МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Элементы дифференциального исчисления

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов.

В ходе лекционных занятий необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Разделы дисциплины	Рассматриваемые вопросы
1	Вещественные числа	Понятие множества. Множество рациональных чисел. Вещественные числа (определение иррационального числа с помощью сечений Дедекинда, представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью). Абсолютная величина числа. Границы числовых множеств. Сегмент, интервал, окрестность.
2	Функции одной переменной	Понятие функции. Способы задания функций (аналитический, табличный, графический). График функции. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Понятие обратной функции. Элементарные функции.
3	Теория пределов	Числовая последовательность и ее предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах. Арифметические действия над переменными величинами. Особые случаи пределов и неопределенности. Монотонная переменная и ее предел. Число е (неравенство Бернулли, число е как предел последовательности, приближенное вычисление числа е). Теорема о вложенных отрезках. Частичные последовательности. Предел функции. Теоремы о пределах на случай произвольной функции. Монотонная функция и ее предел. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин.
4	Непрерывность и разрывы функции	Определение непрерывности функции. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций. Разрывные функции. Непрерывность сложной функции. Свойства непрерывных функций. Существование и непрерывность обратной функции, корня и степени с рациональным показателем. Существование и непрерывность обратных

		тригонометрических функций. Определение степени с иррациональным показателем. Показательная, логарифмическая и степенная функции. Использование непрерывности функций при вычислении пределов. Гиперболические функции и их свойства. Равномерная непрерывность функции.
5	Производная и дифференциал	Понятие производной. Геометрический смысл производной. Вычисление производных простейших элементарных функций. Связь меду дифференцируемостью и непрерывностью функции. Правила вычисления производных. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высшего порядка.
6	Основные теоремы дифференциального исчисления	Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, о конечных приращениях). Раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя. Формула Тейлора.
7	Исследование функций с помощью производных	Условия постоянства, возрастания и убывания функций. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения. Исследование функций и построение графиков. Направление вогнутости кривой и точки перегиба. Асимптоты кривой. Графическое решение уравнения. Уточнение корней уравнения.
8	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Полное приращение функции нескольких переменных. Производные сложных функций нескольких переменных. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Дифференциалы высших порядков. Неявные функции и их дифференцирование. Производная по направлению. Градиент. Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

Методические материалы для обучающихся по выполнению индивидуальных заданий

Каждое индивидуальное задание студента (ИЗС) состоит из 10 заданий. Ознакомившись с методическими материалами, студенты смогут выполнить ИЗС и своевременно его сдать.

Задание 1. Определите те значения x, которые удовлетворяют неравенству $|2x-5|<1$.

Решение. Заменяем данное неравенство ему равносильным двойным неравенством: $-1<2x-5<1$, получим $2<x<3$.

Задание 2. Дана функция $f(x)=x^3+8x-4$. Найти значение $f(0),\ f(1),\ f(-2),\ f(\frac{a}{2})$.

Решение. $f(0)=0^3+8\cdot 0-4=-4$, $f(1)=1^3+8\cdot 1-4=5$, $f(-2)=(-2)^3+8\cdot(-2)-4=-28$, $f(\frac{a}{2})=\left(\frac{a}{2}\right)^3+8\cdot\left(\frac{a}{2}\right)-4=\frac{1}{8}\left(a^3+32a-32\right)$.

Задание 3. Установите области существования следующих функций:

а) $f(x)=x^3-4x+3$, б) $f(x)=\frac{2x}{x^2-5x+6}$, в) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{9-x^2}+2^x$.

Решение. а) Выражение x^3-4x+3 сохраняет смысл при любых вещественных значениях x. Следовательно, функция $f(x)=x^3-4x+3$ существует на интервале $(-\infty;+\infty)$.

б) Выражение $\frac{2x}{x^2-5x+6}$ теряет смысл только в точках, где знаменатель равен нулю, т.е. при x=2 и x=3. Следовательно, область существования функции $f(x)=\frac{2x}{x^2-5x+6}$ состоит из интервалов $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$.

в) Выражение $\sqrt{x^2-4}$ определено при $x^2-4\ge 0$, область существования состоит из двух интервалов $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$. Выражение $\sqrt{9-x^2}$ определено при $9-x^2\ge 0$, область существования: $[-3;\ 3]$. Выражение 2^x определено при любых вещественных значениях x. Таким образом, получим, что область существования исходной функции: $[-3;\ -2]\cup[2;\ 3]$.

Задание 4. Функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-1;1]$. Каковы области определения функций: $f(2x),\ f(x-1),\ f(x+1),\ f(\frac{x}{2})$?

Решение. По условию для функции $y=f(x)$ аргумент x изменяется в границах от -1 до +1, т.е. $-1\le x\le 1$. Подставив в полученное неравенство вместо x значения 2x, x-1, x+1 и x/2, получим области определения соответствующих функций.

$-1\le 2x\le 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, $-1\le x-1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 2$, $-1\le x+1\le 1\Rightarrow -2\le x\le 0$,

$-1\le\frac{x}{2}\le 1\Rightarrow -2\le x\le 2$.

Задание 5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство $\lim\frac{2n+3}{4n-1}=\frac{1}{2}$. Начиная с какого n величина $\left|\frac{2n+3}{4n-1}-\frac{1}{2}\right|$ не превосходит 0,0001?

Решение. Докажем, что число $\frac{1}{2}$ является пределом числовой последовательности $x_n=\frac{2n+3}{4n-1}$. Для этого согласно определению предела числовой последовательности достаточно показать, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что для всех значений n>N выполняется неравенство: $\left|\frac{2n+3}{4n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Возьмем любое фиксированное ε>0. Неравенство $\left|\frac{2n+3}{4n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ равносильно $\frac{7}{2(4n-1)}<\varepsilon$, откуда $n>\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}$.

За N можно взять целую часть числа $\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}$, т.е. $N=E\left(\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}\right)$. В частности ε=0,0001, то $N=E\left(\frac{7+2\cdot 0,0001}{8\cdot 0,0001}\right)=8750$.

Таким образом, величина $\left|\frac{2n+3}{4n-1}-\frac{1}{2}\right|$ не превосходит 0,0001 для всех $n\ge 8751$.

Задание 6. Найти предел числовой последовательности $x_n = \dfrac{2n^2+3n+8}{n^2-2n-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы эту неопределенность раскрыть, разделим числитель и знаменатель на высшую степень n, т.е. на n^2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+8}{n^2-2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = 2.$$

Задание 7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x)=2x-1$ имеет в точке x=2 предел, равный 3. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-2|<\delta$ следовало неравенство $|f(x)-3|<0,001$?

Решение. Возьмем произвольно малое ε>0 и покажем, что для него найдется такое δ>0, что из неравенства $|x-2|<\delta$ будет следовать неравенство $|(2x-1)-3|<\varepsilon$. Упрощая последнее неравенство, получим $2|x-2|<\varepsilon$. Откуда $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Если за δ взять число $\dfrac{\varepsilon}{2}$, то оно и будет искомым. В частности, если ε=0,001, то δ=0,0005.

Задание 8. Вычислить следующие пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{x-2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделив на *x* числитель и знаменатель дроби и применив теорему о свойствах пределов, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{4}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1-0} = 3.$$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Непосредственно теорему о пределе частного применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель *x*+2.

Получаем $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+4}{x^2-2x+4}$.

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\dfrac{0}{0}$ раскрыта.

Применяя теорему о свойствах пределов, окончательно находим:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\frac{\lim\limits_{x\to-2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to-2}(x^2-2x+4)}=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

в) $\lim\limits_{x\to4}(4-x)tg\frac{\pi x}{4}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Обозначим 4-x через z:

$$\lim_{x\to4}(4-x)tg\frac{\pi x}{4}=\lim_{z\to0}z\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{8}\right)=\lim_{z\to0}\frac{z}{tg\frac{\pi z}{8}}=\frac{8}{\pi}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. При решении воспользуемся пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

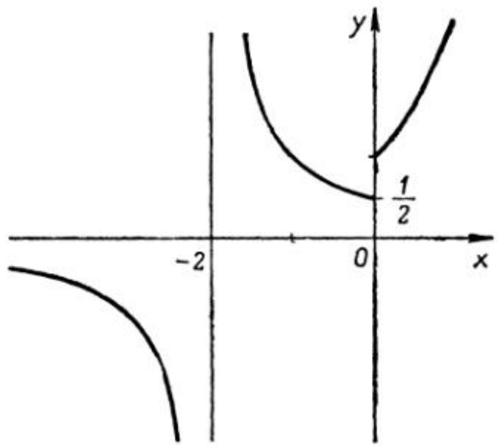
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^2=e^2.$$

Задание 9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеет следующая функция $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2} & при\ x\le0,\\ e^x\ при\ x>0\end{cases}$.

Решение. Функция $\frac{1}{x+2}$ непрерывна во всех точках, кроме x=-2. Исследуем поведение функции в этой точке.

$\lim\limits_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0}\frac{1}{x+2}=+\infty$. Следовательно, в точке x=-2 разрыв второго рода. Функция e^x не имеет точек разрыва. Остается исследовать точку стыка областей x=0.

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}e^x=1$. Значит, в точке x=0 разрыв первого рода.



Задание 10. Опираясь на свойства непрерывных функций, установить, будет ли функция $f(x)=x^4-5x^2+8x+4$ принимать значение, равное 10, в какой-либо точке отрезка $[0;\,2]$.

Решение. Найдем значение данной функции на концах отрезка $[0;\,2]$: $f(0)=4,\ f(2)=16$.

Так как функция непрерывна на $[0;\,2]$, то по второй теореме Коши по крайней мере в одной точке отрезка функция принимает значение равное 10.

Для выполнения второго индивидуального задания обучающимися необходимо изучить следующие понятия и теоремы.

Производной $y'(x_0)$ от функции $y=f(x)$ называется предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции к приращению аргумента, при условии, что последний стремиться к нулю: $\Delta x\to 0$ (если он существует). То есть: $y'(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Функцию f(x) называют **дифференцируемой** в точке x_0, когда она имеет в ней конечную производную.

Существование производной функции y=f(x) в точке x_0 эквивалентно существованию касательной к графику функции y=f(x) в точке касания $(x_0,\,f(x_0))$, причем угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0, то есть $k_к=f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции y = f(x) **в точке** $(x_0,\,f(x_0))$ имеет вид $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.

В зависимости от углового коэффициента $k_к=f'(x_0)$, касательная может быть параллельна оси абсцисс ($k_к=0$), параллельна оси ординат ($k_к=\infty$ в этом случае уравнение касательной будет иметь вид $x=x_0$).

Если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ определены при $t\in(a\,;b)$ и существует обратная функция $t=\theta(x)$ для $x=\varphi(t)$, то говорят о параметрическом задании функции $y=\psi(\theta(x))$.

При исследовании параметрически заданной функции иногда приходится находить ее производную по аргументу x: $y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Правила дифференцирования

1. $(u\pm v)'=u'+v'$;
2. $(uv)'=u'v+uv'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$;

4. $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;

5. $y_x' = \dfrac{1}{x_y'}$, если $y = f(x),\ x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e,$ в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правило Лопиталя. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) или \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, и если функции f(x) и g(x) – дифференцируемы в окрестности точки x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Примеры индивидуальных заданий.

Вопросы для самопроверки

Тема «Функции одной переменной»

1. Приведите примеры различных множеств, совпадающих множеств.
2. Дайте определение подмножества; почему пустое множество является подмножеством любого множества?
3. Какое множество называется упорядоченным?
4. Какие числовые множества называются промежутками?
5. Из отрезка [*a*; *b*] удален интервал (*a*; *b*). Что осталось?
6. Что называется абсолютной величиной числа?
7. Что больше: |2-3| или |2|+|-3| ?
8. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{|x|}{x}$?
9. Что называется областью определения функции; множеством значений функции?

10. Какую функцию называют постоянной?
11. Какие функции называются возрастающими, убывающими?
12. Сформулируйте определение чётной (нечётной) функции. В чём состоит геометрический смысл чётности и нечётности функций?
13. Какая функция называется периодической? Что называется периодом функции?
14. Какие функции называются простейшими элементарными функциями?
15. Какая функция называется сложной?
16. Напишите определение числовой последовательности.

Тема «Теория пределов»

1. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.
2. Прочитайте запись: $\lim f(x) = b$. Дайте определение предела функции в точке.
3. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
4. Приведите примеры бесконечно малых и бесконечно больших величин.
5. Какие функции называются эквивалентными бесконечно малыми?
6. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции $f(x) = \frac{1}{x+2}$.
7. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.
8. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.

Тема «Производная и дифференциал»

1. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?
2. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируете зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
8. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
9. В чем заключается механический смысл производной?
10. Что называется производной второго порядка, и каков ее механический смысл?
11. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
12. Как можно объяснить, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

Тема «Исследование функций с помощью производных»

1. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?

2. В чем заключается необходимый и достаточный признак экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функций с помощью первой производной.
3. Как отыскивают экстремумы функций с помощью второй производной?
4. В чем разница между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее набольшего и наименьшего значений?
5. Как определяется выпуклость и вогнутость функции?
6. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования?

11. Темы рефератов

1. Связь математики с другими науками.
2. Понятие вещественного числа.
3. Построение графиков функций средствами информационных технологий.
4. Вклад Л.Эйлера в развитие математического анализа.
5. Жизнь и деятельность Р. Дедекинда
6. Пьер Ферма: биография, открытия в математике.
7. Мишель Ролль: биография, научная деятельность.
8. Жизнь и деятельность И. Бернулли и Г. Лопиталя.
9. Пределы и производные: сущность, значение, вычисление.
10. Определение экстремумов функций многих переменных.
11. Применение производных при решении задач из различных областей.
12. Современные открытия в области математики.

Оценка «отлично» ставится, если полностью раскрыта тема реферата/доклада, при выступлении с докладом соблюден временной регламент, отсутствуют фактические ошибки.
Оценка «хорошо» ставится, если имеются небольшие несоответствия текста реферата/доклада заявленной теме или (и) значительно превышен временной регламент.
Оценка «удовлетворительно» ставится, если имеется много замечаний по содержанию реферата/доклада.
Оценка «неудовлетворительно» ставится, если реферат/доклад не подготовлен; доклад/реферат подготовлен, но полностью не соответствует заявленной теме.