AB* в отношении $AC:CB=2:1$. Найти координаты точки *B*, если $A(-7,4)$.

г). Отрезок *AB* двумя точками разделен на три равные части. Определить координаты точек деления, если $A(-3,7)$, $B(5,11)$.

9. Одной из вершин прямоугольника является точка $A(-4,3)$, а противоположный угол образован осями координат. Составить уравнения сторон и диагоналей этого прямоугольника.

Найти расстояние от точки $A(-3,2)$ до прямой $4x+3y+14=0$. Найти расстояние от начала координат до каждой из прямых:

$а)\ 3x-4y+15=0;$

$б)\ x+7y-5=0;$

$в)\ x-2y+3=0.$

10. Дан треугольник с вершинами $A(-1,2)$, $B(5,7)$, $C(1,-3)$. Вычислить угол между медианой и высотой, проведенными из вершины B.

Найти уравнение перпендикуляра, восставленного к прямой в точке C, делящей отрезок этой прямой между точками $A(2,-3)$ и $B(0,5)$ в отношении $\lambda = 1:3$.

## Тема. Кривые второго порядка на плоскости

### *Примеры решения задач*

Пример 1. Построить точки, заданные своими полярными координатами:

A$(3; \frac{\pi}{2})$, $B(2; \frac{5\pi}{4})$, $C(1; -\frac{\pi}{4})$, D(2;0).

*Решение*.

Для построения точек A, B и C из полюса O проведем лучи под углом $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$, $\varphi_3 = -\frac{\pi}{4}$ и на них откладываем отрезки длины 3, 2, 1 соответственно. Точку D откладываем на полярной оси на расстоянии 2 от полюса.

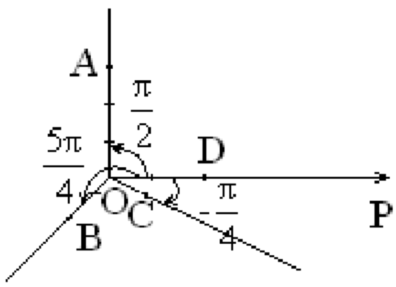



Рис.1. Точки, заданные полярными координатами.

Пример 2. Построить линию $r = 2\cos\varphi$ в полярной системе координат.

*Решение*.

Построим эту линию по точкам, задавая углу $\varphi$ определенные значения и получая значения r из уравнения $r = 2\cos\varphi$.

Если $\varphi = 0 \Rightarrow r = 2\cos 0 = 2$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; r = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; r = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; r = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\frac{1}{2} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; r = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2 \quad 0 = 0.$$

Если далее рассматривать углы из промежутка $(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$, то значения r будут отрицательными, так как в этом промежутке $\cos\varphi < 0.$ Это означает, что в области нет точек данной линии.

Если $\varphi = \frac{3\pi}{2} \;\Rightarrow\; r = 0$

$$\varphi = \frac{5\pi}{3} \;\Rightarrow\; r = 1$$

$$\varphi = \frac{7\pi}{4} \;\Rightarrow\; r = \sqrt{2} \approx 1{,}4$$

$$\varphi = \frac{11\pi}{6} \;\Rightarrow\; r = \sqrt{3} \approx 1{,}7$$

Запишем полученные данные в таблицу

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
| r | $2$ | $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ | $1$ | $0$ | ___ | $0$ | $1$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ | $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ |

Заметим, что последние четыре значения r в таблице можно было получить, если рассмотреть отрицательные значения угла $\varphi$, соответственно,

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

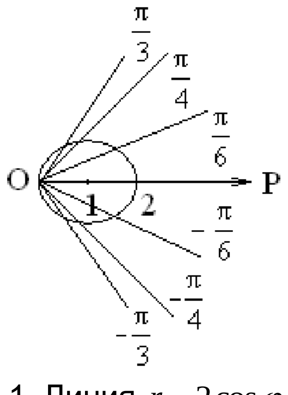



Рис.1. Линия $r = 2\cos\varphi$.

Далее из полюса проводим лучи и откладываем на них соответствующие значения r. Соединяя полученные точки плавной линией, строим заданную кривую. Построенная кривая является окружностью радиуса 1 с центром в точке (1,0), лежащей на полярной оси.

Пример 3. Построить линию, заданную уравнением $x^2+y^2=4y,$ перейдя в полярную систему координат.

*Решение*.

Преобразуем данное уравнение, используя формулы (6.1.1):
$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$, получим:

$$r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi = 4r\sin\phi \quad \Rightarrow \quad r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi) = 4r\sin\phi$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 4r\sin\phi \quad \Rightarrow r = 4\sin\phi.$$

Построим эту линию по точкам. Так как $r \geq 0,$ то $4\sin\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$
Для вычисления значений r составляем таблицу:

| $\varphi$ | $\sin\varphi$ | $r = 4\sin\varphi$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $4$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $2\sqrt{2}$ |
| $\pi$ | $0$ | $0$ |

Далее из полюса проводим лучи и откладываем на них соответствующие значения r. Соединим полученные точки плавной линией. Построенная кривая также является окружностью радиуса 2 с центром в точке $M_0$.

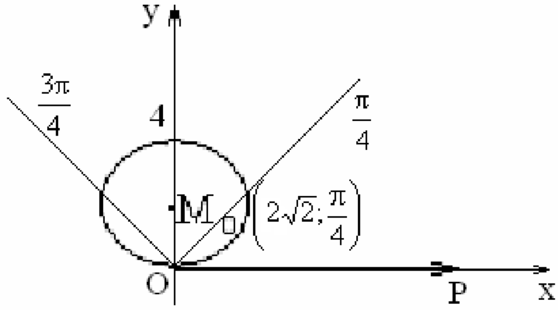



Рис. 3. Линия, заданную уравнением $x^2+y^2=4y$ .

**Задания**

Дан треугольник с вершинами A, B, C.

1.Изобразить треугольник ABC в прямоугольной декартовой системе координат.

2.Написать:
a) уравнение прямой AB;
b) уравнение биссектрисы BL угла B;
c) уравнение высоты CN, опущенной из вершины C;
d) уравнение медианы AM, проведённой из вершины A;

3.Найти:
a) острый угол между высотой CN и медианой AM;
b) координаты точки пересечения медиан;
c) площадь треугольника ABC.
1. A(6;5), B(5;-4), C(-5;4)
2. A(2;1), B(3;2), C(6;3)
3. A(3;3), B(-2;3), C(0;-1)
4. A(1;1), B(2;0), C(-1;4)
5. A(3;-1), B(-2;1), C(0;0)

6. Эллипс проходит через точки $M\left(\sqrt{3};-2\right)$ и $N\left(-2\sqrt{3};1\right)$. Составить уравнение эллипса, приняв его оси за координатные. Определить полуоси, фокусное расстояние и эксцентриситет.

7. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$. Уравнения касательных записать как уравнения прямых в общем виде.

8. Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ и параболы $y^2=24x$.

9. Привести уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду:
$x^2-4x+8y-36=0$.

## Тема. Преобразование аффинной системы координат. Полярные координаты

### *Примеры решения задач*

***Аффинной системой координат*** на плоскости (в пространстве) называется совокупность, включающая точку (начало координат) и базис направляющего векторного пространства: $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ – на плоскости и $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ – в пространстве.

***Полярной системой координат на плоскости*** называется полюс и полярный луч вместе с понятием полярных координат любой точки плоскости.

Полярная система координат в пространстве переходит в сферическую либо в цилиндрическую системы координат.

Введём понятие ориентации плоских фигур, причём здесь можно ограничиться лишь рассмотрением ориентации треугольников: каждый треугольник может быть ориентирован двумя способами, то есть обход его контура может совершаться в двух взаимно противоположных направлениях – «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки».

Аффинные преобразования *первого рода* сохраняют ориентацию всех треугольников, а аффинные преобразования *второго рода* меняют её на противоположную.

Одним из важнейших аффинных преобразований является параллельное проектирование. Оно обладает всеми свойствами аффинных преобразований, основное свойство проектирования выражает следующая теорема.

***Основная теорема о параллельном проектировании***. Как именно может изменяться данная фигура при параллельном проектировании, хорошо поясняет следующая

***Теорема***. Произвольный треугольник можно с помощью параллельного проектирования преобразовать в треугольник, подобный любому данному треугольнику.

**Задача 1**. Найти расстояние между точками $M(3;\frac{\pi}{4})$ *и* $N(4;\frac{3\cdot\pi}{4})$.

*Решение*.

Координаты точек заданы в полярных координатах, а выражение для нахождения получено для точек, заданных в ПДСК, а потому, прежде всего, необходимо выразить координаты точек в ПДСК.

Из таблицы взаимосвязи полярных и декартовых координат получаем, что для точки $M(3;\frac{\pi}{4})$

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cdot\cos(\varphi) \\ y & = & \rho\cdot\sin(\varphi) \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{lcl} x & = & 3\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y & = & 3\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}\right| \to \begin{cases} x = \dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

или, координаты точки M в ПДСК - $M=\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2};\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$.

Аналогично находим и координаты точки N:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cdot\cos(\varphi) \\ y & = & \rho\cdot\sin(\varphi) \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{lcl} x & = & 4\cdot\cos\left(\dfrac{3\cdot\pi}{4}\right) \\ y & = & 4\cdot\sin\left(\dfrac{3\cdot\pi}{4}\right) \end{array}\right| \to \begin{cases} x = -2\cdot\sqrt{2} \\ y = 2\cdot\sqrt{2} \end{cases},$$

или, координаты точки N в ПДСК - $N=\left(-2\cdot\sqrt{2};2\cdot\sqrt{2}\right)$.

Окончательно, используя результат «расстояние между двумя точками на плоскости», получаем, что

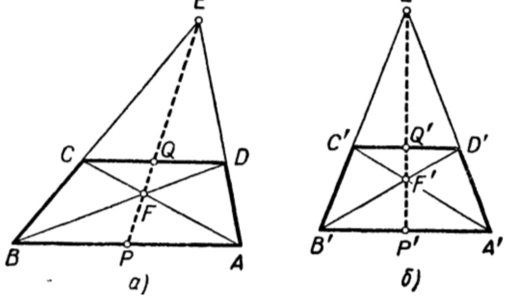
$$|M\ N|=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(-2\cdot\sqrt{2}-\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(2\cdot\sqrt{2}-\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2}=5.$$

**Задача 2**. Доказать, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

*Решение*.

Пусть ABCD – произвольная трапеция, E – точка пересечения продолжений ее боковых сторон, F – точка пересечения диагоналей, а P и Q — середины оснований AB и CD.



Спроектируем параллельно треугольник ABE в некоторый равнобедренный треугольник A'B'E' с равными сторонами A'E’ и B'E’ и равными углами A и B' (это возможно в силу доказанной выше теоремы).

Тогда трапеция ABCD перейдет в равнобочную трапецию A'B'C'D' ? точки P и Q – в середины P и Q' ее оснований, а точка F—в точку F* пересечения ее диагоналей. В треугольнике A'E'B' прямая £'P является осью симметрии; точки A' и B’ а также Z' и C симметричны относительно этой оси. Отсюда следует, что середина Q' отрезка ZO, а также точка F’ пересечения симметричных прямых AC и B'D' лежат на прямой E'P’.

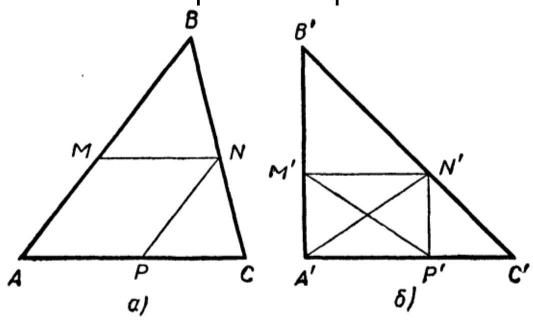
Но если точки E’, F’ P' и Q' лежат на одной прямой, то и проектирующиеся в них точки E, F, P и Q также должны лежать на одной прямой, что и требовалось доказать.

Задача 3. В данный треугольник ABC впишите параллелограмм AMNP (вершины Aí, N и P лежат на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC) так, чтобы его площадь составляла известную часть площади треугольника:

$S_{AMNP}$ = k $S_{ABC}$ , где k<1 —данное (рациональное) число.

*Решение*.

Предположим, что искомый параллелограмм AMNP построен.




Спроектируем треугольник ABC в равнобедренный прямоугольный треугольник AB’C. Параллелограмм AMNP перейдет при этом в прямоугольник A’M'N'P’ причем $S_{A'M'N'P'}=kS_{A'B'C'}$.

Положив A’B'=A’C’=a, получаем отсюда: $S_{M'B'N'}$ + $S_{P'N'C'}$ = (1-k)$S_{A'B'C}$ =(1-k)$\dfrac{a^2}{2}$.

С другой стороны, так как M'B'·=M’N' и P'N'=P'C, имеем:

$$S_{M'B'N'}+S_{P'N'C'}=\frac{1}{2}(M'N'^2+N'P'^2)=\frac{1}{2}\ M'P'^2=\frac{1}{2}\ A'N'^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\ A'N'^2=(1-k)\frac{a^2}{2}\ ,\quad \text{т. е. } A'N'=a\ \sqrt{1-k}.$$

Отсюда вытекает такое построение. Строим равнобедренный прямоугольный треугольник A'B'C’ с произвольным катетом a и вписываем в него прямоугольник A'M'N’P’ с диагональю $a\sqrt{1-k}$ (для этого достаточно построить отрезок $a\sqrt{1-k}$ ; затем из центра A' делаем засечку на гипотенузе B'C’ радиусом, равным этому отрезку).

Чтобы вписать искомый параллелограмм в данный треугольник ABC, разделим отрезок AB точкой M пропорционально отрезкам AM' и M'B’, после чего точки N и P находятся очевидным образом.

## Тема. Уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых

### *Примеры решения задач*

Задача 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А (2, 4) и удаленной от начала координат на расстояние $d = 2$

*Решение*.

1) Пусть искомое уравнение имеет вид $(x-2)+b(y-4)=0$ (ясно, что точка А (2, 4) удовлетворяет этому уравнению).

Расстояние от начала координат до прямой $(x-2)+b(y-4)=0$ равно

$$\frac{|2+4b|}{\sqrt{1+b^2}}$$

Приравняв это выражение к $d = 2$, получим уравнение $\frac{|2+4b|}{\sqrt{1+b^2}} = 2.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$\frac{4+16b+16b^2}{1+b^2} = 4,$ $\Leftrightarrow 4+16b+16b^2 = 4+4b^2$, $16b+12b^2 = 0$, $b = -\frac{4}{3}.$

Таким образом, искомое уравнение $(x-2)-\frac{4}{3}(y-4)=0$. Преобразуем полученное уравнение $3(x-2)-4(y-4)=0$,

Ответ: $3x-4y+10=0.$

Задача 2**.** Даны точки А(-4, 0) и В(0, 6). Через середину отрезка $AB$ провести прямую, отсекающую на оси $Ox$ отрезок, вдвое больший, чем на оси $Oy$

*Решение*.

1) Середина отрезка $AB$ – точка $M\left(\frac{-4+0}{2};\frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{-4}{2};\frac{6}{2}\right).$

Пусть уравнение искомой прямой в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. По условию задачи $a = 2b$, таким образом уравнение искомой прямой $\frac{x}{2b}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow x+2y=2b$.

Подставим координаты точки $M(-2;3)$ в уравнение. Получим $-\frac{4}{2}+\frac{12}{2}=2b$ $\Rightarrow b=2$.

Задача 3. Найти углы и площадь треугольника, образованного прямыми

y = 2x, y = -2x+1 и y = -x + 2

*Решение*.

1). Вычисление вершин.

а) Точка $A$ пересечения прямых $y = 2x$, $y = -2x+1$ находится как решение системы $\begin{cases} y = 2x \\ y = -2x+1 \end{cases}.$

Подставляя выражение для $y$ из второго уравнения в первое, получим $2x = -2x+1$, откуда $4x = 1$, или $x = \frac{1}{4}$. Учитывая, что $y = -2x+1$, при $x = \frac{1}{4}$ получаем $y = \frac{1}{2}$.

Координаты точки $A(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$.

б) Точка $B$ пересечения прямых $y=2x$, $y=-x+2$ находится как решение системы $\begin{cases} y=2x \\ y=-x+2. \end{cases}$

Подставляя выражение для $y$ из первого уравнения во второе, получим

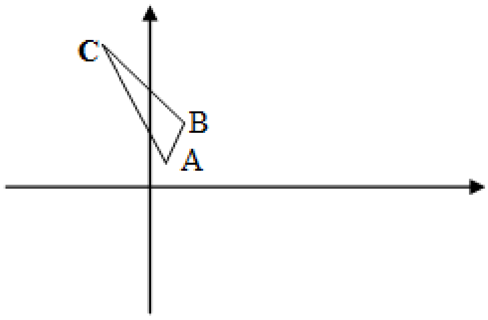
$$2x=-x+2,\ 3x=2,\ x=\frac{2}{3},\ y=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}.$$

Координаты точки $B(\frac{2}{3};\frac{4}{3})$.

с) Точка С пересечения прямых $y=-2x+1$, $y=-x+2$ находится как решение системы $\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-x+2. \end{cases}$

Подставляя выражение для $y$ первого уравнения во второе, получаем $-2x+1=-x+2$. Следовательно, $x=-1$. При $x=-1$ получим $y=2+1=3$.

Координаты точки $C(-1;3)$.




Вычисление основания. Находим координаты вектора $\overline{AB}=(\frac{2}{3}-\frac{1}{4};\frac{4}{3}-\frac{1}{2})=(\frac{5}{12};\frac{5}{6})$.

Длина $|\overline{AB}|=\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}\approx\sqrt{0,868}\approx 0,93$.

Вычисление высоты. Если дано уравнение прямой в виде $ax+by+c=0$ и координаты точки $C(x_0,y_0)$, то расстояние от точки С до прямой находится по формуле

Уравнение прямой АВ $y=2x$, или $-2x+y=0$ (то есть $a=-2$, $b=1$, $c=0$). Координаты $C(-1;3)$. Подставляя в формулу расстояния от точки до прямой, получаем высоту $h=\frac{|2+3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$..

Нахождение площади. Площадь треугольника равна половине произведения основания и высоты, то есть $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}|h$.

$S\approx\frac{1}{2}0,93\frac{5}{\sqrt{5}}\approx 1,04$ кв.ед.

Нахождение углов треугольника. Чтобы найти углы треугольника, нужно все уравнения прямых записать как уравнения с угловым коэффициентом, то есть в виде $y=kx+b$, $k$ - угловой коэффициент.

Упорядочив коэффициенты по убыванию, $k_1>k_2>k_3$, тангенсы внутренних углов находят по формулам $(k_1-k_2)/(1+k_1k_2)$ (тангенс угла между прямыми с коэффициентами $k_1$, $k_2$); $(k_2-k_3)/(1+k_2k_3)$ (тангенс угла между прямыми с коэффициентами $k_2$, $k_3$); $(k_3-k_1)/(1+k_3k_1)$ (тангенс угла между прямыми с коэффициентами $k_3$, $k_1$).

Прямая АВ имеет уравнение $y=2x$ угловой коэффициент равен 2.

Прямая АС имеет уравнение $y=-2x+1$, угловой коэффициент равен -2.

Прямая СВ имеет уравнение $y=-x+2$, угловой коэффициент равен -1.

Упорядочим угловые коэффициенты по убыванию $2>-1>-2$. Угловой коэффициент АВ $k_1=2$, угловой коэффициент ВС $k_2=-1$, угловой коэффициент СВ $k_3=-2$.

Вычисляем тангенсы углов

$tg\angle B=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\dfrac{2+1}{1+2\cdot(-1)}=\dfrac{3}{-1}=-3$ (угол между СВ и АС),

$tg\angle C=\dfrac{k_2-k_3}{1+k_2k_3}=\dfrac{-1+2}{1+(-1)\cdot(-2)}=\dfrac{1}{3}$ (угол между АС и АВ),

$tg\angle A=\dfrac{k_3-k_1}{1+k_3k_1}=\dfrac{-2-2}{1-2\cdot 2}=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$ (угол между АВ и СВ).

Ответ: $S\approx 1{,}04$ кв.ед.; $tg\angle B=-3$; $tg\angle C=\dfrac{1}{3}$; $tg\angle A=\dfrac{4}{3}$.

Задача 4. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек А(2, 2) и В(1, 0). Найти это расстояние

Схема решения задачи.

1). Записать уравнение искомой прямой в виде $y=kx+b$, найти параметр $b$ из условия, что точка $O(0;0)$ лежит на прямой.

Записать расстояние от точки $A$ до искомой прямой, затем расстояние от точки $B$ до искомой прямой.

2). Приравняв полученные в пункте 2 выражения для расстояний, получить уравнение, содержащее параметр $k$. Решить уравнение

3). Написать уравнения полученной прямой (прямых). Найти расстояние от точек А и В до прямой (прямых). Сделать чертеж.

*Решение*.

1. Подставив (0;0) в уравнение $y=kx+b$, получим $b=0$, то есть искомое уравнение имеет вид $y=kx$ или $-kx+y=0$.

Расстояние от точки $A(2;2)$ до прямой $-kx+y=0$ вычисляется по формуле

$$h=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и равно } h_1=\frac{|-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Аналогично расстояние от точки $B(1;0)$ до прямой $-kx+y=0$ равно

$$h_2=\frac{|-k|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Из условия $h_1=h_2$ получаем уравнение $|-2k+2|=|-k|$.

Разделим уравнение на $|k|\neq 0$ (ясно, что $k=0$ не является решением).

Получаем $\left|\dfrac{-2k+2}{k}\right|=-1$.

Следовательно, возможно два решения $\dfrac{-2k+2}{k}=1$ или $\dfrac{-2k+2}{k}=-1$.

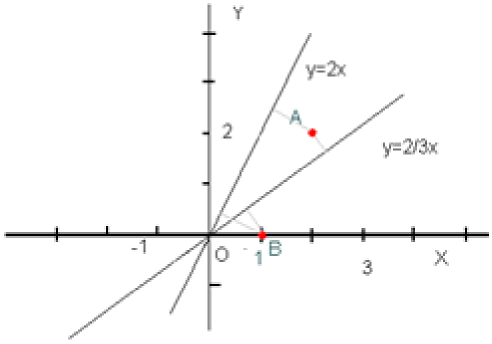
Из первого уравнения получим $-2k+2=k$, или $3k=2$, $k_1=2/3$.

Из второго уравнения получим $-2k+2=-k$, или $k=2$, $k_2=2$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две прямые $y=\frac{2}{3}x$ и $y=2x$. Расстояние от точек $A$ и $B$ до прямой $y=\frac{2}{3}x$ равно

$$d_1=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2/3}{\sqrt{4/9+1}}=\frac{2}{3\sqrt{13/9}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Расстояние от точек $A$ и $B$ до прямой $y=2x$ равно $d_2=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.




**Ответ**. Расстояние от точек $A$ и $B$ до прямой $y=\frac{2}{3}x$ равно, $\frac{2}{\sqrt{13}}$ до прямой $y=2x$ равно $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

## Задания

1. Найти точки пересечения прямых с осями координат и по этим точкам построить прямые:

$а)$ $x+5y-10=0;$ $б)$ $3x-2y-4=0;$ $в)$ $3x+y+3=0;$ $г)$ $3x-y-6=0$.

2. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(7,-1)$ параллельно осям координат.

3. Дана прямая $x+2y-4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4,3)$:

$а)$ параллельно данной; $б)$ перпендикулярно данной.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;2)$ параллельно прямой, проведенной через две точки $A(5,-4)$ и $B(-3,2)$.

5. Заданы прямая $-2x+y-1=0$ и точка $A(-1,2)$. Требуется:

$а)$ написать уравнение прямой, проходящей через точку $A$ перпендикулярно заданной прямой;

$б)$ написать уравнение прямой, проходящей через точку $A$ параллельно заданной прямой.

6. Составить уравнения перпендикуляров к прямой $x-2y+4=0$, восставленных в точках пересечения этой прямой с осями координат.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$:

$а)$ параллельно прямой $x-2y+1=0$;

*б*) перпендикулярно прямой $2x+3y+1=0$;

*в*) параллельно оси $Ox$;

*г*) параллельно оси $Oy$.

8. Одной из вершин прямоугольника является точка $A(-4,3)$, а противоположный угол образован осями координат. Составить уравнения сторон и диагоналей этого прямоугольника.

9. Вычислить острый угол между прямыми:

*а*) $4x+3y-12=0$ и $2x-3y-25=0$;

*б*) $4x+3y-12=0$ и $3x-2y+6=0$;

*в*) $x+2y-1=0$ и $2x-3y-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x+2y-7=0$ и $3x+7y-10=0$ перпендикулярно прямой $5x-y-4=0$.

11. Прямая проходит через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Написать уравнение прямой, если:

*а*) $A(1;2)$, $B(-1;0)$; *б*) $A(1;1)$, $B(1;-2)$; *в*) $A(2;2)$, $B(0;2)$.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x-y-2=0$ и $3x-y-4=0$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,-2)$ и образующей с осью $Ox$ угол:

*а*) 45°; *б*) 60°; *в*) 90°; *г*) 135°.

14, Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

15. Найти площадь треугольника, ограниченного осью абсцисс и прямыми $x-y-3=0$ и $2x-y-12=0$.

16. Составить равнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой $5x-y+3=0$.

17. Зная уравнения сторон треугольника $x-y-1=0$, $2x+3y-7=0$ и $9x-4y+21=0$, найти:

*а*) координаты вершин; *б*) углы треугольника; *в*) его площадь.

18. Вершины треугольника имеют координаты $A(0,7)$, $B(-2,1)$, $C(-4,-1)$.

19. Найти расстояние от точки $A(-3,2)$ до прямой $4x+3y+14=0$.

20. Найти расстояние от начала координат до каждой из прямых:

*а*) $3x-4y+15=0$; *б*) $x+7y-5=0$; *в*) $x-2y+3=0$.

21. Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым $l_1$ и $l_2$, если:

*а*) $l_1: \; 3x-2y-1=0, \quad l_2: \; \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}$;

*б*) $l_1: \; 3x-15y-1=0, \quad l_2: \; \dfrac{x+0,5}{5}=\dfrac{y+0,5}{1}$.

22. Найти расстояние между параллельными прямыми $4x-3y+8=0$ и $4x-3y+12=0$.

23. Известны координаты двух противоположных вершин ромба: $A(4,-3)$ и $B(2,1)$. Составить уравнения его диагоналей.

## Тема. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве

### *Примеры решения задач*

Приведем следующие способы задания и виды уравнений прямой в пространстве.

1. *Канонические уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.*

Пусть *d* — прямая в пространстве, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — ее направляющий вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка этой прямой. Точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой *d* тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ коллинеарны. Условие коллинеарности векторов запишется в виде: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$. Эти равенства называются каноническими уравнениями прямой *d*.

2. *Параметрические уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором.*

Так как векторы $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ коллинеарны, то существует такое действительное число *t*, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$, тогда $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ — параметрические уравнения прямой *d*.

3. *Уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей.*

Пусть прямая *d* является линией пересечения плоскостей $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Точка *M*(*x*, *y*, *z*) лежит на прямой *d* тогда и только тогда, когда ее координаты являются решением системы уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, поэтому эта система и является уравнениями прямой *d*. При этом направляющий вектор прямой имеет вид $\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$.

4. *Канонические уравнения прямой, заданной двумя точками.*

Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат, и в ней известны координаты двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, принадлежащих прямой *d*, тогда канонические уравнения этой прямой примут вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

***Взаимное расположение прямых*** $d_1[M_1, \vec{a}_1]$ ***и*** $d_2[M_2, \vec{a}_2]$

1. Прямые $d_1$ и $d_2$ скрещиваются (не лежат в одной плоскости) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ не являются компланарными, то есть $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right) \neq 0$.

2. Прямые $d_1$ и $d_2$ пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ являются компланарными, то есть $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = 0$, а векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны.

3. Прямые $d_1$ и $d_2$ параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ являются компланарными, то есть $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = 0$, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, но векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1$ не коллинеарны.

4. Прямые $d_1$ и $d_2$ совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ являются коллинеарными.

***Взаимное расположение прямой и плоскости***

Пусть в пространстве дана прямая $d[M_0, \vec{a}]$ и плоскость $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, причем $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

1. Прямая *d* пересекает плоскость *π* тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой не параллелен плоскости, т. е. когда $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0.$ Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости, надо решить систему, состоящую из уравнений прямой и уравнения плоскости.

2. Прямая *d* параллельна плоскости *π* тогда и только тогда, когда точка $M_0$ не лежит в этой плоскости и направляющий вектор прямой параллелен плоскости, т. е. выполняются соотношения

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \\ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0. \end{cases}$$

3. Аналогично, прямая *d* лежит в плоскости *π* тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0. \end{cases}$$

**Задача 1.** Составить канонические уравнения прямой, заданной в аффинной системе координат как линия пересечения двух плоскостей $\pi_1 : x - y + 2z - 3 = 0$ и $\pi_2 : 2x + y - z + 6 = 0.$

*Решение*.

Сначала выберем какую-нибудь точку на данной прямой

$$d : \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + y - z + 6 = 0. \end{cases}$$

Для этого придадим одной из переменных, например *z*, произвольное значение. Пусть $z = 0$, тогда из записанной выше системы $x = -1,\ y = -4.$

Таким образом, мы нашли точку $M_0(-1, -4, 0)$, лежащую на данной прямой. Найдем координаты направляющего вектора прямой *d*: $\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$ или $\vec{a}(-1, 5, 3).$

Итак, искомые канонические уравнения прямой *d* имеют вид: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3}$ .

**Задача 2.** Выяснить взаимное расположение двух прямых, заданных в аффинной системе координат каноническими уравнениями:

$$d_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad d_2 : \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{4}.$$

*Решение*.

По уравнениям находим точки и направляющие векторы данных прямых:

$$d_1 : M_1(2, -1, 1),\ \vec{a}_1(1, 2, 3); \quad d_2 : M_2(5, 2, 8),\ \vec{a}_2(2, 1, 4).$$

Учитывая, что $\overrightarrow{M_1M_2}(3, 3, 7)$, вычисляем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Значит, данные прямые лежат в одной плоскости. При этом координаты векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не пропорциональны, поэтому они не коллинеарны.

Отсюда вывод: данные прямые пересекаются.

**Задача 3.** Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, заданных в аффинной системе координат соответственно уравнениями:

$$\frac{x}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-6};\ 3x + 6y + z - 8 = 0.$$

*Решение*.

По каноническим уравнениям прямой находим точку $M_0(0, -1, 3)$ на данной прямой и направляющий вектор $\vec{a}(10, -4, -6)$ этой прямой.

Имеем: $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 3 \cdot 10 + 6(-4) + 1(-6) = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot 0 + 6(-1) + 1 \cdot 3 - 8 \neq 0.$

Следовательно, прямая и плоскость параллельны.

**Задача 4.** Выяснить взаимное расположение прямых, заданных в прямоугольной системе координат своими каноническими уравнениями: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$. Вычислить угол между ними.

*Решение.*

По каноническим уравнениям данных прямых находим координаты их направляющих векторов $\vec{a}_1(4,3,-1)$ и $\vec{a}_2(-1,3,5)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю, следовательно, данные прямые взаимно перпендикулярны.

Выясним, пересекаются ли данные прямые или скрещиваются. Имеем на первой прямой точку $M_1(2,-1,0)$ и на второй прямой точку $M_2(1,0,1)$. Эти точки определяют вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(-1,1,1)$.

Находим: $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -22 \neq 0.$

Следовательно, данные прямые скрещиваются.

**Задача 5.** Вывести формулу для вычисления расстояния от точки $M$ до прямой $d:[M_0,\vec{a}]$.

*Решение.*

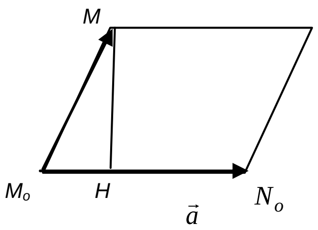



Рис. 8

Если $M \notin d$, то $\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right| = S$, где $S$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ (рис. 8).

С другой стороны,

$S = M_0N_0 \cdot MH = |\vec{a}| \cdot \rho(M,d).$

Таким образом,

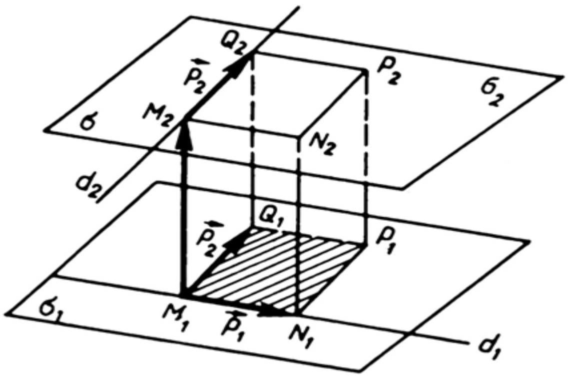
$|\vec{a}| \cdot \rho(M,d) = \left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right|.$

Отсюда получаем формулу $\rho(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$.

**Задача 6.** Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми $d_1[M_1,\vec{p}_1]$ и $d_2[M_2,\vec{p}_2]$.

*Решение.*

Рассмотрим плоскость $\sigma_1$, проходящую через прямую $d_1$ параллельно прямой $d_2$, и плоскость $\sigma_2$, проходящую через прямую $d_2$ параллельно прямой $d_1$. Из школьного курса стереометрии известно, что такие плоскости существуют и определяются однозначно. Очевидно, что расстояние между прямыми $d_1$ и $d_2$ равно расстоянию между параллельными плоскостями $\sigma_1$ и $\sigma_2$.




Для нахождения этого расстояния построим параллелепипед $M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2$ так, как показано на рисунке (рис. 9), и обозначим через $V$ объем этого параллелепипеда. Известно, что

$$V = \left| \left( \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \right) \right|.$$

С другой стороны, $V = \rho(d_1, d_2) \cdot S_{M_1N_1P_1Q_1} = \rho(d_1, d_2) \cdot \left| [\vec{p}_1, \vec{p}_2] \right|$.

Таким образом, $\left| \left( \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \right) \right| = \rho(d_1, d_2) \cdot \left| [\vec{p}_1, \vec{p}_2] \right|$.

Отсюда получаем формулу $\rho(d_1, d_2) = \dfrac{\left| \left( \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2 \right) \right|}{\left| [\vec{p}_1, \vec{p}_2] \right|}$.

**Задания**

1. Составить параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки *A*(2, 0, 3), *B*(1, 1, 1), *C*(2, 4, –3).

2. Составить уравнение прямой *d*, проходящей через точку $M_0(0, 0, 1)$ и пересекающей каждую из прямых:

$$d_1: \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad d_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

3. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямой $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$, и координаты направляющего вектора. Как связаны с данной прямой плоскости, заданные уравнениями $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3}$, $\frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$, $\frac{x-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$, и прямые, заданные этими же уравнениями на соответствующих координатных плоскостях?

4. Через точку *M*(1,–3,4) провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Установить взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t; \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t; \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z - 4 = 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t; \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0. \end{cases}$

5. Доказать, что прямая $x=1+2t,\ y=3t,\ z=-2+t$ пересекает плоскость $2x-y+z+1=0$.

Найти координаты точки пересечения.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+5}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{2}$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-3z+5=0 \end{cases}$.

7. Показать, что прямая $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $x-2y+5z-6=0$, а прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.

8. Выяснить взаимное расположение прямой $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-\ y-\ \ z-1=0 \end{cases}$ и плоскости $4x-3y+7z-7=0.$

9. Через точки $M_1(-6,6,-5)$ и $M_2(12,-6,1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

10.Даны вершины треугольника $A(3,6,-7)$, $B(-5,2,3)$ и $C(4,-7,-2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины *C*.

11. Через точку *M*(1, 5, –1) провести прямую, перпендикулярную к прямым:

$$\begin{cases} 2x-y+3z+4=\ \ 0, \\ -x+2y+2z-2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-z+1=0, \\ 2x+y+4z=0. \end{cases}$$

12. Найти расстояние от точки *P*(7, 9, 7) до прямой $d:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$.

Найти точку, симметричную точке *M*(1, 5, 2) относительно плоскости $2x-y-z+11=0$.

13. Составить уравнение проекции данной прямой $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$ на данную плоскость *π*: $3x-y+z-1=0$.

14. Найти угол между прямыми $l_1:\begin{cases} y+1=0, \\ x+2z-1=0 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=0, \\ z=1. \end{cases}$

15. Определить угол между прямой $d:\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ и плоскостью $4x+2y+2z-5=0$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *M*(–1, 1, 3), параллельной прямой $l: x=y=z$ и перпендикулярной плоскости *π*: $3x-2y=0$.

17. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $d_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ и $d_2:\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-3}$.

18. Найти уравнение общего перпендикуляра скрещивающихся прямых $d_1:\begin{cases} x=3+t, \\ y=-1+2t, \\ z=4; \end{cases}$ и $d_2:\begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+y+4=0. \end{cases}$

## Тема. Приложение метода координат к решению задач школьного курса геометрии

### *Примеры решения задач*

Аффинным репером в пространстве называется упорядоченная четверка $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис трехмерного векторного пространства.

Координатами вектора $\vec{a}$ в аффинном репере называются коэффициенты разложения этого вектора по базисным векторам $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

*<u>Обозначение</u>*. $\vec{a}(x, y, z)$.

Пусть *M* — произвольная точка пространства, тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки *M*, а координаты этого вектора — *координатами точки.* Если $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$, то *x* называется *абсциссой* точки *M*, *y* — *ординатой,* а *z* — *аппликатой.*

*<u>Обозначение</u>*. $M(x, y, z)$.

Пусть в аффинной системе координат $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тогда каждая координата вектора $\overrightarrow{AB}$ равна разности соответствующих координат его конца и начала, т. е. $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Точка *C* делит направленный отрезок *AB* в отношении $\lambda \neq -1$, если $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{CB}$.

Если точка $C(x, y, z)$ делит отрезок, образованный точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $\lambda \neq -1$, то

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если *C* — середина отрезка *AB*, то ее координаты равны полусуммам соответствующих координат его концов:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

В прямоугольной декартовой системе координат, если $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Модуль (или длина) вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, т. е. в прямоугольном декартовом базисе длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

**Задача 1.** Отрезок *AB*, где $A(3, -5, 2)$, $B(5, -3, 1)$, точками *C* и *D* разделен на три равные части. Найти координаты точек *C* и *D*.

*Решение*.

По условию $AC : CB = 1 : 2$, $AD : DB = 2 : 1$.

Составим векторные равенства $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\quad \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{DB}$.

Воспользуемся формулой деления отрезка *AB* точкой *C* в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$, получим координаты точки *C*:

$$x=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=\frac{11}{3},\ y=\frac{-5+\frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{13}{3},\quad z=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}.$$

Координаты точки *D* находятся с помощью тех же формул при $\lambda=2$:

$$x=\frac{3+2\cdot 5}{1+2}=\frac{13}{3},\quad y=\frac{-5+2(-3)}{1+2}=-\frac{11}{3},\quad z=\frac{2+2\cdot 1}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Следовательно, $C\left(\frac{11}{3},-\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right), D\left(\frac{13}{3},-\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$.

**Задача 2.** Дан треугольник с вершинами $A(-3,5,6), B(1,-5,7), C(8,-3,-1)$. Найти внутренний угол при вершине *A* и внешний угол при вершине *C*.

*Решение*.

Внутренний угол при вершине *A* равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а внешний угол при вершине *C* равен углу между векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (сделайте чертеж).

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}(4,-10,1), \overrightarrow{AC}(11,-8,-7), \overrightarrow{CB}(-7,-2,8)$.

Вычислим косинусы углов

$$\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{4\cdot 11+(-10)(-8)+1(-7)}{\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{(-7)11+(-2)(-8)+8(-7)}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+8^2}\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{-117}{\sqrt{117}\sqrt{234}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\alpha=45^0, \varphi=135^0.$

**Задача 3.** Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5,3,4), B(-1,-7,5), C(6,-5,-3), D(2,5,-4)$ есть квадрат.

*Решение*.

Найдем координаты векторов

$\overrightarrow{AB}(4,-10,1), \overrightarrow{BC}(7,2,-8), \overrightarrow{DC}(4,-10,1), \overrightarrow{AD}(7,2,-8).$

Сравнивая координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$, приходим к выводу, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Так как $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}=\sqrt{117}, \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{7^2+2^2+(-8)^2}=\sqrt{117}$,

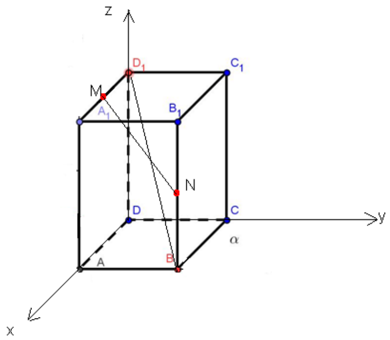
то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$.

Вычисляя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\cdot 7+(-10)2+1(-8)=0,$

приходим к выводу, что $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

Таким образом, четырехугольник *ABCD* есть квадрат.

**Задача 4.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M и N – середины ребер $A_1D_1$ и $BB_1$. Найдите угол между прямой MN и диагональю $BD_1$.




*Решение*.

Введем пространственную  систему координат.

Находим  координаты  точек  B,  $D_1$,  M  ,  N  :  B(1;1;0)  ,  $D_1$(0;0;1)  ,  M(0,5;0;1)  , N(1;1;0,5).

Координаты  векторов $BD_1$(-1;-1;1) ,  MN (0,5;1;-0,5).

Искомый угол находим по формуле

$$\cos a = \frac{|(n_1 * n_2)|}{|n_1| * |n_2|} = \frac{|-1*0{,}5 - 1*1 + 1*(-0{,}5)|}{\sqrt{1+1+1} * \sqrt{0{,}25+1+0{,}25}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

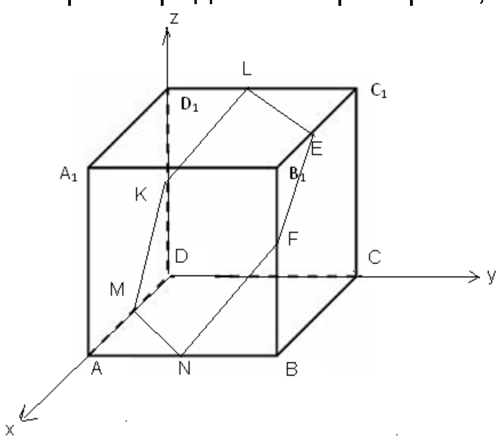
Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**Задания**

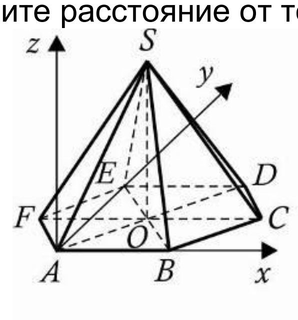
1. В правильной треугольной пирамиде SABC  сторона основания равна $8\sqrt{3}$ и SC =17.

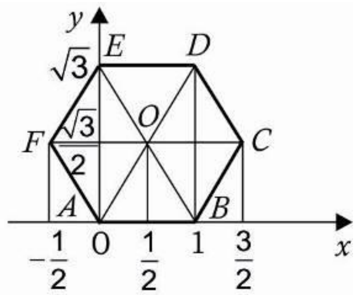
Найдите tg угла , образованного плоскостью основания и прямой AO , где O – точка пересечения медиан грани ABC.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1BD$ и плоскостью, проходящей через середины его ребер AB, $BB_1$ , $B_1C_1$, $C_1D_1$, $D_1D$, DA.

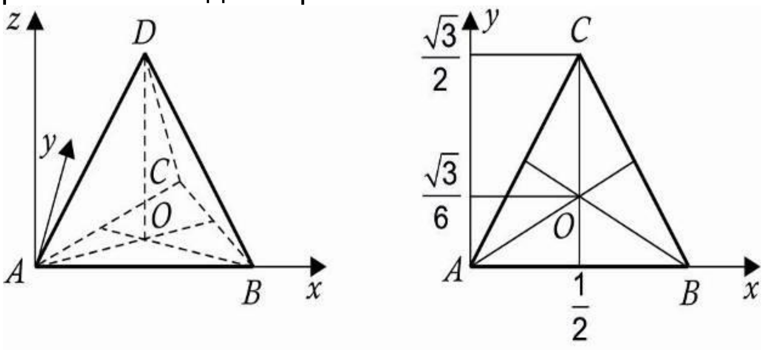



3. В правильной шестиугольной  пирамиде SABCEF ,  все ребра которой равны 1,   найдите расстояние от точки E  до плоскости SDA.

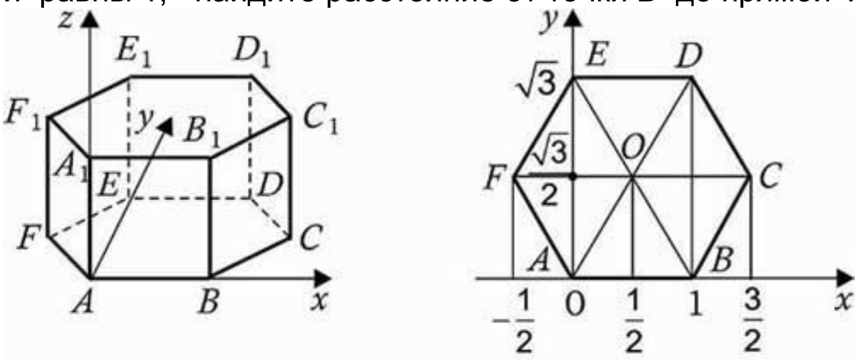


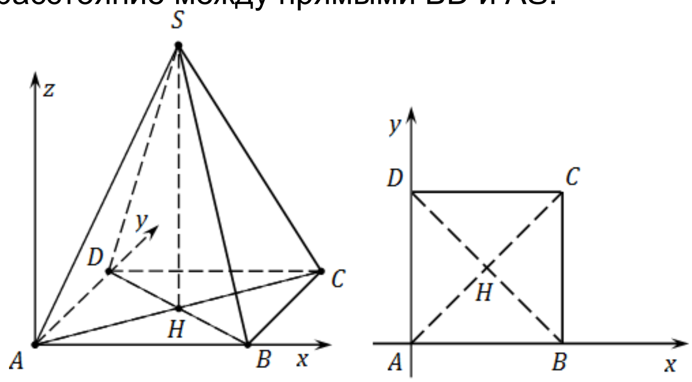
4. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания равна $8\sqrt{3}$ и SC =17 . Найдите tg угла , образованного плоскостью основания и прямой AO , где O – точка пересечения медиан грани ABC.




5. В правильной шестиугольной призме ABCDEF $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой $A_1F_1$.




6. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и AS.




7. В правильном тетраэдре SABC точки M и N – середины ребер AB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AS и MN.

**Тема. Цилиндры и конусы. Эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды**

***Примеры решения задач***

*Эллипсоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0\,.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипсоида*.

*Однополостным гиперболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c>0$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

*Двуполостным гиперболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ a,b,c>0$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*.

*Эллиптическим параболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,\ a,b>0,\ a\geq b\ .$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением эллиптического параболоида*.

Гиперболическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,\ a,b>\ .$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением гиперболического параболоида*.

**Задача 1**. Написать уравнение двуполостного гиперболоида, проходящего через точки $M_1(3,\ 1,\ 2)$, $M_2(2, \sqrt{11}, 3)$ и $M_3(6,\ 2,\ \sqrt{15})$, в канонической системе координат.

*Решение*.

Поскольку ось гиперболоида не задана, его уравнение представим в самом общем виде: $S:\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$.

Коэффициенты при $x^2, y^2, z^2$ обозначим соответственно через $A, B, C$, тогда $S: Ax^2+By^2+Cz^2=1$.

$$\left.\begin{array}{l}M_1\in S\Rightarrow 9A+B+4C=1,\\ M_2\in S\Rightarrow 4A+11B+9C=1,\\ M_3\in S\Rightarrow 36A+4B+15C=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-1,\\ B=-2,\\ C=\ \ 3.\end{array}\right.$$

Таким образом, уравнение искомого двуполостного гиперболоида принимает вид

$$S: x^2+2y^2-3z^2+1=0\ .$$

**Задача 2**. Найти множество всех точек пространства $S$, для каждой из которых расстояние до данной точки А равно расстоянию до данной плоскости $\sigma$, не проходящей через данную точку А.

*Решение*.

Пусть $AD$ — перпендикуляр, проведенный из точки $A$ к плоскости $\sigma$. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы точка $O$ была серединой отрезка $AD$ и $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \vec{k}$ .

В этой системе координат $A\left(0, 0, \frac{p}{2}\right)$, где $p = AD$, а плоскость $\sigma : z + \frac{p}{2} = 0$ .

Если точка $M(x, y, z) \in S$, то $MA = \rho(M, \sigma)$, но $\rho(M, \sigma) = \left|z + \frac{p}{2}\right|$, а $MA = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2}$, поэтому $\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|z + \frac{p}{2}\right|$.

Отсюда следует, что $x^2 + y^2 = 2pz$ .

Итак, доказано, что координаты любой точки множества $S$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 2pz$ .

Докажем обратное утверждение: каждая точка $M$, координаты которой удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 2pz$, принадлежит множеству $S$ .

Из того, что $x^2 + y^2 = 2pz$ и $MA = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2}$, получим $MA = \sqrt{2pz + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(z + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|z + \frac{p}{2}\right|$.

Следовательно, $MA = \rho(M, \sigma)$, то есть $M \in S$. Уравнение $x^2 + y^2 = 2pz$, которое можно записать в виде $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$, определяет параболоид вращения.

Таким образом, $S$ — параболоид вращения, осью вращения которого является прямая $(AD)$.

**Задача 3**. Доказать, что поверхность, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz - a^2 = 0$, является цилиндрической поверхностью.

Определить направление образующих и направляющую линию.

*Решение*.

Выделим в данном уравнении полные квадраты. Получаем $(x - z)^2 + (y - z)^2 = a^2$.

Введем линейную замену координат:

$\begin{cases} x' = x - z, \\ y' = y - z, \\ z' = z, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x' + z, \\ y = y' + z, \\ z = z', \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от старой системы координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ к новой системе координат $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$, при этом $\vec{e}_1' = \vec{i}, \vec{e}_2' = \vec{j}, \vec{e}_3' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Здесь использована та же матрица, причем ее столбцы служат коэффициентами разложения нового базиса по старому базису.

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид $x'^2 + y'^2 = a^2$. Отсюда видно, что задана цилиндрическая поверхность. Ее направляющей линией является окружность $\omega : x'^2 + y'^2 = a^2$, лежащая в плоскости $Oxy$, а образующие параллельны оси $Oz'$, т. е. вектору $\vec{e}_3' = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

**Задача 4**. Найти уравнение конической поверхности с центром в начале координат, которая проходит через линию пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .

*Решение*.

Пусть $\gamma$ — линия пересечения гиперболоида и сферы, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$, $(OM_0)$ — образующая конуса, а вектор $\overrightarrow{OM_0} = \vec{p}(x_0, y_0, z_0)$ — ее направляющий вектор. Тогда прямая $(OM_0)$ задается параметрически: $x = x_0 t,\ y = y_0 t,\ z = z_0 t,\ t \in R$.

Отсюда, $x_0 = \frac{x}{t}, y_0 = \frac{y}{t}, z_0 = \frac{z}{t}$ (при $t \neq 0$).

Подставим эти выражения в систему уравнений, определяющих линию $\gamma$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4t^2} + \dfrac{y^2}{3t^2} - \dfrac{z^2}{t^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{t^2} + \dfrac{y^2}{t^2} + \dfrac{z^2}{t^2} = 5. \end{cases}$$

Исключая параметр *t*, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{1}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{3} - \frac{2z^2}{1} = 0,$$

или $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3/2} - \frac{z^2}{1/2} = 0$ — уравнение эллиптического конуса.

Заметим, что при $t = 0$ получаем $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$ Эти координаты также удовлетворяют уравнению.

**Задания**

1. Распознать поверхность, исследовать ее методом сечений и построить:

а) $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$,

б) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0,$

в) $x^2 - 2y^2 - 4x - z + 1 = 0,$

г) $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,$

д) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8z - 8 = 0,$

е) $4y^2 + z - 16x = 0,$

ж) $2x^2 - 2y^2 + 4z = 0.$

2. Найти уравнение параболоида с центром в начале координат, который проходит через точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, и ось которого совпадает с осью *Oy*.

| № | A | | | B | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
| 1 | 2 | 3 | 7 | -1 | 2 | -1 |
| 2 | 3 | 4 | 7 | -2 | 1 | -2 |
| 3 | 3 | 5 | 7 | -1 | 3 | -3 |
| 4 | 4 | 3 | 7 | -2 | 3 | -4 |
| 5 | 5 | 1 | 7 | -3 | 2 | -5 |
| 6 | 2 | 5 | 7 | -3 | 1 | -6 |
| 7 | 6 | 1 | 6 | -1 | 4 | -7 |
| 8 | 5 | 3 | 5 | -2 | 4 | -7 |
| 9 | 6 | 2 | 4 | -3 | 4 | -7 |
| 10 | 2 | 6 | 3 | -4 | 3 | -7 |

3. Найти уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и проходящей через линию пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и плоскости $Ax+By+Cz=1$.

| № п/п | *a* | *b* | *c* | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | 1 | -4 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | -2 | -3 | 1 |
| 3 | 5 | 3 | -2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | -1 | -2 | 2 | -2 | -5 | 7 |
| 5 | 3 | 1 | 9 | -5 | -1 | -2 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | -5 | 8 |
| 7 | 3 | -1 | -9 | -11 | 1 | 1 |
| 8 | 5 | 2 | 5 | 4 | -6 | 3 |
| 9 | 6 | -6 | 1 | 5 | -1 | 0 |
| 10 | 4 | 2 | 0 | -1 | 2 | 0 |

4. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси: $x=7+3t,\ y=1+4t,\ z=3+2t$ и координаты одной из ее точек $M_0(2,-1,0)$ (указание: воспользоваться формулой расстояния от точки до прямой в пространстве).

## Тема. Классификация квадрик в пространстве

### *Примеры решения задач*

*Квадрикой* в пространстве (или поверхностью второго порядка) называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению 2-го порядка с тремя неизвестными, т. е. уравнению вида

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z=0 \quad (1),$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}$ отличен от нуля.

Всякая квадрика в пространстве является или

–цилиндром (эллиптическим, гиперболическим или параболическим);
–или конусом;
–или эллипсоидом;
–или гиперболоидом (однополостным или двуполостным);
–или параболоидом (эллиптическим или параболическим);
–или парой плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпавших);
–или прямой;
–или точкой;
–или пустым множеством.

Привести к нормальному виду уравнение квадрики пространств $A_2$, $A_3$, $A_4$. Установить вид квадрики, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат.

**Задача 1.** q: $x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2+8x_1+24x_2+8=0$ [1]

Решение.

Приведем квадратичную форму $g = x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ к каноническому виду; сразу видно, что данная квадратичная форма сворачивается по формуле квадрат суммы:

$g = (x_1+2x_2)^2$.

С помощью формул $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 \\ x_2 = y_2, \end{cases}$ (1)

получаем уравнение квадрики:

q: $y_1^2+8y_1+8y_2+8=0$,

$(y_1^2+8y_1+16)+8y_2 - 8=0$,

$(y_1+4)^2= -8(y_2-1)$,

$(y_1+4)^2= 2(-4(y_2-1))$.

Если $\begin{cases} y_1 = z_1 - 4 \\ y_2 = -\frac{z_2}{4} + 1 \end{cases}$, (2)

то уравнение данной квадрики запишется в нормальном виде: $z_1^2=2z_2$.

*Квадрика является параболой.*

Подставив формулы (2) в формулы (1), получим формулы:

$\begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{z_2}{2} - 6 \\ x_2 = 1 - \frac{z_2}{4} \end{cases}$,

перехода от первоначальной аффинной системы координат $Ox_1x_2$ к системе координат $O'z_1z_2$, относительно которой уравнение квадрики имеет нормальный вид. Начало и координатные векторы новой аффинной системы координат имеют в исходной системе координаты:

$O'$ (–6;1), $\overrightarrow{e_1}' = (1;0)$, $\overrightarrow{e_2}' = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$.

**Задача 2.** q: $x_1^2 - 2x_1x_2+5x_2^2 - 4x_1+12x_2+8=0$ [1]

*Решение*.

Квадратичную форму $g= x_1^2 - 2x_1x_2+5x_2^2$ приводим к каноническому виду способом Лагранжа:

$i=1$, $c_{11}=1$, $c_{12}= -1$, $\frac{1}{c_{11}}=1$

$y_1= x_1 - x_2$, $y_1^2= x_1^2 - 2x_1x_2+x_2^2$,

$g - y_1^2 = 4x_2^2$,

$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$, $\rightarrow$ $g = y_1^2+4y_2^2$,

С помощью формул $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$

получаем уравнение квадрики:

q: $y_1^2+4x_2^2 - 4(y_1+y_2)+12y_2+8=0$,

$y_1^2+4x_2^2 - 4y_1 - 4y_2+12y_2+8=0$,

$y_1^2+4x_2^2 - 4y_1+8y_2+8=0$,

$(y_1^2 - 4y_1+4) - 4+ (4x_2^2+8y_2+4) - 4+8=0$,

$(y_1 - 2)^2+(2y_2+2)^2=0$.

Если $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2 \\ y_2 = \frac{z_2}{2} - 1 \end{cases}$ $\rightarrow$ $z_1^2 + z_2^2 = 0$.

Квадрика является *парой мнимых пересекающихся прямых* в действительной точке.

Так как

$\begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{z_2}{2} + 1 \\ x_1 = \frac{z_2}{2} - 1 \end{cases}$, то O′ (1; –1), $\overrightarrow{e_1}'$ = (1;0), $\overrightarrow{e_2}'$ = ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$).

**Задания**

1. Привести к нормальному виду уравнение квадрики пространств $A_2$, $A_3$, $A_4$. Установить вид квадрики, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат:

а) q: $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 6 = 0$;

б) q: $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + 8x_3 - 6 = 0$;

в) q: $x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 12x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13 = 0$;

г) q: $x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_2 - 12x_3 - 12 = 0$)

д) q: $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0$;

е) q: $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4 - 6x_2 + 8 = 0$;

ж) q: $4x_1^2 + 9x_2^2 - x_4^2 + 6x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_4 + 5 = 0$.

2. Запишите квадратичные формы с матрицей $\boldsymbol{A}$.

$$а).\quad A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$б).\quad A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$в).\quad A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы:

а). $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$.

б). $f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 - 42x_2x_3$.

в). $f = 4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

г). $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$.

д). $f = -x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$.

е). $f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

**Материалы для проведения текущей и промежуточной аттестаций представлены в фондах оценочных средств по дисциплине Геометрия**