**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой
прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

__ __ Е. А. Позднова
06.09.2017 г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
# Б1.В.04 АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**1. Шифр и наименование направления подготовки:**

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

**2. Профили подготовки:**

Математика. Информатика и информационные технологии в образовании.

**3. Квалификация выпускника:**

Бакалавр

**4. Форма обучения:**

Очная, заочная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины**

**Наименование кафедры:** кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

**6. Составитель программы:**

Л.В. Лободина, кандидат педагогических наук, доцент

**7. Рекомендована:**

научно-методическим советом факультета физико-математического и естественно-научного образования (протокол № 1 от 31.08.2017)

8. Семестр: 4

**9. Цели и задачи учебной дисциплины:**

**Целью** дисциплины является обеспечение фундаментальной математической подготовки как основы будущей профессиональной деятельности; формирование мировоззрения и развитие личности будущего педагога.

**Задачи** дисциплины:

- дать представление о месте и роли алгебры и теории чисел в системе математических наук;
- формирование основных понятий курса алгебры и теории чисел, необходимых в профессиональной деятельности обучающихся;
- формирование и развитие доказательного мышления;
- формирование навыков применения аппарата алгебры и теории чисел к решению задач в разных областях математики и других естественных наук;
- формирование у студентов навыков работы с учебной, научной и научно-методической литературой.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина «Алгебра и теория чисел» относится к Блоку 1 Дисциплины (модули) и является обязательной дисциплиной вариативной части ООП.

**11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:**

профессиональные (ПК): *ПК-1, ПК-4.*

**В результате изучения дисциплины студент должен**

***знать:***

–основы алгебраической теории и иметь представление об их роли в математическом образовании;

–базовые понятия и основные технологические приемы матричной алгебры, теории линейных пространств (над вещественными и комплексными полями) и их отображений, многочленов от одной и многих переменных;

–основы линейной алгебры (СЛУ, СЛН и т.д.), лежащие в основе построения математических моделей в экономике, социологии, эконометрике и т.д.

***уметь:***

- применять знания алгебраической теории в описании процессов и явлений в различных областях знания;
- использовать алгоритмические приемы решения стандартных задач;
- производить отбор математического аппарата, наиболее эффективного для решения конкретных задач;

–интерпретировать формальные алгебраические структуры.

***владеть:***

- материалом дисциплины на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе практической деятельности и требующие углубленных профессиональных знаний;
- основными методами и приемами решения задач по темам дисциплины;

–навыками формализации внутриматематических и прикладных задач.

**12. Структура и содержание учебной дисциплины:**

**12.1 Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — __*8*_/_*288*__.**

## 12.2 Виды учебной работы (очная форма обучения):

| Вид учебной работы | Трудоемкость (часы) | |
|---|---|---|
| | Всего | По семестрам |
| | | сем. 4 |
| Аудиторные занятия | 126 | 126 |
| в том числе: лекции | 54 | 54 |
| практические | 72 | 72 |
| лабораторные | 0 | 0 |
| Самостоятельная работа | 126 | 126 |
| Часы на контроль | 36 | 36 |
| Итого: | 288 | 288 |
| Форма промежуточной аттестации | экзамен | экзамен |

## Виды учебной работы (заочная форма обучения):

| Вид учебной работы | Трудоемкость (часы) | |
|---|---|---|
| | Всего | По семестрам |
| | | сем. 4 |
| Аудиторные занятия | 20 | 20 |
| в том числе: лекции | 10 | 10 |
| практические | 10 | 10 |
| лабораторные | 0 | 0 |
| Самостоятельная работа | 259 | 259 |
| Часы на контроль | 9 | 9 |
| Итого: | 288 | 288 |
| Форма промежуточной аттестации | экзамен | экзамен |

## 12.3 Содержание разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины |
|---|---|---|
| 1. | Алгебраические структуры | Бинарные отношения и их свойства. Алгебраические операции на множествах и их основные свойства. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией: группоид, полугруппа, моноид, группа. Примеры. Простейшие свойства групп. Алгебраические структуры с двумя бинарными операциями: полукольцо, кольцо, поле, их простейшие свойства. Примеры. Алгебраические системы. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических систем. |
| 2. | Векторные пространства | Понятие векторного пространства над полем, его простейшие свойства. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Сумма подпространств. Прямая сумма подпространств. Линейное многообразие. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Основные свойства линейной зависимости. Базис и ранг системы векторов. Базис и размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств. |
| 3. | Линейные преобразования и их свойства | Понятие линейного преобразования и его простейшие свойства. Запись линейного преобразования в координатах. Матрица линейного преобразования. Нахождение координат образа вектора при линейном преобразовании. Связь между координатами вектора при переходе от одного базиса к другому. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Обратимость матрицы перехода от одного базиса к другому. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах. Операции над линейными преобразованиями.<br>Ранг и дефект линейного преобразования. Совпадение ранга линейного преобразования с рангом его матрицы.<br>Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. |
| 4. | Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов | Алгебраическое и функциональное определение кольца многочленов. Кольцо многочленов от одной переменной над областью целостности. Делимость многочлена на двучлен x-a и корни многочлена. Теорема о возможном наибольшем числе корней многочлена. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Многочлены над полем. Основные свойства делимости многочленов над полем. Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов. Теорема о существовании и нахождении НОД многочленов. Взаимно простые многочлены и их свойства. НОК многочленов и его вычисление. Приводимые и неприводимые над полем многочлены и их основные свойства. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность. Нахождение НОД и НОК многочленов при помощи разложения на неприводимые множители. Понятие производной многочлена, основные свойства производных многочленов. Вычисление значений многочлена и его производных с помощью схемы Горнера. Формула Тейлора. Неприводимые кратные множители многочленов. Основная теорема о кратности неприводимого множителя многочлена. Понятие кратности корня многочлена. Основная теорема о кратности корня многочлена. Отделение неприводимых кратных множителей многочлена. |
| 5. | Многочлены от нескольких переменных | Построение кольца многочленов от n переменных. Степень и лексикографическое упорядочение многочлена от n переменных. Условия равенства многочленов от нескольких переменных. Поле частных кольца многочленов. Понятие приводимого и неприводимого многочленов от нескольких переменных. Теорема о разложимости многочлена от нескольких переменных в произведение неприводимых множителей и единственность такого разложения. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема о единственности представления симметрического многочлена в виде многочлена от основных симметрических многочленов. |
| 6. | Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел | Теорема о непрерывности многочлена с комплексными коэффициентами. Лемма о модуле старшего члена многочлена с комплексными коэффициентами. Теорема о существовании корня многочлена с комплексными коэффициентами (основная теорема алгебры). Разложение многочлена с комплексными коэффициентами в произведение линейных множителей. Связь между корнями и коэффициентами многочлена (формулы Виета). Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Представимость многочлена с действительными |

| | | |
|---|---|---|
| | | коэффициентами в виде произведения неприводимых множителей. Решение уравнений третьей и четвертой степени (в радикалах). |
| 7. | Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа | Целые корни многочлена с целыми коэффициентами. Дробные рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Понятие алгебраического числа и его минимального многочлена. Трансцендентные числа. Основные свойства минимального многочлена алгебраического числа. Понятие простого алгебраического расширения поля. Теорема о строении простого алгебраического расширения поля. Конечномерность простого алгебраического расширения поля. Алгебраическая замкнутость простого алгебраического расширения поля. О понятии составного алгебраического расширения поля. Поле алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел. Понятие разрешимости уравнений в радикалах. Разрешимость в квадратных радикалах. Необходимое условие разрешимости задач на построение. Неразрешимость некоторых задач на построение: квадратура круга, удвоение куба, трисекция угла. |
| 8. | Важнейшие функции в теории чисел | Функции $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ и их свойства. Мультипликативные функции. Число и сумма делителей натурального числа. Функция Мёбиуса. Функция Эйлера. |
| 9. | Основы теории сравнений | Основные понятия. Простейшие свойства сравнений. Полная и приведённая системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнения первой степени. Системы сравнений первой степени. Сравнения любой степени по простому и составному модулю. Сравнения второй степени. Символ Лежандра. Понятия первообразного корня и индекса |
| 10. | Натуральные числа | Понятие натурального ряда. Аксиоматическое построение системы натуральных чисел. О непротиворечивости аксиоматической теории натуральных чисел. Система аксиом Пеано и её свойства. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Конечные и счётные множества. |
| 11. | Целые числа | Аксиоматическое построение кольца целых чисел как минимального расширения полукольца натуральных чисел. Существование системы целых чисел. Кольцо целых чисел как область целостности. Упорядоченное кольцо целых чисел. |
| 12. | Рациональные числа | Аксиоматическое построение поля рациональных чисел как минимального расширения кольца целых чисел. Существование поля рациональных чисел. Упорядоченное поле рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями. |
| 13. | Действительные числа | Аксиоматическое построение поля действительных чисел как минимального расширения поля рациональных чисел. Существование поля действительных чисел. Упорядоченное поле действительных чисел. Представление действительных чисел десятичными дробями. Другие определения системы действительных чисел: с помощью понятий сечения и верхней границы; с помощью понятия фундаментальной последовательности. |

| | | |
|---|---|---|
| 14. | Комплексные, двойные и дуальные числа | Аксиоматическое построение поля комплексных чисел как минимального расширения поля действительных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Двойные и дуальные числа. |
| 15. | Алгебры над полем действительных чисел | Системы кватернионов и гиперкомплексных чисел. Общий взгляд на действительные, комплексные числа и кватернионы. Предел расширения числовых систем. |

## 12.4 Междисциплинарные связи с другими дисциплинами:

| № п/п | Наименование дисциплин учебного плана, с которыми организована взаимосвязь дисциплины рабочей программы | № № разделов дисциплины рабочей программы, связанных с указанными дисциплинами |
|---|---|---|
| 01 | Математический анализ | 5, 17, 18 |
| 02 | Геометрия | 1, 2, 3, 7 |
| 03 | Математическая логика и теория алгоритмов | 13, 14, 15, 16, 17, 18 |

## 12.5 Разделы дисциплины и виды занятий (очная форма обучения):

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Виды занятий (часов) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Практи ческие | Лабора торные | Самостоятель ная работа | Всего |
| 1. | Алгебраические структуры | 4 | 6 | 0 | 8 | 18 |
| 2. | Векторные пространства | 4 | 6 | 0 | 8 | 18 |
| 3. | Линейные преобразования и их свойства | 4 | 4 | 0 | 8 | 16 |
| 4. | Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов | 4 | 6 | 0 | 8 | 18 |
| 5. | Многочлены от нескольких переменных | 4 | 4 | 0 | 10 | 18 |
| 6. | Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел | 4 | 6 | 0 | 8 | 18 |
| 7. | Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа | 4 | 4 | 0 | 10 | 18 |
| 8. | Важнейшие функции в теории чисел | 2 | 4 | 0 | 8 | 14 |
| 9. | Основы теории сравнений | 4 | 8 | 0 | 10 | 22 |
| 10. | Натуральные числа | 4 | 4 | 0 | 8 | 16 |
| 11. | Целые числа | 4 | 4 | 0 | 8 | 16 |
| 12. | Рациональные числа | 4 | 4 | 0 | 8 | 16 |
| 13. | Действительные числа | 2 | 4 | 0 | 8 | 14 |
| 14. | Комплексные, двойные и дуальные числа | 4 | 4 | 0 | 8 | 16 |
| 15. | Алгебры над полем действительных чисел | 2 | 4 | 0 | 8 | 14 |
| | Экзамен | 36 | | | | |
| | Итого: | 54 | 72 | 0 | 126 | 288 |

## Разделы дисциплины и виды занятий (заочная форма обучения):

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Виды занятий (часов) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 1. | Алгебраические структуры | 1 | 1 | 0 | 21 | 23 |
| 2. | Векторные пространства | | 1 | 0 | 21 | 22 |
| 3. | Линейные преобразования и их свойства | 1 | 1 | 0 | 21 | 23 |
| 4. | Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов<br>Многочлены от нескольких переменных | 1 | 2 | 0 | 21 | 24 |
| 5. | Многочлены над полем действительных и комплексных чисел.<br>Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа | 1 | 1 | 0 | 28 | 30 |
| 6. | Важнейшие функции в теории чисел.<br>Основы теории сравнений | 1 | 1 | 0 | 21 | 23 |
| 7. | Натуральные числа | 1 | 1 | 0 | 21 | 23 |
| 8. | Целые числа | | 1 | 0 | 21 | 22 |
| 9. | Рациональные числа | 1 | | 0 | 21 | 22 |
| 10. | Действительные числа | 1 | | 0 | 21 | 22 |
| 11. | Комплексные, двойные и дуальные числа | 1 | 1 | 0 | 21 | 23 |
| 12. | Алгебры над полем действительных чисел | 1 | | 0 | 21 | 22 |
| | Экзамен | 9 | | | | |
| | Итого: | 10 | 10 | | 259 | 288 |

## 13. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

| № п/п | Источник |
|---|---|
| 1 | Окунев Л.Я. Высшая алгебра: учеб.- СПб: Лань, 2009 |
| 2 | Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учеб. пос. для вузов.- СПб: Лань, 2008 |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|---|---|
| 1 | Фадеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пос. для вузов.- СПб: Лань, 2007 |
| 2 | Алферова, З.В. Алгебра и теория чисел. Учебно-методический комплекс / З.В. Алферова, Э.Л. Балюкевич, А.Н. Романников. - М. : Евразийский открытый институт, 2011. - 279 с. - ISBN 978-5-374-00535-6; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90645 (03.03.2015). |
| 3 | Земляков, А.Н. Алгебра плюс: рациональные и иррациональные алгебраические задачи. Методическое пособие / А.Н. Земляков. - 2-е изд. (эл.). - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 122 с. - ISBN 978-5-9963-0961-0; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222097 (03.03.2015). |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

| № п/п | Источник |
|---|---|

| | |
|---|---|
| 1 | Епихин, В.Е. Алгебра и теория пределов. Элективный курс : учебное пособие / В.Е. Епихин. - 2-е изд. (эл.). - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. - 359 с. - ISBN 978-5-9963-0957-3; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=221734 (03.03.2015). |
| 2 | Туганбаев, А.А. Линейная алгебра : учебное пособие / А.А. Туганбаев. - М. : Флинта, 2012. - 74 с. - ISBN 9785976514072; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115141 (03.03.2015). |
| 3 | Брик, И.М. Основные понятия и теоремы алгебры и геометрии [Электронный ресурс]: материалы для подготовки к государственному экзамену по математике и методике ее преподавания: учебное пособие/ И.М. Брик, Л.В. Лободина. - Борисоглебск: Б.и, 2008 Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. публикации. |
| 4 | Алексеева, Т.И. Группы [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов заочной формы обучения.(специальность: 050201 - математика)/ Т.И. Алексеева. - Борисоглебск: ГОУ ВПО "БГПИ", 2007 Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. публикации ISBN 978- 5-85897-399-7 |
| 5 | Алексеева, Т.И. Руководство к решению задач по алгебре (Линейная алгебра) [Электронный ресурс]: учебное пособие для физ. мат. специальностей пед. вузов/ Т.И. Алексеева. - Борисоглебск: ГОУ ВПО "БГПИ", 2009 Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. публикации ISBN 978-5-85897-449-9. |

## 14. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Набор демонстрационного оборудования (компьютер, экран, проектор, колонки).

## 15. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю):

Технологии создания и обработки различных видов информации (офисный пакет Microsoft Office: MS Word, MS PowerPoint, MS Excel).

Технологии создания и обработки тестовых заданий (тестовая оболочка MyTestX).

## 16. Формы организации самостоятельной работы:

- выполнение проектных заданий;
- составление глоссария, кластеров, синквейнов и т.д.;
- подготовка докладов и рефератов;
- выполнение заданий из фонда оценочных средств для организации текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- выполнение заданий олимпиад и конкурсов.

## 17. Перечень учебно-методического обеспечения для организации самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю):

Фонд оценочных средств по дисциплине

## 18. Критерии аттестации по итогам освоения дисциплины:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если студент свободно ориентируется в теоретическом материале; умеет изложить и корректно оценить различные подходы к излагаемому материалу, способен сформулировать и доказать собственную точку зрения; обнаруживает свободное владение понятийным аппаратом; демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и полное освоение показателей формируемых компетенций;

- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если студент хорошо ориентируется в теоретическом материале; имеет представление об основных подходах к излагаемому материалу; знает определения основных теоретических понятий излагаемой темы, в основном демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение большинства показателей формируемых компетенций;

- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент может ориентироваться в теоретическом материале; в целом имеет представление об основных понятиях излагаемой темы, частично демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение некоторых показателей формируемых компетенций;

**оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не ориентируется в теоретическом материале; не сформировано представление об основных понятиях излагаемой темы, не демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение показателей формируемых компетенций.

**19. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля):**

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на аудиторные занятия и на самостоятельную работу;
- формах аудиторных занятий и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами аудиторных занятий по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий, которые размещены на сайте филиала. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

## ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

## АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)

Профили подготовки: Математика. Информатика и информационные технологии в образовании

Квалификация выпускника: бакалавр

**Паспорт**
**фонда оценочных средств**
**по учебной дисциплине**

**АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

**1. В результате изучения Алгебры и теории чисел обучающийся должен:**

1.1. Знать:

– основы алгебраической теории и иметь представление об их роли в математическом образовании;

– базовые понятия и основные технологические приемы матричной алгебры, теории линейных пространств (над вещественными и комплексными полями) и их отображений, многочленов от одной и многих переменных;

– основы линейной алгебры (СЛУ, СЛН и т.д.), лежащие в основе построения математических моделей в экономике, социологии, эконометрике и т.д.

1.2. Уметь:

- применять знания алгебраической теории в описании процессов и явлений в различных областях знания;

- использовать алгоритмические приемы решения стандартных задач;

- производить отбор математического аппарата, наиболее эффективного для решения конкретных задач;

–интерпретировать формальные алгебраические структуры.

1.3. Владеть:

- материалом дисциплины на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе практической деятельности и требующие углубленных профессиональных знаний;

- основными методами и приемами решения задач по темам дисциплины;

– навыками формализации внутриматематических и прикладных задач.

## 2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

| Текущая аттестация | Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины и их наименование* | Код контролируемой компетенции (или ее части) | Наименование оценочного средства** |
|---|---|---|---|
| 1 | Алгебраические структуры | ПК-1, ПК-4 | Контрольная работа № 1<br>Тест для самопроверки |
| 2 | Векторные пространства | ПК-1, ПК-4 | Домашняя контрольная работа |
| 3 | Линейные преобразования и их свойства | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания |
| 4 | Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания |
| 5 | Многочлены от нескольких переменных | ПК-1, ПК-4 | Разноуровневые задачи и задания<br><br>Контрольная работа №2 |
| 6 | Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания |
| 7 | Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания<br>Разноуровневые задачи и задания |
| 8 | Важнейшие функции в теории чисел | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания |
| 9 | Основы теории сравнений | ПК-1, ПК-4 | Контрольная работа № 3 |
| 10 | Натуральные числа | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания<br>Разноуровневые задачи и задания |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | Целые числа | ПК-1, ПК-4 | Разноуровневые задачи и задания |
| 12 | Рациональные числа | ПК-1, ПК-4 | Доклады, сообщения |
| 13 | Действительные числа | ПК-1, ПК-4 | Индивидуальные задания<br><br>Разноуровневые задачи и задания |
| 14 | Комплексные, двойные и дуальные числа | ПК-1, ПК-4 | Доклады, сообщения |
| 15 | Алгебры над полем действительных чисел | ПК-1, ПК-4 | Доклады, сообщения |
| **Промежуточная аттестация: экзамен** | | ПК-1, ПК-4 | Комплект КИМ |

**Приложение 1**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

Кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

**Перечень вопросов к экзамену по дисциплине**
**АЛГЕБРАИ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

1. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией: группоид, полугруппа, моноид, группа. Примеры. Простейшие свойства групп.
2. Теорема о возможном наибольшем числе корней многочлена.
3. Алгебраические структуры с двумя бинарными операциями: полукольцо, кольцо, поле, их простейшие свойства. Примеры.
4. Многочлены над полем. Основные свойства делимости многочленов над полем.
5. Гомоморфизм и изоморфизм групп, колец и полей.
6. Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов. Теорема о существовании и нахождении НОД многочленов. НОК многочленов и его вычисление.
7. Понятие векторного пространства над полем, его простейшие свойства.
8. Приводимые и неприводимые над полем многочлены и их основные свойства.
9. Подпространство. Примеры подпространств. Критерий подпространства.
10. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность. Нахождение НОД и НОК многочленов при помощи разложения на неприводимые множители.
11. Линейная оболочка системы векторов. Сумма подпространств. Прямая сумма подпространств.
12. Понятие производной многочлена, основные свойства производных многочленов. Вычисление значений многочлена и его производных с помощью схемы Горнера. Формула Тейлора.
13. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Основные свойства линейной зависимости.
14. Неприводимые кратные множители и корни многочленов. Основная теорема о кратности неприводимого множителя многочлена. Отделение неприводимых кратных множителей многочлена.
15. Базис и размерность векторного пространства.
16. Теорема о существовании корня многочлена с комплексными коэффициентами (основная теорема алгебры). Следствия из неё.
17. Изоморфизм векторных пространств.
18. Связь между корнями и коэффициентами многочлена (формула Виета).
19. Понятие линейного оператора и его простейшие свойства. Операции над линейными операторами.

20. Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Многочлены, неприводимые над полем действительных чисел.
21. Запись линейного оператора в координатах. Матрица линейного оператора.
22. Решение уравнений третьей и четвертой степени (в радикалах).
23. Нахождение координат образа вектора при линейном операторе.
24. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами.
25. Связь между координатами вектора при переходе от одного базиса к другому.
26. Многочлены с действительными коэффициентами. Неприводимость многочленов с действительными коэффициентами.
27. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.
28. Построение кольца многочленов от n переменных.
29. Ранг и дефект линейного оператора. Совпадение ранга линейного преобразования с рангом его матрицы.
30. Степень и лексикографическое упорядочение многочлена от n переменных. Понятие приводимого многочлена от n переменных. Теорема о разложимости многочлена от n переменных в произведение неприводимых множителей и его единственность.
31. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.
32. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема о единственности представления симметрического многочлена в виде многочлена от основных симметрических многочленов.
33. Простейшие свойства делимости целых чисел. НОД и НОК целых чисел и их свойства. Алгоритм Евклида. Непрерывные дроби и их связь с алгоритмом Евклида..
34. Индексы по модулям $p^{\alpha}$ и $2p^{\alpha}$. Индексы по модулю $2^{\alpha}$.
35. Простые числа и их роль в кольце целых чисел. Каноническая форма целого числа. Теорема о единственности разложения на простые множители.
36. Сравнения второй степени. Символ Лежандра.
37. Функции $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ и их свойства. Мультипликативные функции. Число и сумма делителей натурального числа.
38. Аксиоматическое построение поля действительных чисел как минимального расширения поля рациональных чисел. Существование поля действительных чисел. Упорядоченное поле действительных чисел.
39. Функция Мёбиуса. Функция Эйлера.
40. Представление действительных чисел десятичными дробями. Другие определения системы действительных чисел: с помощью понятий сечения и верхней границы; с помощью понятия фундаментальной последовательности.
41. Основные понятия. Простейшие свойства сравнений. Полная и приведённая системы вычетов.
42. Понятие натурального ряда. Аксиоматическое построение системы натуральных чисел. О непротиворечивости аксиоматической теории натуральных чисел.
43. Теоремы Эйлера и Ферма.
44. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Конечные и счётные множества.
45. Сравнения первой степени. Системы сравнений первой степени.

46. Аксиоматическое построение кольца целых чисел как минимального расширения полукольца натуральных чисел. Существование системы целых чисел.
47. Сравнения любой степени по простому и составному модулю.
48. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел как минимального расширения кольца целых чисел. Существование поля рациональных чисел.
49. Понятия первообразного корня и индекса. первообразные корни по модулям $p^{\alpha}$ и $2p^{\alpha}$.
50. Упорядоченное поле рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями.
51. Понятия и основные свойства числовых и алгебраических систем.
52. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Двойные и дуальные числа.
53. Системы кватернионов и гиперкомплексных чисел. Общий взгляд на действительные, комплексные числа и кватернионы. Предел расширения числовых систем.
54. Сравнения первой степени. Системы сравнений первой степени

**Приложение 2**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

Кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

# Комплект заданий для контрольной работы № 1

по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**Вариант 1**
**Тема Алгебраические структуры**
Задание 1. Определить, какой алгебраической структурой является множество $A=\left\{2^n \mid n\in Z\right\}$ по операции обычного умножения.

**Тема Алгебраические структуры**
Задание 2. Выяснить, будут ли гомоморфны алгебры $\langle Z,+\rangle$ и $\langle 2Z,+\rangle$, если отображение $\varphi: Z\to 2Z$ задано по следующему правилу: $(\forall x\in Z)\,\varphi(x)=2x$ .

**Тема Алгебраические структуры**
Задание 3. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить:
а) $\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)}{1+i}$; б) все значения $\sqrt[4]{-4}$ и изобразить их геометрически.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 4. Вычислить $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-2x+7\cdot$

**Тема Системы линейных уравнений**
Задание 5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8,\\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7,\\ 2x_1-x_2-5x_4=6,\\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1.\end{cases}$$

**Тема Векторные пространства**
Задание 6. Установить, линейно зависима или нет система векторов $a_1=(1;2;3),\ a_2=(1;-2;3),\ a_3=(1;2;-3)$ в соответствующем арифметическом пространстве над полем Q.

**Тема Системы линейных уравнений**
Задание 7.
Найти общее и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4. \end{cases}$$

**Тема Системы линейных уравнений**
Задание 8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Вариант 2**
**Тема Алгебраические структуры**
Задание 1. Выяснить, какими свойствами обладает бинарная операция «$\circ$», заданная на множестве действительных чисел правилом:

$$(\forall a, b \in R)\, a \circ b = \frac{a+b}{2}.$$

**Тема Алгебраические структуры**
Задание 2. Выяснить, является ли отображение $\varphi : \langle Z, *, \circ \rangle \to \langle Z, +, \cdot \rangle$ гомоморфизмом (изоморфизмом) структур, если оно задано правилом:

$$\varphi(a) = a + 5,\; a * b = a + b + 5,\; a \circ b = ab + 5a + 5b + 20.$$

**Тема Алгебраические структуры**
Задание 3. а) Вычислить: $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$; б) решить уравнение $z^2 + z + 1 = 0$ в комплексных числах.

**Тема Системы линейных уравнений**
Задание 4. Вычислить $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x - 17$.

**Тема Системы линейных уравнений**
Задание 5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

**Тема Векторные пространства**
Задание 6. Установить, линейно зависима или нет система векторов $a_1 = (1;2;3),\, a_2 = (0;1;2),\, a_3 = (0;0;1)$ в соответствующем арифметическом пространстве над полем Q.

**Тема Системы линейных уравнений**
Задание 7.
Найти общее и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Вариант 3**

**Тема Алгебраические структуры**

Задание 1. Определить, какой алгебраической структурой является множество $A = \left\{ x + y\sqrt{3} \,\middle|\, x, y \in R \right\}$ по операции обычного умножения.

**Тема Алгебраические структуры**

Задание 2. Выяснить, является ли отображение $\varphi : \langle Z^{+}, + \rangle \to \langle Z, \cdot \rangle$ изоморфизмом структур, если $(\forall x \in Z)\ \varphi(x) = 7x$.

**Тема Алгебраические структуры**

Задание 3. **.** Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить:

а) $\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{12} - \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{6}}{(i-1)^{12}}$; б) все значения $\sqrt[6]{1}$ и изобразить их геометрически.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 4. Вычислить $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$$

**Тема Векторные пространства**

Задание 6. Установить, линейно зависима или нет система векторов $a_1 = (1;1;0), a_2 = (0;2;2)$ в соответствующем арифметическом пространстве над полем Q.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 7.

Найти общее и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Вариант 4**

**Тема Алгебраические структуры**

Задание 1. Выяснить, какими свойствами обладает бинарная операция «o», заданная на множестве положительных действительных чисел правилом:

$$(\forall a,b \in R)\, a \circ b = a^b.$$

**Тема Алгебраические структуры**

Задание 2. Выяснить, является ли отображение $\varphi : \langle Z,+,\cdot\rangle \to \langle Z,+,\cdot\rangle$ гомоморфизмом (изоморфизмом) структуры на себя, если оно задано правилом:

$$(\forall a \in Z)\, \varphi(a) = 0.$$

**Тема Алгебраические структуры**

Задание 3. а) Вычислить: $i^{17} - 5i^{14} + 10i^7 + 9i^5 - 4$; б) решить уравнение $iz^2 - (1+i)z + 4i - 7 = 0$ в комплексных числах.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 4. Вычислить $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 - x + 11$.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

**Тема Векторные пространства**

Задание 6. Установить, линейно зависима или нет система векторов $a_1 = (1;4;2)$, $a_2 = (2;5;8)$, $a_3 = (3;6;6)$ в соответствующем арифметическом пространстве над полем Q.

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 7.

Найти общее и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

**Тема Системы линейных уравнений**

Задание 8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Критерии оценки:**

-оценка «отлично» выставляется студенту, если выполнены все задания;
-оценка «хорошо» выставляется студенту, если выполнены все задания с недочётами или полностью 7-8 заданий;
-оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если выполнены от 7 заданий с недочётами заданий или полностью 4-5 заданий;
-оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если выполнено менее 3 заданий.

**Приложение 3**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

Кафедра прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

## Комплект разноуровневых задач (заданий)

по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1 Составление глоссария и кластера основных терминов раздела (нескольких разделов) дисциплины (реконструктивный уровень)
2 Составление сравнительных, концептуальных таблиц по заданной теме (творческий уровень)
3 Составление, коррекция синквейнов и денотатных графов с основными понятиями (творческий уровень)
4 Составление аннотированного перечня источников сети Интернет (реконструктивный уровень)
5 Написание рецензий на готовые рефераты по разделам дисциплины, скачанные с различных сайтов (творческий уровень)
6 Составление таблицы толстых и тонких вопросов по разделам дисциплины (реконструктивный уровень)
7 Составление вопросов к ромашке Блума (таксономия целей) к разделам дисциплины (творческий уровень)

**Критерии оценки:**

Задания оцениваются баллами от 1 до 8.
Задания реконструктивного уровня оцениваются баллами от 1 до 4
Задания творческого уровня оцениваются баллами от 4 до 8

-4 балла выставляется студенту, если задание реконструктивного уровня выполнено с обоснованием и демонстрирует сформированность у студента умений синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей;
-8 баллов выставляется студенту, если выполненное задание творческого уровня демонстрирует сформированность у студента умений интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

**Приложение 4**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

Кафедра прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

**Комплект тестовых заданий № 1**
**для самопроверки**

по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**Тесты для самопроверки**

Задание 1. Решите уравнения:

1.1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; 1.2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Варианты ответов:

1) $x = -2/5$;

**2)** $x = 6/5$**;**

3) $x = -3$;

**4)** $x = -6$**;**

5) $x = -1/3$;

6) $x = 1$.

Задание 2. Решите уравнения и неравенство:

2.1) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; 2.2) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & x & 3 \end{vmatrix} = -1$; 2.3) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

Варианты ответов:

1) $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; +\infty)$;

**2)** $x$ **=-2;**

3) $x \in (-6; -4)$;

4) $x = \pm 2$;

**5)** $x \in$ **(4; 6);**

6) $x = 2$;

**7)** $x$ **=0,** $x$ **=** $\pm$ **1;**

8) $x = 0$, $x = 1$.

Задание 3. Вычислите определитель разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

Варианты ответов:
1) $-4a+2b-5c$;
2) $-2a-2b-2c$;
**3)** $-4a-2b+7c$ **.**

Задание 4. Найдите значения *a* (если они существуют), при которых систему $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ ax+5y=-2a-5 \end{cases}$ можно решить методом Крамера.

Варианты ответов:
**1) при** $a \neq 2$ **;**
2) при $a \neq -2$;
3) при любом *a;*
4) ни при каких *a* систему нельзя решить методом Крамера.

Задание 5. Систему уравнений из задания 4 решите методом Крамера, используя формулы $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$. Ответ должен состоять из тройки чисел $(x, y, \Delta x + \Delta y)$.

Варианты ответов:
1) (2, 1, 15*a*+30);
2) (-2, -1, -15*a*-30);
3) (-1, -2, -15*a*-30);
4) (1, 2, 15+30*a*).

Задание 6. Найдите матрицу $X$, удовлетворяющую условию , $2A+X=B$ где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Варианты ответов:
1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$;
2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ -9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} 2 & 13 & 4 \\ -3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$;
**4)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$**.**

Задание 7. Даны матрицы $A_{n \times m}$ и $B_{k \times p}$. Какие четвёрки чисел (*n*, *m*, *k*, *p*) характеризующие размеры матриц *A* и *B*, обеспечивают существование произведения матрицы *AB?*
Варианты значений (*n*, *m*, *k*, *p*):
1) (1, 2, 3, 4);
**2) (6, 3, 3, 4);**
3) (2, 3, 4, 3).

Задание 8. Определите размеры матрицы $C = A \cdot B$, если *A* и *B* согласованные матрицы из задания 7.
Варианты ответов:
1) $3 \times 4$;
2) $4 \times 6$;
**3)** $6 \times 4$**.**

Задание 9. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите $C = A \cdot B$ и $D = B \cdot A$. Ответ должен состоять из пары чисел $(c_{21}, d_{21})$, являющихся элементами матриц *C* и *D* соответственно.
Варианты ответов:
1) (-4, 2);
2) (0, 1);
3) (-7, 2);
**4) (1, 3).**

Задание 10. Найдите значение многочлена $f(A)$
от матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Указание. Пусть дан многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ и квадратная матрица *A.* Тогда $f(A) = aA^2 + bA + cE$, где *E* – единичная матрица того же порядка, что и матрица *A*.
Варианты ответов:
1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$;
**2)** $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$**;**
3) $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Задание 11. Определите, при каком значении $\alpha$ существует матрица, обратная данной:

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:
1) $\alpha = \sqrt{5}$;
**2)** $\alpha \neq -1$**;**
3) при любом $\alpha$;
4) $\alpha \neq 1$.

Задание 12. Пусть *A* и *B* – невырожденные матрицы. Решите матричное уравнение $AXB = C$.
Варианты ответов:
**1)** $A^{-1}CB^{-1}$**;**
2) $\dfrac{C}{AB}$;
3) $CA^{-1}B^{-1}$;
4) $A^{-1}B^{-1}C$.

Задание 13. Найдите матрицу, обратную матрице *A* (с помощью элементарных преобразований)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ должен состоять из тройки чисел ($\alpha, \beta, \gamma$), каждое из которых равно сумме элементов, соответственно, первой, второй и третьей строк обратной матрицы.
Варианты ответов:
1) (-3, -2, -3);
2) (3, 2, -3);
**3) (1/2, 1/3, 1/2);**
4) (-1/3, -1/2, -1/3).

Задание 14. При каких значениях $\alpha$ ранг *r(A)* матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 \end{pmatrix}$ равен 1:
Варианты ответов:
1) $\alpha = 2$;
2) $\alpha \neq \pm 2$;
**3)** $\alpha = -2$**.**

Задание 15. Найдите решения системы $Ax = \theta$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, для которого $x_4 = -1$. Ответ должен состоять из четверки чисел $(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Варианты ответов:
1) (-6, 1, 1, -1);
**2) (6, -1, 0, -1);**
3) (3, 1, 0, -1).

**Критерии оценки результата**

Каждое правильно выполненное задание – 1 б.

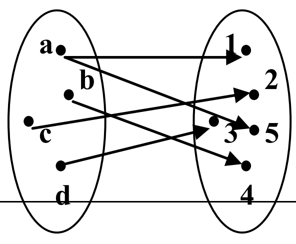
«5» – 13-15 баллов, «4» – 9-12 баллов,
«3» – 5-8 баллов, «2» – 0-4 баллов

**Приложение 5**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

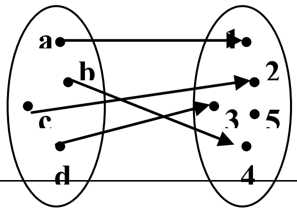
Кафедра прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

## Комплект тестовых заданий № 2 для самопроверки по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

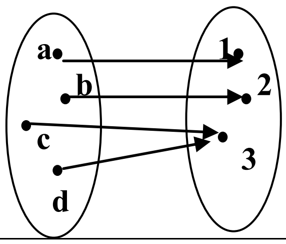
| № п/п | Вопрос | Варианты ответов |
|---|---|---|
| 1. | Всякое подмножество декартова квадрата множества А – это: | **а) бинарное отношение на А;**<br>б) отображение из А в А;<br>в) унарное отношение на А;<br>г) бинарная операция на А. |
| 2. | Если для любых элементов $a,b,c \in A$ выполняется условие: $(<a,b>\in \rho \quad и \quad <b,c>\in \rho) \Rightarrow <a,c>\in \rho$, то бинарное отношение $\rho$, заданное на А, называется: | а) симметричным;<br>б) антисимметричным;<br>в) **транзитивным**;<br>г) рефлексивным. |
| 3. | Операция "$\circ$" является алгебраической на множестве А, если: | **а) $(\forall a,b \in A)(a \circ b \in A)$;**<br>б) $(\forall a \in A)(a \circ a \in A)$;<br>в) каждый элемент из А имеет обратный;<br>г) $(\forall a,b \in A)(a \circ b \notin A)$. |
| 4. | Операция вычитания на множестве $Z$ обладает свойством: | **а) алгебраичности;**<br>б) коммутативности;<br>в) ассоциативности;<br>г) коммуникативности. |
| 5. | Чтобы множество А с заданной на нем бинарной алгебраической операцией являлось группой, необходимо, чтобы операция была: | **а) ассоциативной;**<br>б) коммутативной;<br>**в) обратимой;**<br>г) дистрибутивной относительно самой себя. |
| 6. | В каждой группе существует и притом единственный | **а) нейтральный элемент;**<br>б) обратный элемент;<br>в) ненулевой элемент;<br>**г) идемпотент**. |
| 7. | Делителем нуля называется такой элемент $a \neq 0$ множества А: | а) который можно делить на нуль;<br>б) на который можно делить нуль;<br>**в) для которого**<br>$(\exists x \neq 0, x \in A)(x \cdot a = a \cdot x = 0)$. |
| 8. | **f - это**<br><br> | .<br>а) инъекция;<br>**б) не отображение;**<br>в) биекция;<br>г) сюръекция |

| | | |
|---|---|---|
| 9. | Чтобы отображение было обратимо, необходимо и достаточно, чтобы оно было: | а) инъективно;<br>**б) биективно;**<br>в) сюръективно;<br>г) просто было отображением. |
| 10. | Отображение структур $f :< Z,+> \to < N,+>$ не может быть изоморфизмом структур, так как: | а) множества обозначены разными буквами;<br>б) натуральных чисел «меньше», чем целых;<br>**в) первая структура образует группу, а вторая – полугруппу;**<br>г) на множествах задана одинаковая операция. |
| 11. | Методом двойного включения доказывают: | а) утверждения о натуральных числах;<br>**б) равенство двух множеств;**<br>в) свойства алгебраических операций. |
| 12. | Разбиение множества натуральных чисел образуют подмножества: | **а) четных чисел и нечетных чисел;**<br>б) простых чисел и составных чисел;<br>в) чисел, кратных 3 и чисел, кратных 5. |
| 13. | Если для некоторого элемента $g$ группы $< G, \circ >$ найдутся такие натуральные числа $n, m$, что $g^n = g^m$, то можно сделать вывод: | **а) $g$ – элемент конечного порядка;**<br>б) группа $G$ конечна;<br>в) группа $G$ бесконечна;<br>г) $g$ – элемент порядка $n$. |
| 14. | Среди колец классов вычетов $Z_3, Z_6, Z_7, Z_9$ *и* $Z_{10}$ полями являются: | а) $Z_3, Z_6, Z_{10}$;<br>б) $Z_3, Z_7, Z_9$;<br>**в)** $Z_3, Z_7$;<br>г) $Z_3, Z_7, Z_{10}$. |
| 15. | $z = a + bi, \quad a, b \in R$ выражает: | а) тригонометрическую форму записи комплексного числа;<br>**б) алгебраическую форму записи комплексного числа;**<br>в) показательную форму записи комплексного числа;<br>г) представление комплексного числа упорядоченной парой действительных чисел. |
| 16. | Равенство $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$ $= r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$ выражает правило: | **а) умножения чисел в тригонометрической форме;**<br>б) сложения чисел в тригонометрической форме;<br>в) деления чисел в тригонометрической форме;<br>г) возведения в степень числа в тригонометрической форме. |
| 17. | Геометрически значения корней $n$-й степени из 1 расположены: | а) в вершинах квадрата с длиной стороны, равной 1;<br>**б) на единичной окружности с центром в точке (0, 0);**<br>в) в вершинах правильного $n$ - угольника;<br>**г) в вершинах правильного $n$ - угольника, вписанного в единичную окружность с центром в точке (0, 0).** |
| 18. | Формула Муавра позволяет: | а) находить тригонометрическую форму комплексного числа;<br>б) находить показательную форму комплексного числа;<br>**в) возводить комплексное число в тригонометрической форме в степень с натуральным показателем;**<br>г) находить модуль и аргумент комплексного числа. |

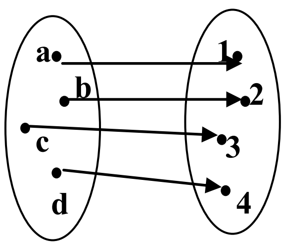
| | | |
|---|---|---|
| 19. | Для комплексного числа $z = 1 + i\sqrt{3}$ модуль и аргумент определены следующим образом: | **а)** $r = 2, \quad Argz = \frac{\pi}{3}$ **;**<br>б) $r = 2, \quad Argz = \frac{\pi}{6}$;<br>в) $r = 2, \quad Argz = \frac{2\pi}{3}$;<br>г) $r = 2, \quad Argz = -\frac{\pi}{3}$. |
| 20. | Бинарное отношение на множестве А называется отношением эквивалентности, если оно: | а) рефлексивно, асимметрично и транзитивно;<br>б) антирефлексивно, симметрично и транзитивно;<br>**в) рефлексивно, симметрично и транзитивно;**<br>г) рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. |
| 21. | Равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ выражает закон: | а) коммутативности операций $\cup$ и $\cap$;<br>б) ассоциативности операций $\cup$ и $\cap$;<br>в) дистрибутивности $\cap$ относительно $\cup$;<br>**г) дистрибутивности $\cup$ относительно $\cap$.** |
| 22. | В поле комплексных чисел мнимая единица – это: | а) виртуальное число;<br>**б) корень уравнения $z^2 = -1$;**<br>в) – 1;<br>г) корень уравнения $z^n = -1, \quad n > 2.$ |
| 23. | Множество всех корней $n$ - й степени из 1 образует: | а) аддитивную группу;<br>б) бесконечную группу;<br>**в) мультипликативную группу;**<br>**г) циклическую группу**. |
| 24. | Нулевым называется много член: | **а) с нулевыми коэффициентами;**<br>б) нулевой степени;<br>в) со старшим коэффициентом, равным 0;<br>г) со свободным членом, равным 0. |
| 25. | Два целых числа называются сравнимыми по mod m, если: | а) одно из них делится на другое нацело;<br>б) оба делятся на m нацело;<br>**в) при делении на m дают одинаковые остатки;**<br>г) при делении на m дают разные остатки. |
| 26. | Если для любых элементов $a, b \in A$ выполняется условие: $(<a,b> \in \rho \quad u \quad <b,a> \in \rho) \Rightarrow a = b$, то бинарное отношение $\rho$, заданное на А, называется: | а) симметричным;<br>б) **антисимметричным**;<br>в) транзитивным;<br>г) рефлексивным. |
| 27. | Пустым множеством называется множество, которое: | а) содержит всего один элемент;<br>б) состоит из одних нулей;<br>в) **каждый элемент является одновременно подмножеством**;<br>**г) не содержит элементов.** |
| 28. | Если выполняется условие: $(\forall a, b \in A)(a \circ b = b \circ a),$ то операция "$\circ$" на А называется: | а) ассоциативной;<br>б) коммуникативной;<br>**в) коммутативной;**<br>г) **удовлетворяющей переместительному закону**. |
| 29. | Операция $\times$ на множестве $Z$, заданная по правилу: $(\forall a, b \in Z)(a \times b = a^b)$ обладает свойством: | **а) ассоциативности;**<br>б) коммутативности;<br>**в) обратимости;**<br>г) дистрибутивности относительно самой себя. |
| 30. | Чтобы подмножество $A' \subset A$, где $< A, \cdot >$ - группа, являлось подгруппой по операции «·», необходимо и достаточно, чтобы: | а) $(\forall a, b \in A')(a \cdot b \in A')$;<br>б) $(\forall a, b \in A)(a \cdot b \in A)$;<br>**в)** $(\forall a, b \in A')(a \cdot b^{-1} \in A')$;<br>г) $(\forall a, b \in A)(a \cdot b^{-1} \in A')$. |

| | | |
|---|---|---|
| 31. | В каждой группе операция | а) коммутативна;<br>**б) сократима;**<br>**в) обратима**;<br>**г) ассоциативна**. |
| 32. | Область целостности – это: | **а) ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля;**<br>б) ассоциативно-коммутативное кольцо с делителями нуля;<br>в) ассоциативное кольцо без делителей нуля;<br>г) коммутативное кольцо с делителями нуля. |
| 33. | Правило, по которому комплексное число в тригонометрической форме возводится в степень с натуральным показателем, называется: | а) формула суммирования Эйлера;<br>б) треугольник Паскаля;<br>**в) формула Муавра;**<br>г) бином Ньютона. |
| 34. | f - это<br><br> | а) инъекция;<br>б) биекция;<br>**в) отображение;**<br>г) сюръекция. |
| 35. | Соответствие<br>$f : R \to R, \quad (\forall x \in R) f(x) = 2x + 1$<br>: | **а) является отображением**;<br>б) не является биекцией;<br>**в) обратимо;**<br>г) не сюръективно. |
| 36. | Отображение структур<br>$f :< Z,+ > \to < 2Z,+ >, \quad (\forall x \in Z)\ f(x) = 2x$<br>,<br>где $2Z$ – множество четных целых чисел является: | **а) гомоморфизмом;**<br>**б) изоморфизмом;**<br>в) автоморфизмом. |
| 37. | Универсальным называется: | **а) множество, за пределы которого не выходят при решении данного класса задач;**<br>б) любое бесконечное множество;<br>в) пустое множество;<br>г) множество действительных чисел. |
| 38. | Разбиение множества всех треугольников образуют подмножества: | а) прямоугольных треугольников и равнобедренных треугольников;<br>б) правильных треугольников и равнобедренных треугольников;<br>**в) прямоугольных треугольников, остроугольных треугольников и тупоугольных треугольников;**<br>г) всех треугольников и всех квадратов. |
| 39. | Если для некоторого элемента $g$ группы $< G, \circ >$ найдутся такие натуральные числа $n, m$, что $g^n = g^m$, то можно сделать вывод: | а) $g$ – элемент, порядок которого равен наименьшему из чисел $n \quad и \quad m$;<br>б) $g$ – элемент порядка $n$;<br>в) $g$ – элемент порядка $m$;<br>**г) $g$ – элемент конечного порядка.** |
| 40. | В кольце классов вычетов по составному модулю $(\mathrm{mod}\, m)$: | а) нет обратимых элементов;<br>б) есть единственный обратимый элемент;<br>в) **обратимы те вычеты, которые в произведении дают вычет, равный $\overline{1}$ ;**<br>г) все элементы обратимы. |

| | | |
|---|---|---|
| 41. | $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r, \varphi \in R$<br>выражает: | **а) тригонометрическую форму записи комплексного числа;**<br>б) алгебраическую форму записи комплексного числа;<br>в) показательную форму записи комплексного числа;<br>г) представление комплексного числа упорядоченной парой действительных чисел. |
| 42. | Равенство<br>$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \div \rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$<br>$= \frac{r}{\rho}\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$<br>выражает правило: | а) умножения чисел в тригонометрической форме;<br>б) сложения чисел в тригонометрической форме;<br>**в) деления чисел в тригонометрической форме;**<br>г) возведения в степень числа в тригонометрической форме. |
| 43. | В поле комплексных чисел для корня $n$-й степени из любого числа $u \neq 0$ существует: | а) одно значение;<br>б) n значений, некоторые из них совпадают;<br>в) ровно n различных значений. |
| 44. | Комплексно-сопряженные числа: | а) равные модули и аргументы;<br>**б) имеют одинаковые модули и аргументы, противоположные по знаку;**<br>в) равные модули, аргументы отличаются периодом;<br>г) равные аргументы, модули отличаются знаком. |
| 45. | Формула<br>$u_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$<br>позволяет вычислять: | **а) все значения корня $n$-й степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;**<br>б) все значения корня $n$-й степени из числа $u = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$;<br>в) все значения корня $n$-й степени из числа $u = r \cdot \left( \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$. |
| 46. | Для комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$ модуль и аргумент определены следующим образом: | а) $r = 2, \quad Argz = \frac{\pi}{3}$;<br>**б) $r = 2, \quad Argz = \frac{5\pi}{3}$;**<br>в) $r = 2, \quad Argz = \frac{2\pi}{3}$;<br>**г) $r = 2, \quad Argz = -\frac{\pi}{3}$.** |
| 47. | Бинарное отношение на множестве А называется отношением строгого порядка, если оно: | **а) антирефлексивно, асимметрично и транзитивно;**<br>б) рефлексивно, асимметрично и транзитивно;<br>в) рефлексивно, симметрично и транзитивно;<br>г) рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. |
| 48. | Равенство $A \cap B = B \cap A$ выражает закон: | а) ассоциативности операции $\cap$;<br>**б) коммутативности операции $\cap$;**<br>в) поглощения;<br>г) идемпотентности операции $\cap$. |
| 49. | В поле комплексных чисел квадратный трехчлен: | **а) всегда имеет 2 корня;**<br>б) при $D < 0$ не имеет корней;<br>в) всегда имеет два различных корня;<br>**г) при $D = 0$ имеет двукратный корень.** |
| 50. | Выражение «два комплексных числа не сравнимы между собой» означает, что: | а) нельзя сравнивать их модули;<br>б) они не сравнимы по величине;<br>в) нельзя сравнивать их аргументы;<br>г) это выражение не имеет смысла. |

| | | |
|---|---|---|
| 51. | Декартово произведение множеств А и В–это: | а) совокупность упорядоченных пар вида $< a,b >, \quad a \in A, b \in B$;<br>**б) множество упорядоченных пар вида $< a,b >, \quad a \in A, b \in B$;**<br>в) совокупность пар вида $(a,b), \quad a, b \in B$;<br>г) множество пар вида $< b,a >, \quad a \in A, b \in B$. |
| 52. | Если выполняется условие: $(\forall a,b,c \in A)((a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c))$, то операция $"\circ"$ на А называется: | а) **ассоциативной**;<br>б) коммуникативной;<br>в) коммутативной;<br>г) **удовлетворяющей сочетательному закону**. |
| 53. | Операция $\bullet$ на множестве $Z$, заданная по правилу: $(\forall a,b \in Z)(a \bullet b = \|a-b\|)$ обладает свойством: | **а) алгебраичности;**<br>**б) коммутативности**;<br>в) ассоциативности;<br>г) коммуникативности. |
| 54. | Чтобы подмножество $A' \subset A$, где $< A, \cdot, + >$ - кольцо, являлось подкольцом по операциям «·» и «+», необходимо и достаточно, чтобы: | а) $(\forall a,b \in A')(a \cdot b \in A')$;<br>б) $(\forall a,b \in A)(a \cdot b,\ a+b \in A)$;<br>в) $(\forall a,b \in A')(a \cdot b^{-1}, a+b \in A')$;<br>**г)** $(\forall a,b \in A')(a \cdot b,\ a-b \in A')$. |
| 55. | Если для любых элементов $a,b \in A$ выполнение условия $< a,b > \in \rho$, никогда не влечет за собой выполнение условия $< b,a > \in \rho$, то бинарное отношение $\rho$, заданное на А, называется: | а) симметричным;<br>б) антисимметричным;<br>в) транзитивным;<br>г) **асимметричным**. |
| 56. | В каждом кольце операция умножения | а) коммутативна;<br>б) сократима;<br>**в) алгебраическая**;<br>г) ассоциативна. |
| 57. | В каждом поле: | а) нейтральные элементы по «+» и «·» совпадают;<br>**б) есть по крайней мере, два элемента: 1 и 0;**<br>в) операция «·» двусторонне сократима. |
| 58. | Если в группе $< G, \circ >$ найдётся такой элемент $g$, всеми степенями которого исчерпываются все элементы группы, то можно сделать вывод: | а) $G$ – бесконечная группа;<br>б) $g$ – элемент бесконечного порядка;<br>**в) $G$ – циклическая группа;**<br>г) $g$ – нейтральный элемент в группе $G$. |
| 59. | f - это<br><br> | а) инъекция;<br>б) биекция;<br>в) отображение;<br>г) **сюръекция.** |
| 60. | Соответствие $f : Z \to Z \quad (\forall x \in Z) f(x) = -x$ : | а) не является отображением;<br>**б) является биекцией;**<br>**в) обратимо;**<br>г) не сюръективно. |

| | | |
|---|---|---|
| 61. | Отображение структур $f :< Z,+,\circ > \to < N,+,\circ >$, не является изоморфизмом, так как: | а) множества обозначены разными буквами;<br>б) натуральных чисел «меньше», чем целых;<br>**в) первая структура образует кольцо, а вторая – полукольцо;**<br>г) на множествах заданы одинаковые операции. |
| 62. | Если каждый элемент первого множества является элементом второго, то: | **а) первое множество есть подмножество второго;**<br>б) эти множества равны;<br>в) второе множество есть подмножество первого. |
| 63. | В кольце классов вычетов по составному модулю $(\bmod m)$: | а) нет делителей 0;<br>б) все вычеты – делители 0;<br>в) **делители 0 – вычеты, которые в произведении дают вычет, равный $\bmod m$.** |
| 64. | $z = re^{i\varphi}, \quad r, \varphi \in R$ выражает: | а) тригонометрическую форму записи комплексного числа;<br>б) алгебраическую форму записи комплексного числа;<br>**в) показательную форму записи комплексного числа;**<br>г) представление комплексного числа упорядоченной парой действительных чисел. |
| 65. | Равенство $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ выражает правило: | а) умножения чисел в тригонометрической форме;<br>б) сложения чисел в тригонометрической форме;<br>в) деления чисел в тригонометрической форме;<br>**г) возведения в степень числа в тригонометрической форме.** |
| 66. | В поле комплексных чисел для корня $n$-й степени из 1 существует: | а) одно значение;<br>б) $n$ значений, некоторые из них совпадают;<br>в) ровно $n$ различных значений. |
| 67. | Геометрически сопряженные комплексные числа расположены: | **а) симметрично относительно оси ОХ;**<br>б) симметрично относительно оси ОУ;<br>в) симметрично относительно биссектрисы I и IV координатных четвертей;<br>г) симметрично относительно биссектрисы II и III координатных четвертей. |
| 68. | Для комплексного числа $z = 1 - i$ модуль и аргумент определены следующим образом: | **а)** $r = \sqrt{2}, \quad Argz = \frac{7\pi}{4}$**;**<br>б) $r = \sqrt{2}, \quad Argz = \frac{\pi}{4}$;<br>**в)** $r = \sqrt{2}, \quad Argz = -\frac{\pi}{4}$**;**<br>г) $r = -\sqrt{2}, \quad Argz = \frac{7\pi}{4}$. |
| 69. | Бинарное отношение на множестве А называется отношением нестрогого порядка, если оно: | а) антирефлексивно, асимметрично и транзитивно;<br>б) рефлексивно, асимметрично и транзитивно;<br>в) рефлексивно, симметрично и транзитивно;<br>**г) рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.** |
| 70. | Равенство $A \cup B = B \cup A$ выражает закон: | **а) коммутативности операции $\cup$;**<br>б) ассоциативности операции $\cup$;<br>в) поглощения;<br>г) идемпотентности операции $\cup$. |
| 71. | Множество всех элементов, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В, называется | а) объединением множеств А и В;<br>**б) разностью множеств А и В;**<br>в) разностью множеств В и А;<br>г) пересечением множеств А и В. |

| | | |
|---|---|---|
| 72. | Если выполняется условие:<br>$(\exists e \in A)(\forall a \in A)(a \circ e = a),$<br>то говорят, что операция "$\circ$" на А: | а) обладает нейтральным элементом;<br>б) обладает левым нейтральным элементом;<br>**в) обладает правым нейтральным элементом;**<br>г) является обратимой. |
| 73. | Операция $\oplus$ на множестве $Z$, заданная по правилу: $(\forall a, b \in Z)(a \oplus b = \dfrac{a}{b})$<br>обладает свойством: | а) обратимости;<br>б) коммутативности;<br>в) ассоциативности;<br>**г) не является алгебраической**. |
| 74. | В каждом поле операция умножения | **а) коммутативна**;<br>**б) сократима**;<br>**в) алгебраическая**;<br>г) дистрибутивна относительно самой себя. |
| 75. | Для многочлена<br>$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k,\ a_k \in Z$<br>противоположным является многочлен вида: | **а)** $f(x) = -\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k,\ a_k \in Z$;<br>**б)** $f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-a_k) \cdot x^k,\ a_k \in Z$;<br>в) $f(x) = -\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k,\ a_k \in Q$. |
| 76. | В поле комплексных чисел $\sqrt[4]{11}$: | а) имеет единственное значение;<br>б) не имеет значений;<br>**в) имеет 4 различных комплексных значения;**<br>г) не имеет действительных значений. |
| 77. | Если для любого элемента $a \in A$ выполняется условие $(< a, a > \in \rho$, то бинарное отношение $\rho$, заданное на А, называется: | а) симметричным;<br>б) асимметричным;<br>в) транзитивным;<br>г) **рефлексивным**. |
| 78. | В каждом кольце коммутативна операция | а) умножения;<br>**б) сложения;**<br>г) вычитания;<br>г) деления. |
| 79. | Декартово произведение двух множеств в общем случае не обладает свойством: | а) ассоциативности;<br>б) дистрибутивности относительно операции $\cap$ множеств;<br>в) дистрибутивности относительно операции $\cup$ множеств;<br>**г) коммутативности.** |
| 80. | Чтобы подмножество $A' \subset A$, где $< A, \cdot, + >$ - поле, являлось подполем по операциям «·» и «+», необходимо и достаточно, чтобы: | а) $(\forall a, b \in A')(a \cdot b^{-1},\ a + b \in A')$;<br>б) $(\forall a, b \in A)(a \cdot b,\ a + b \in A)$;<br>в) $(\forall a, b \in A')(a \cdot b^{-1}, a + b \in A')$;<br>**г)** $(\forall a, b \in A')(a \cdot b,\ a - b \in A')$. |
| 81. | f - это<br><br> | а) не инъекция;<br>б) **биекция;**<br>в) не отображение;<br>г) **сюръекция.** |

| | | |
|---|---|---|
| 82. | Соответствие $f: N \to N \quad (\forall x \in N) f(x) = -x$: | **а) не является отображением;**<br>б) является биекцией;<br>в) обратимо;<br>г) сюръективно**.** |
| 83. | Отображение структур $f :< Z,+,\circ > \to < 2Z,+,\circ >$, $(\forall x \in Z)\ f(x) = 2x$, где $2Z$ – множество четных целых чисел, не является гомоморфизмом, так как: | а) множества обозначены разными буквами;<br>б) четных чисел «меньше», чем целых;<br>в) на множествах заданы одинаковые операции;<br>**г) отображение f не сохраняет операцию умножения.** |
| 84. | Равенство $A \cup (B \cap A) = A$ выражает | а) закон коммутативности;<br>**б) закон поглощения;**<br>в) закон идемпотентности;<br>г) закон двойного отрицания. |
| 85. | Если в группе $< G, \circ >$ найдётся такой элемент $g$, всеми степенями которого исчерпываются все элементы группы, то можно сделать вывод: | а) $G$ – бесконечная группа;<br>**б) элемент $g$ порождает группу $G$;**<br>**в) $G$ – циклическая группа;**<br>г) $g$ –элемент конечного порядка. |
| 86. | Кольцо классов вычетов по модулю $(\mathrm{mod}\, m)$ образует поле тогда и только тогда, когда: | **а) $m$ – простое число;**<br>б) $m$ – не простое число;<br>в) $m$ – составное число;<br>г) $m$ – четное число. |
| 87. | $z =< a,b >, \quad a,b \in R$ выражает: | а) тригонометрическую форму записи комплексного числа;<br>б) алгебраическую форму записи комплексного числа;<br>в) показательную форму записи комплексного числа;<br>**г) представление комплексного числа упорядоченной парой действительных чисел.** |
| 88. | Равенство $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ называется: | а) формулой Гаусса;<br>б) формулой Коши;<br>**в) формулой Муавра;**<br>г) формулой Эйлера. |
| 89. | Значение корня $n$-й степени из 1, натуральными степенями которого исчерпываются все значения корня $n$-й степени из 1, называется: | **а) первообразным корнем $n$-й степени из 1;**<br>б)производным корнем $n$-й степени из 1;<br>в) главным корнем $n$-й степени из 1. |
| 90. | Геометрически значения корней $n$-й степени из числа $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ расположены: | а) в вершинах квадрата с длиной стороны, равной $r$;<br>**б) в вершинах правильного $n$-угольника, вписанного в окружность радиуса $r$ с центром в точке (0, 0);**<br>в) в вершинах правильного $n$-угольника;<br>**г) на окружности радиуса $r$ с центром в точке (0, 0)..** |

| | | |
|---|---|---|
| 91. | Для комплексного числа $z=1+i$ модуль и аргумент определены следующим образом: | а) $r=\sqrt{2}, \quad Argz=\frac{7\pi}{4}$;<br>**б)** $r=\sqrt{2}, \quad Argz=\frac{\pi}{4}$**;**<br>в) $r=\sqrt{2}, \quad Argz=-\frac{\pi}{4}$;<br>г) $r=-\sqrt{2}, \quad Argz=\frac{7\pi}{4}$. |
| 92. | Бинарное отношение ρ на множестве А называется отношением линейного порядка, если: | **а) для любых элементов $a$ и $b$ из А выполняется одно и только одно из условий $a=b \quad или \quad a\rho b \quad b\rho a$;**<br>б) для любых элементов $a$ и $b$ из А выполняется хотя бы одно из условий $a=b \quad или \quad a\rho b \quad b\rho a$;<br>в) для любых элементов $a$ и $b$ из А выполняются хотя бы два из условий $a=b \quad или \quad a\rho b \quad b\rho a$. |
| 93. | Равенство $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ выражает закон: | а) коммутативности операций $\cup \quad и \quad \cap$;<br>б) ассоциативности операций $\cup \quad и \quad \cap$;<br>**в) дистрибутивности $\cap$ относительно $\cup$;**<br>г) дистрибутивности $\cup$ относительно $\cap$. |
| 94. | Изоморфизм двух алгебраических структур – это: | а) отображение одной структуры на другую, сохраняющее операции;<br>б) отображение одной структуры в другую, сохраняющее операции;<br>в) инъективный гомоморфизм;<br>**г) биективный гомоморфизм.** |
| 95. | Для комплексного числа $z=0$: | **а) модуль равен 0, аргумент не определён;**<br>б) модуль равен 0 и аргумент равен 0;<br>в) не определены ни модуль, ни аргумент;<br>**г) а) модуль равен 0, в качестве аргумента может выступать любое действительное число.** |
| 96. | На множестве из 3 элементов можно задать ровно | а) 4 различных разбиения;<br>**б) 5 различных разбиений;**<br>в) 3 различных разбиения;<br>г) $2^3$ различных разбиений. |
| 97. | Бинарное отношение ß на множестве А называется антисимметричным, если: | а) $(\forall a,b\in A)(<a,b>\in\beta \quad \Rightarrow \quad <b,a>\in\beta$;<br>**б)** $(\forall a,b\in A)(<a,b>\in\beta, <b,a>\in\beta \Rightarrow a=b)$;<br>в) $(\exists a,b\in A)(<a,b>\in\beta \quad \Rightarrow \quad <b,a>\in\beta$ |
| 98. | В кольце многочленов над полем Р элементы поля Р являются: | а) нулевыми элементами;<br>б) нулевыми многочленами;<br>**в) многочленами нулевой степени;**<br>г) единичными элементами. |
| 99. | Функция $f(x)=x$, заданная на множестве R: | **а) обратима;**<br>б) не обратима;<br>**в) инъективна;**<br>г) не сюръективна. |

| | | |
|---|---|---|
| 100. | Если группа $< G, \circ >$ конечна и $g$ – её элемент, то: | **а) порядок группы делится на порядок $g$ ;**<br>б) порядок группы не делится на порядок $g$ ;<br>**в) порядок $g$ делит порядок группы;**<br>**г) $g$ – элемент конечного порядка**. |

## Критерии оценки результата

Каждое правильно выполненное задание – 1 б.

«5» – 95-100 баллов, «4» – 85-94 баллов,
«3» – 70-83 баллов, «2» – 0-72 баллов

**Приложение 5**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

Кафедра прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

**Комплект заданий для контрольной работы № 2**
**по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

**Тема Многочлены над полем действительных и комплексных чисел**
Задание 1. Решить по формуле Кардано уравнения:
$a)\ x^3+18x+15=0;$
$b)\ x^3-3x^2-3x+11=0;$
$c)\ x^3+3x^2-6x+4=0.$

Задание 2. Решить методом Феррари уравнения:
$a)\ x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0;$
$b)\ x^4-x^3-3x^2+5x-10=0;$
$c)\ x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0.$

Задание 3.
а) Дана кривая $y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Найти прямую так, чтобы точки пересечения A, B, C, D ее с кривой отсекали три равных отрезка:
AB = BC = CD.
При каком условии эта задача имеет решение?
б) Найти площадь и радиус описанного круга треугольника, стороны которого равны корням уравнения:
$$x^3-ax^2+bx-c.$$
в) Найти соотношение между коэффициентами уравнения, корни которого равны синусам углов треугольника.

Задание 4.
а) Составить уравнение 4-й степени, корнями которого являются:
$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ \ -\alpha,\ \ -\frac{1}{\alpha}.$$

**Тема Многочлены от нескольких переменных**
Задание 1. а) Найти уравнение наименьшей степени, одним из корней которого является

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}$, где $x_1, x_2, x_3$ - корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, и коэффициенты которого выражаются рационально через коэффициенты данного уравнения.

б) Найти уравнение наименьшей степени, одним из корней которого является $\frac{x_1}{x_2}$, где $x_1, x_2, x_3$ - корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, и коэффициенты которого выражаются через коэффициенты данного уравнения.

в) Найти уравнение наименьшей степени с коэффициентами, выражающимися рационально через коэффициенты данного уравнения:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

принимая за один из корней искомого уравнения:

1) $x_1x_2+x_3x_4$;

2) $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$.

г) Найти уравнение, одним из корней которого является

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\cdot(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4\ x_4x_1),$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4$ - корни уравнения $x^5+ax+b=0$.

Задание 2. Решить систему уравнений:

а)методом последовательного исключения одной из переменных:

$$\begin{cases} y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0 \\ y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2+x^2-y-3x=0 \\ y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0 \end{cases}$$

б) с помощью результанта:

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^3=2 \\ 2x^2-xy+3y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y^3-2xy^2+y^3-2x^2-2x-y=0 \\ x^2+xy-y^2+y=0 \end{cases}$$

Задание 3. Дополнить, если нужно, следующие многочлены до симметрических, и выразить через основные симметрические многочлены:

a) $f=x_1^3x_2+\ldots$;

$b)$ $f=x_1^3x_2x_3+\ldots$;

$c)$ $f=(x_1+x_2)^2+\ldots$.

**Тема Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа**

Задание 1. Найти рациональные корни многочленов:

a) $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$

$b)$ $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$c)$ $f(x)=x^5-x^3-x^2+1$

Задание 2. Разложить многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над полями $Q, R, C$:

$a)\ f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

$b)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$c)\ f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$

**Тема Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел**

Задание 1. Исключить иррациональность в знаменателе выражения:

$a)\ \dfrac{7}{1 - \sqrt[4]{2} + \sqrt{2}};$

$b)\ \dfrac{\alpha}{\alpha + 1}, \qquad \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0.$

**Критерии оценки:**

- оценка «отлично» выставляется студенту, если выполнены все задания;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если выполнены все задания с недочётами или полностью 7-8 заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если выполнены от 7 заданий с недочётами заданий или полностью 4-5 заданий;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если выполнено менее 3 заданий.

**Комплект заданий для контрольной работы № 3**

**Вариант 1**

Задание 1. Решить сравнения:

$2x \equiv 3 \pmod{5}$;
$3x \equiv 4 \pmod{7}$;
$7x \equiv 10 \pmod{11}$;
$12x \equiv 7 \pmod{13}$;
$7x \equiv 11 \pmod{15}$;
$5x \equiv 3 \pmod{17}$;
$3x \equiv 5 \pmod{11}$;
$9x \equiv 2 \pmod{14}$;

Задание 2. Решить системы сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11}, \\ x \equiv 5 \pmod{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7}, \\ x \equiv 2 \pmod{13}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17}, \\ 3x \equiv 6 \pmod{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{11}, \\ x \equiv 3 \pmod{10}, \\ x \equiv 2 \pmod{3}; \end{cases}$$

Задание 3. С помощью символа Лежандра установить, имеют ли решения сравнения:

$x^2 \equiv 404 \pmod{523}$;
$x^2 \equiv 99 \pmod{601}$;
$x^2 \equiv 219 \pmod{383}$;
$x^2 \equiv 47 \pmod{73}$;
$x^2 \equiv 231 \pmod{101}$;

Задание 4. Заменить данные сравнения равносильными им сравнениями, степени которых ниже p, где p—модуль:

$x^8 - 3x^7 + 2x^6 + 3x^4 - 2x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
$x^{13} - x^3 + x - 3 \equiv 0 \pmod{11}$;
$x^8 - 2x^7 + 3x^6 + x^5 - 2x^2 - x - 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
$x^9 - 3x^4 + 2x^3 - x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$;
$x^{10} + 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 3 \equiv 0 \pmod{7}$;

Задание 5.

1. Найти остаток от деления числа $48^{5n+3}$ на 11, где $n$ — любое целое неотрицательное число.

**Вариант 2**

Задание 1. Решить сравнения:

$10x \equiv 15 \pmod{25}$;
$9x \equiv 12 \pmod{21}$;
$28x \equiv 40 \pmod{44}$;
$24x \equiv 14 \pmod{26}$;
$21x \equiv 33 \pmod{45}$;
$30x \equiv 18 \pmod{102}$
$21x \equiv 35 \pmod{77}$.

Задание 2. Решить системы сравнений:

$$\begin{cases} 7x \equiv 10 \pmod{11}, \\ 12x \equiv 7 \pmod{13}, \\ 7x \equiv 11 \pmod{15}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 13 \pmod{16}, \\ x \equiv 3 \pmod{10}, \\ x \equiv 9 \pmod{14}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{15}, \\ x \equiv 1 \pmod{12}, \\ x \equiv 7 \pmod{14}. \end{cases}$$

Задание 3. С помощью символа Лежандра установить, имеют ли решения сравнения:

$x^2 \equiv 33 \pmod{179}$;
$x^2 \equiv 65 \pmod{193}$;
$x^2 \equiv 26 \pmod{241}$;
$x^2 \equiv 30 \pmod{269}$;
$x^2 \equiv 42 \pmod{251}$.

Задание 4. Решить следующие сравнения:

$x^8 - x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 - x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
$x^9 - x^3 + x - 5 \equiv 0 \pmod{7}$;
$x^8 - x^4 + 2x - 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
$x^{12} + 2x^{11} - 2x - 1 \equiv 0 \pmod{11}$;
$x^{14} - 4x^{13} - x + 6 \equiv 0 \pmod{13}$.

Задание 5.

2. Найти остаток от деления числа $48^{5n+4}$ на **11**, где $n$ — любое целое неотрицательное число.

**Критерии оценки:**

- оценка «отлично» выставляется студенту, если выполнены все 5 заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если выполнены все 5 заданий с недочётами или полностью 4 задания;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если выполнены 4 задания с недочётами заданий или полностью 3 задания;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если выполнено менее 3 заданий.

**Приложение 7**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

Кафедра прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

**Комплект заданий для домашней контрольной работы**
**по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

**Тема Линейные преобразования и их свойства**

Задание 1. Для вектора $x=(x_1,x_2,x_3)$ проверить, являются ли линейными следующие преобразования:

$a)\varphi(x)=(3x_1-2x_2-1,\ 0,\ x_1+2x_2+3x_3);$
$b)\varphi(x)=(3x_1{}^2-2x_2-x_3,\ 0,\ 0);$
$c)\varphi(x)=(3x_1-2x_2-x_3,\ 0,\ x_1+2x_2+3x_3).$

Задание 2. Найти значение выражения:
$a)\,4\cdot\varphi(x)+7\cdot\vartheta(x)$, где
$\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3,\ x_2,\ x_3-x_1);\ \vartheta(x)=\vartheta(x_1,x_2,x_3)=(0,x_2,1);$
$b)\,\varphi(x)\cdot 4\cdot\vartheta(x)$, где
$\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,\ x_2,\ 1);\ \vartheta(x)=\vartheta(x_1,x_2,x_3)=\left(0,x_2+\frac{1}{4}x_3,\ x_3\right);$
$c)\varphi(x)-3\cdot\vartheta(x)$, где $\varphi(x),\ \vartheta(x)$ – линейные преобразования пространства $R^2$ с матрицами $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$ соответственно.

Задание 3.
а) Оператор $\varphi(x)$ действует по закону $\varphi(x)=(x_1+x_3,\ x_3-x_2,\ x_2+x_1)$. Найти его матрицу в каноническом базисе.
b) Найти матрицу линейного оператора $\varphi(x)$ в базисе $f_1,f_2,f_3$, где $f_1=e_1-e_2-e_3;\ f_2=-e_1+e_2+2e_3;\ f_3=e_1-2e_2+e_3$, если она задана в базисе $e_1,e_2,e_3$;
с) Найти матрицу линейного оператора $\varphi(x)$, переводящего канонический базис $e_1,e_2,e_3$ в набор векторов $a_1,a_2,a_3$ относительно стандартного базиса:
$a_1=(1,0,1);\ a_2=(4,1,4);\ a_3=(5,9,9).$

**Приложение 8**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ**
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

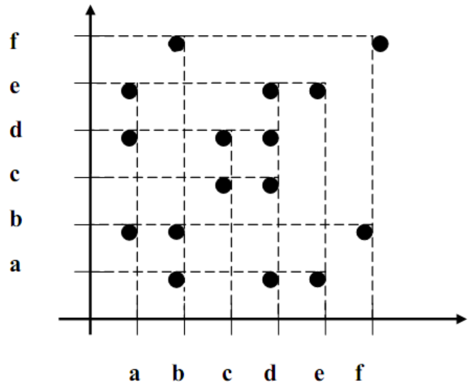
Кафедра прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

**Комплект индивидуальных заданий**
**по дисциплине АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

**Тема Алгебраические структуры**

**Задача 1.** На множестве A = {1, 2, 3, 4} задано бинарное отношение $\alpha$. Какими свойствами оно обладает:
$\alpha = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <3, 2>, <2, 3>\}$?
Построить граф и график отношения $\alpha$.

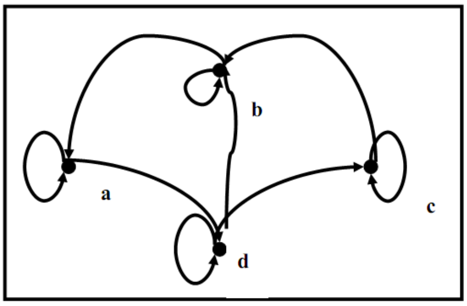
**Задача 2.** По графику отношения $\alpha$ определить множество A, на котором оно задано, и свойства этого отношения:




**Задача 3.** Построить граф бинарного отношения из задачи 2. Как нужно изменить этот граф, чтобы отношение стало рефлексивным; симметричным?

**Задача 4.**

По графу бинарного отношения определить его свойства:




**Задача 5.** Если множество A, на котором задано бинарное отношение $\alpha$, конечно, то задать это отношение можно с помощью квадратной матрицы порядка

n, где n – число элементов в множестве A. На пересечении i-й строки и j-го столбца этой матрицы стоит 1, если пара <a, b> $\in \alpha$, где a – элемент множества A с номером i, b – элемент с номером j, и 0 в противном случае.
Построить матрицу бинарного отношения $\alpha$ из задач 1 и 2.

**Задача 6.** По виду матрицы $\Delta$ определить бинарное отношение $\alpha$, заданное на множестве A = {a, b, c, d}, и свойства этого бинарного отношения:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Задача 7.** Как выглядит матрица бинарного отношения $\alpha$, если оно:
a) рефлексивно; b) симметрично; c) антисимметрично; d) асимметрично?

**Задача 8.** Считая X множеством всех ныне живущих людей на планете Земля, для следующих бинарных отношений, заданных на X, проверить выполнение следующих свойств (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, анти симметричность, асимметричность, транзитивность):
a) "человек *x* является потомком человека *y*";
b) " человек *x* является внуком человека *y* ";
c) " человек *x* состоит в браке с человеком *y* ";
d) " человек *x* является отцом (или матерью) такого же числа детей, что и человек *y*";
e) "человек *x* хотя бы раз в жизни думал о человеке *y*".

**Задача 9.** Пусть X — множество населенных пунктов на планете Земля. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения:
a) "населенный пункт *x* расположен восточнее пункта *y* ";
b) «населенный пункт *x* расположен в том же государстве, что и пункт *y* ".

**Задача 10.** Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего
a) ни свойству рефлексивности, ни свойству антирефлексивности;
b) ни свойству симметричности, ни свойству асимметричности.

**Задача 11.** Какими свойствами обладает бинарное отношение $\sigma$ на множестве A, если:
a) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow a < 2b$;
b) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow (a + b)$ делится на 2;
c) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow a = b^2$;

**Задача 12.** Какие из бинарных отношений, приведенных в задачах 8 - 11, являются отношениями эквивалентности? Что представляют собой классы эквивалентности по каждому из отношений? Построить разбиение, соответствующее каждому из отношений эквивалентности.

**Задача 13.** Какое отношение эквивалентности задает каждое из следующих разбиений множества целых чисел:
a) классов разбиения бесконечное множество и в каждом классе содержится ровно одно целое число;

b) классов разбиения бесконечное множество и в каждом классе содержатся числа a и -a;
c) классов разбиения три: $\{x \in Z \mid x > 0\}$; $\{x \in Z \mid x < 0\}$; $\{0\}$;
d) классов разбиения два: $\{x \in Z \mid x \geq 0\}$; $\{x \in Z \mid x \leq 0\}$?

**Задача 14.** Построить по данному отношению эквивалентности σ разбиение множества M = {a, b, c, d}, если:
a) σ = {<a, a>; <b, b>; <c, c>; <d, d>; <a, c>; <c, a>};
b) σ = {<a, a>; <b, b>; <c, c>; <d, d>; <a, c>; <c, a>; <b, d>; <d, b>};
c) σ = {<a, a>; <b, b>; <c, c>; <d, d>; <a, b>; <b, a>; <c, d>; <d, c>};
d) σ = {<a, a>; <b, b>; <c, c>; <d, d>; <d, c>; <c, d>; <a, d>; <d, a>}.

**Задача 15.** Построить по данному разбиению множества M = {a, b, c, d} отношение эквивалентности σ, если:
a) $M_1 = \{a\}$; $M_2 = \{b, c\}$; $M_3 = \{d\}$; b) $M_1 = \{a, d\}$; $M_2 = \{b\}$; $M_3 = \{c\}$;
c) $M_1 = \{a\}$; $M_2 = \{b\}$; $M_3 = \{c, d\}$;
d) $M_1 = \{a\}$; $M_2 = \{b\}$; $M_3 = \{d\}$; $M_4 = \{c\}$.

**Задача 16.** Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве M, если:
a) M = {a, b, c, d}; b) M = {1, 2, 3} ?

**Задача 17.** Какие из бинарных отношений, приведенных в задачах 8 - 11, являются отношениями порядка? Какими свойствами обладает каждое из отношений порядка?

**Задача 18.** Расположите следующие понятия по порядку по принципу: содержание каждого последующего понятия шире, чем содержание предыдущего:
a) бинарное отношение, рефлексивное отношение, декартов квадрат множества, отношение эквивалентности;
b) бинарное отношение, отношение строгого порядка, отношение порядка, транзитивное отношение, отношение линейного строгого порядка.

**Задача 19.** В отделе кадров некоторого предприятия составляют таблицу, в которой в первом столбце содержатся фамилии и инициалы работников, а во втором - серии и номера их паспортов. Можно ли утверждать, что такая таблица задает отображение множества работников предприятия на множество кодов, под которыми понимаются номера и серии их паспортов? Если да, то будет ли это отображение инъекцией, сюръекцией, биекцией?

**Задача 20.** Проверить, является ли бинарное отношение f отображением, и если да, то обладает ли оно свойствами инъективности, сюръективности, биективности:
a) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R \mid 2x + 3y = 12\}$;
b) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R \mid x + y = x^2\}$;
c) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R^+ \mid y = \sqrt{10^{\lg x^2}}\}$;

**Задача 21.** Доказать, что:

а) между двумя конечными множествами можно установить сюръективное отображение тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов;
б) всякое сюръективное отображение конечного множества A на конечное множество B является биективным.

**Задача 22.** Найдите области определения и области значений следующих функций:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$; b) $f(x) = \cos 2x + 3\sin 2x$; c) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$; e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = \sin(\arcsin x)$;

g) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; h) $f(x) = 2^{\log_2 x}$; i) $f(x) = (\sqrt{x})^2$;

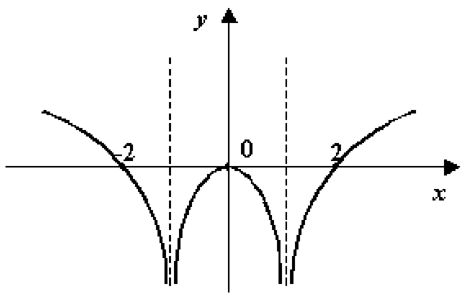
j) $f(x) = \sqrt{x^2}$; k) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; l) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Какие из этих функций из области являются биекциями?

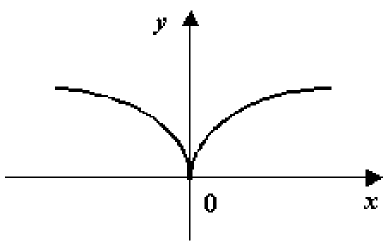
**Задача 23.** Доказать, что если существует биективное отображение множества на его собственное подмножество, то это множество бесконечно.

**Задача 24.** По виду графика определить, является ли соответствующая функция инъекцией, сюръекцией, биекцией:

a)




b)




**Задача 25.** Рассмотрим множество G монотонных строго возрастающих числовых функций на отрезке [1,−1] и введем на этом множестве операцию композиции функций:

$$(\forall f, g \in G):\quad (f * g)(x) = f(g(x)),\ x \in [-1, 1].$$

Покажите, что <G, $*$> — группа. Что является нейтральным элементом этой группы? Что представляет собой обратный элемент?

**Задача 26. (Группа переключателей).** Назовем *переключателем* электрическую схему, имеющую три входа и три выхода, соединенные попарно в некотором порядке. Таких переключателей всего шесть (рис.1).

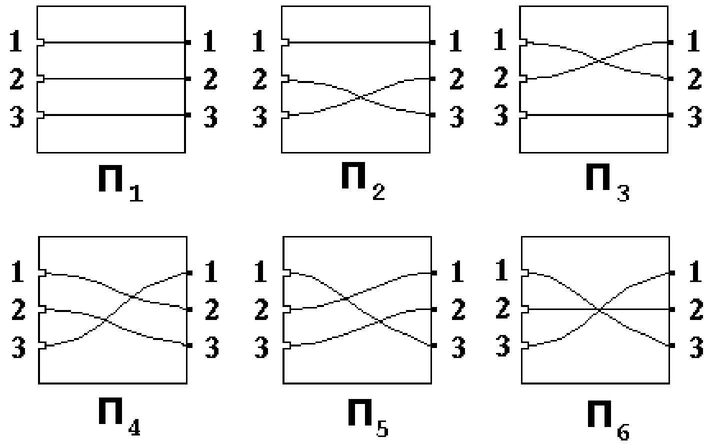



**Рис. 1. Шесть переключателей**

На множестве переключателей определим операцию «*» соединения переключателей. Например, в результате соединения переключателей $П_2$ и $П_3$ (рис. 2) вход 1 будет соединен с выходом 2, вход 2 - с выходом 3, вход 3 - с выходом 1. Точно такое же соответствие между входами и выходами осуществляет переключатель $П_5$.

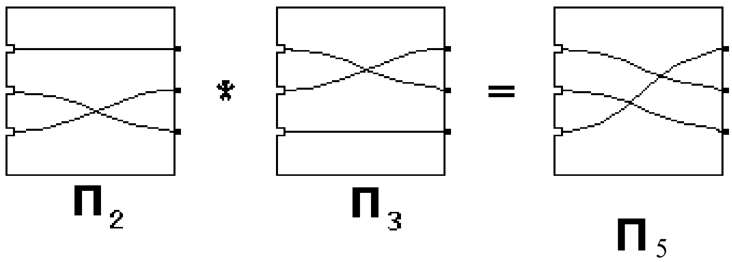



**Рис.2. Результат соединения двух переключателей**

Поэтому можно записать: $П_2 * П_3 = . П_5$.

Доказать, что множество переключателей относительно операции «*» соединения переключателей образует группу. Будет ли эта группа абелевой?

**Задача 27 (о наследовании признака).** *(Занимательная задача, связанная со свойствами бинарных алгебраических операций)*

Пусть имеется конечное множество *M* простейших существ, каждое из которых обладает одним из признаков *A, B, C*. Пусть, например, эти признаки характеризуют форму глаз: соответственно круглые, квадратные и треугольные. Известно, что в результате слияния двух существ *X* и *Y* получается одно новое существо *Z*. При этом наследование формы глаз осуществляется по закону «*» описанному таблицей на рисунке 5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ● | ■ | ▲ |
| ● | ● | ■ | ▲ |
| ■ | ■ | ▲ | ● |
| ▲ | ▲ | ● | ■ |

**Рис. 3. Таблица для операции наследования**

В результате эволюции существ остается одно существо.
Доказать, что форма глаз оставшегося существа не зависит от того, в каком порядке сливаются существа.

### Тема Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

**Задача 1.** Запишите решения системы в алгебраической форме

a) $\begin{cases} z_1 - 3z_2 = i, \\ 2z_1 + z_2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$.

**Задача 2.** Существуют ли такие действительные числа x и y, для которых числа $z_1$ и $z_2$ являются сопряжёнными:

a) $z_1=8x^2 - 20i^{15}$, $z_2=9x^2 - 4+ 10yi^3$;

b) $z_1=4x + y+(1+i)y$, $z_2=8 + ix$ ?

**Задача 3.** Сколько решений имеет система уравнений:

a) $\begin{cases} |z| = 3, \\ |z - 1 + i| = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |z| = 1, \\ |z + 3i| = 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |z| = 1, \\ |z - 1| = 1. \end{cases}$ ?

**Задача 4.** Решить следующие квадратные уравнения в комплексных числах:

a) $z^2 + z + 1 = 0$; d) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$;

b) $z^2 + 4z + 29 = 0$; e) $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$;

c) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$; f) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

**Задача 5.** Решить уравнения:

a) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$; b) $iz^2 - (1 + i)z + 4i - 7 = 0$.

c) $z^6 - z^3 - 2 = 0$; d) $z^8 + 2z^4 + 1 = 0$. e) $z^2 + |z|z + |z^2| = 0$.

**Задача 6.** Решить в комплексных числах уравнения:

a) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$; c) $z^4 + (z - 4)^4 = 32$;

b) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$; d) $\dfrac{1 - ix}{1 + ix} = i$.

**Задача 7.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

a) $|z + 1 - i| = 2$; b) $|z + 1| > |z - 2i|$; c) $\sin|z| = 0$; d) $|z + 1| > 1, -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < 0$;

e) $0 < z \cdot \bar{z} < 1,\ \dfrac{1}{2} \le \operatorname{Re} z \le 1,\ \operatorname{Im} z \le 0$.

**Задача 8.** Изобразить на комплексной плоскости множество точек $z$, удовлетворяющих условию $|z - 1 - i| = 2|z + 1 - i|$.

**Задача 9.** Какие множества на комплексной плоскости описываются следующими условиями:

a) $|z| \leq 1$;  b) $|z - i| \leq 1$;  c) $|z| = z$;  d) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$

**Задача 10.** Решить уравнения:

a) $z^4 = z^{-4}$;  b) $z^2 + |z| = 0$;  c) $z^2 + \bar{z} = 0$; d) $(z + i)^4 = (z - i)^4$;  e) $z^3 - \bar{z} = 0$.

**Задача 11.** Найти все значения $\sqrt[n]{1}$ и показать, что они образуют геометрическую прогрессию.

**Задача 12.** Вычислить:

a) $(1+i)^7$;  b) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$;  c); $(1-i)^4$;  d) $\dfrac{(3 + i\sqrt{3})^4}{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}$.

**Задача 13.** Вычислите:

a) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$; b) $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}$.

**Задача 14.** Найти комплексное число вида $z = x + i \cdot y$, где:

$$y = -1,\ |z| = \sqrt{3},\ \text{угол } \varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right].$$

**Задача 15.** Доказать, что множество U комплексных корней всех натуральных степеней из 1 с операцией умножения комплексных чисел является коммутативной группой, каждый элемент которой имеет конечный порядок.

**Задача 16.** Найти алгебраическую форму комплексного числа, записанного в показательной форме: $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

### Темы Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа

**Задача 1.** Найти значения всех элементов поля как расширение:
а) GF(2) по неприводимому многочлену $p(x) = x^3+x+1$;
б) GF(2) по неприводимому многочлену $p(x) = x^4+x+1$.

**Задача 2.** Найти циклические порождающие полей GF(4), GF(9).

**Задача 3.** Найти все неприводимые многочлены степени два над полем GF(5).

**Задача 4.** Решить в поле GF(7) уравнение $x^4 = 3$;

a) Решить в поле GF(7) уравнения $x^6 = 5$; c) $x^2 + x + 1 = 0$.

**Задача 5.** Избавиться от иррациональности в знаменателе выражений:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; c) $\dfrac{5}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

**Задача 6.** Избавиться от иррациональности в знаменателе выражений:
a) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+5}$ *при* $\alpha=\sqrt[3]{5}$. b) $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

**Задача 7.** Описать строение поля К = Q($\alpha$), где Q – поле рациональных чисел и найти элемент, обратный для элемента $\beta$:
a) $\alpha=\sqrt{2+\sqrt[3]{5}}$, $\beta=\sqrt[3]{5}-\sqrt{2+\sqrt[3]{5}}$; b) $\alpha=\sqrt{7+\sqrt[3]{3}}$, $\beta=\sqrt[3]{3}-\sqrt{7+\sqrt[3]{3}}$.

## Темы Многочлены от одной переменной. Многочлены от нескольких переменных. Теория делимости в кольце многочленов.

**Задача1.** Вычислить $f(x_0)$:
$a)\ f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16;\quad x_0=4;$
$b)\ f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1;\quad x_0=-1..$

**Задача 2.** Докажите, что не существует многочлена P(x) с целыми коэффициентами, для которого одновременно выполняются условия: P(6) = 5 и P(14) = 9.

**Задача 3.** Найдите сумму коэффициентов при четных степенях в многочлене, который получается из выражения $f(x) = (x^3-x+1)^{100}$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

**Задача 4.** В каком из выражений: $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$, $1 + x^2 - x^3)^{1000}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при $x^{20}$?

**Задача 5.** Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трёх целых точках он принимает значение два. Доказать, что ни в какой целой точке он не принимает значение три.

**Задача 6.** Докажите, что выражение $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$ не равно 33 ни при каких целых значениях $x$ и $y$.

**Задача 7.** Докажите, что многочлен $1+x^{111}+x^{222}+x^{333}+x^{444}$ делится на многочлен $1+x+x^2+x^3+x^4$.

**Задача 8.** Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $(x - 1)$?

**Задача 9.** Доказать, что если $x_0^4 + a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4 = 0$, $4x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 = 0$, то $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ делится на $(x - x_0)^2$.

**Задача 10.** Разложить многочлен $f(x)$ по степеням двучлена $(x-a)$, а также найти значение многочлена и всех его производных при $x=a$, если:

$a)\ f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1; \qquad a = 2$

$b)\ f(x) = 2x^5 + x^2 + 1; \qquad a = -3$

**Задача 11.** Пользуясь формулами Виета, построить многочлен с действительными коэффициентами степени 4 со старшим коэффициентом 1, имеющий корни:

a) 1, 2,-3,-4;
b) тройной корень -1 и простой корень i;
c) простые корни 2, -1, 1+i и 1-i;
d) двойной корень 3 и простые корни 2 + i и -4.

**Задача 12.** Найти кратность $(k)$ корня $a$ многочлена $f(x)$:

$1)\ f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \qquad a = 2;$

$2)\ f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \qquad a = -2.$

**Задача 13.** Найдите корни многочлена $f(x) = x^3 - 15x^2 + 74x - 120,$ если известно, что один из его корней является средним арифметическим двух других корней.

**Задача 14.** Многочлен $x^7+1$ разлагается на следующие неприводимые сомножители: $x+1$, $x^3+x^2+1$, $x^3+x+1$. Определить корни многочлена $x^7+1$ и распределить их по неприводимым сомножителям. В качестве делителя использовать многочлены: a) $x^3+x^2+1$; b) $x^3+x+1$.

**Задача 15.** Пользуясь алгоритмом Евклида, найти такие многочлены $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы выполнялось равенство $f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x) = D(x)$**,** где $D(x) = \text{НОД}(f(x), g(x))$**.**

1) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

2) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

**Задача 16.** Найти наибольший общий делитель многочленов:

1) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$,

2) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$,

**Задача 17.** Многочлен $x^{15}+1$ разлагается на следующие неприводимые сомножители: $x+1$, $x^2+x+1$, $x^4+x+1$, $x^4+x^3+1$, $x^4+x^3+x^2+x+1$. Определить корни многочлена $x^{15}+1$ и распределить их по неприводимым сомножителям. В качестве делителя использовать многочлены: a) $x^4+x+1$; b) $x^4+x^3+1$; c) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

**Задача 18.** Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

a) $x^4 + 4$; g) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$;
b) $2x^3 + x^2 + x - 1$; h) $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$.

**Задача 19.** Решить системы уравнений:

$$1.\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x + y = 9, \end{cases} \quad 2.\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5, \end{cases} \quad 3.\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23, \end{cases}$$

**Задача 20.** Выразить через элементарные симметрические многочлены многочлен:

1) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2,$

2) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$

**Задача 21.** Дополнить следующие многочлены до симметрических и выразить через основные симметрические многочлены:

1) $f = x_1^3x_2 + \ldots;$

2) $f = x_1^3x_2x_3 + \ldots.$

**Критерии оценки:**

Задания оцениваются баллами от 1 до 8.
Задания реконструктивного уровня оцениваются баллами от 1 до 4
Задания творческого уровня оцениваются баллами от 4 до 8:
- 4 балла выставляется студенту, если задание реконструктивного уровня выполнено с обоснованием и демонстрирует сформированность у студента умений синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей;
- 8 баллов выставляется студенту, если выполненное задание творческого уровня демонстрирует сформированность у студента умений интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.