МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин

С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.13 Алгебра и теория чисел

1. Шифр и наименование направления подготовки:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

2. Профили подготовки:

Математика. Физика.

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин

6. Составитель программы: Л.В. Лободина, кандидат педагогических наук, доцент

7. Рекомендована: научно-методическим советом Филиала (протокол № 1 от 31.08.2018 г.)

8. Семестры: 3, 4

9.Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел» является обеспечение фундаментальной математической подготовки как основы будущей профессиональной деятельности; формирование мировоззрения и развитие личности будущего педагога.

Задачи учебной дисциплины:

- дать представление о месте и роли алгебры и теории чисел в системе математических наук;
- сформировать основные понятия курса алгебры и теории чисел, необходимые в профессиональной деятельности обучающихся;
- сформировать и развитие доказательного мышления;
- сформировать навыки применения аппарата алгебры и теории чисел к решению задач в разных областях математики и других естественных наук;
- сформировать у студентов навыки работы с учебной, научной и научно-методической литературой.

При проведении учебных занятий по дисциплине обеспечивается развитие у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений.

10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной дисциплиной вариативной части образовательной программы. Для освоения дисциплины «Алгебра и теория чисел» необходимы знания, умения, навыки, сформированные в ходе изучения дисциплин «Математика», «Линейная алгебра». Изучение данной дисциплины является необходимой основой для последующего освоения дисциплин «Математический анализ», «Геометрия», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Дискретная математика», «Элементарная математика», «Элементы абстрактной и компьютерной алгебры».

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	**знает (имеет представление):** – связь теоретических основ и технологических приёмов алгебры и теории чисел (*определения и свойства бинарных отношений, отображений, алгебраических структур, основы теории многочленов, основные числовые структуры и их свойства, теорию сравнений*) с содержанием преподаваемых учебных предметов; – требования образовательных стандартов к предметным результатам освоения основной образовательной программы общего образования по математике и алгебре; **умеет:** – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения алгебры и теории чисел; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе реализации образовательных программ по образовательной области

		«Математика и информатика»; – осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов (*применять теоретико-множественный подход, основы теории сравнений, свойства кольца многочленов от одной переменной к решению задач школьного курса математики*); **имеет навыки:** – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – общепедагогической ИКТ-компетентности; – предметно-педагогической ИКТ-компетентности.
ПК-4	способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	**знает:** – технологические приемы алгебры и теории чисел (*теоретико-множественный и теоретико-групповой подходы*), лежащие в основе построения математических моделей в экономике, социологии, эконометрике и т.д.; – основные методы использования образовательной среды для достижения метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы общего образования по математике и алгебре; **умеет:** – использовать знание основ алгебры и теории чисел для перевода информации с естественного языка на язык математики и обратно; – применять знания основ алгебры и теории чисел в описании процессов и явлений в различных областях знания; – использовать преимущества теоретико-множественного подхода и алгебраического метода при решении задач школьного курса математики; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи; **владеет:** – содержательной интерпретацией и адаптацией теоретических знаний по преподаваемым предметам для решения образовательных задач; – понятиями и методами алгебры и теории чисел на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по математике, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач; – практическими навыками использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения математике и алгебре.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 8/288.

Форма промежуточной аттестации экзамен.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		
	Всего	По семестрам	
		3 сем.	4 сем.
Контактная работа, в том числе:	126	36	90
лекции	54	18	36
практические занятия	72	18	54
лабораторные работы	0	0	0
Самостоятельная работа	126	36	90
Форма промежуточной аттестации *(экзамен – 36 час.)*	36	-	36
Итого:	288	72	216

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Алгебраические структуры	Бинарные отношения и их свойства. Алгебраические операции и их основные свойства. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией. Простейшие свойства групп. Алгебраические структуры с двумя бинарными операциями. Алгебраические системы. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических систем.
1.2	Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов	Кольцо многочленов от одной переменной над областью целостности. Делимость многочлена на двучлен и корни многочлена. Теорема о возможном наибольшем числе корней многочлена. Многочлены над полем. Основные свойства делимости многочленов. Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов. Теорема о существовании и нахождении НОД многочленов. Взаимно простые многочлены и их свойства. НОК многочленов и его вычисление. Неприводимые над полем многочлены и их основные свойства. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность. Нахождение НОД и НОК многочленов при помощи разложения на неприводимые множители. Понятие производной многочлена, основные свойства производных многочленов. Вычисление значений многочлена и его производных с помощью схемы Горнера. Формула Тейлора. Неприводимые кратные множители многочленов. Основная теорема о кратности неприводимого множителя многочлена. Понятие кратности корня многочлена. Основная теорема о кратности корня многочлена. Отделение неприводимых кратных множителей многочлена.
1.3	Многочлены от нескольких переменных	Построение кольца многочленов от n переменных. Степень и лексикографическое упорядочение многочлена от n переменных. Условия равенства многочленов от нескольких переменных. Поле частных кольца многочленов. Неприводимые многочлены от нескольких переменных. Теорема о разложимости многочлена от нескольких переменных в произведение неприводимых множителей и его единственность. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема о единственности представления симметрического многочлена в виде многочлена от основных симметрических.
1.4	Многочлены над полем действительных и комплексных чисел.	Теорема о непрерывности многочлена с комплексными коэффициентами. Лемма о модуле старшего члена многочлена с комплексными коэффициентами. Теорема о существовании корня многочлена с комплексными коэффициентами (основная теорема алгебры). Разложение многочлена с комплексными

		коэффициентами в произведение линейных множителей. Связь между корнями и коэффициентами многочлена (формулы Виета). Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Представление многочлена с действительными коэффициентами в виде произведения неприводимых множителей.
1.5	Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа	Целые корни многочлена с целыми коэффициентами. Дробные рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Понятие алгебраического числа и его минимального многочлена. Основные свойства минимального многочлена алгебраического числа. Понятие простого алгебраического расширения поля и его строение. Поле алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел. Понятие разрешимости уравнений в радикалах. Разрешимость в квадратных радикалах.
1.6	Важнейшие функции в теории чисел	Функции $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ и их свойства. Мультипликативные функции. Число и сумма делителей натурального числа. Функция Мёбиуса. Функция Эйлера.
1.7	Основы теории сравнений	Основные понятия. Простейшие свойства сравнений. Полная и приведённая системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнения первой степени. Системы сравнений первой степени. Сравнения любой степени по простому и составному модулю. Сравнения второй степени. Символ Лежандра. Понятия первообразного корня и индекса
1.8	Натуральные числа	Понятие натурального ряда. Аксиоматическое построение системы натуральных чисел. О непротиворечивости аксиоматической теории натуральных чисел. Система аксиом Пеано и её свойства. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Конечные и счётные множества.
1.9	Целые числа	Аксиоматическое построение кольца целых чисел как минимального расширения полукольца натуральных чисел. Существование системы целых чисел. Кольцо целых чисел как область целостности. Упорядоченное кольцо целых чисел.
1.10	Рациональные числа	Аксиоматическое построение поля рациональных чисел как минимального расширения кольца целых чисел. Существование поля рациональных чисел. Упорядоченное поле рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями.
1.11	Действительные числа	Аксиоматическое построение поля действительных чисел как минимального расширения поля рациональных чисел. Существование поля действительных чисел. Упорядоченное поле действительных чисел. Представление действительных чисел десятичными дробями. Другие определения системы действительных чисел: с помощью понятий сечения и верхней границы; с помощью понятия фундаментальной последовательности.
1.12	Комплексные, двойные и дуальные числа	Аксиоматическое построение поля комплексных чисел как минимального расширения поля действительных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Двойные и дуальные числа.
1.13	Алгебры над полем действительных чисел	Системы кватернионов и гиперкомплексных чисел. Общий взгляд на действительные, комплексные числа и кватернионы. Предел расширения числовых систем.
		2. Практические занятия
2.1	Алгебраические структуры	Бинарные отношения и их свойства. Алгебраические операции и их основные свойства. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией. Простейшие свойства групп. Алгебраические структуры с двумя бинарными операциями. Алгебраические системы. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических систем.
2.2	Многочлены от одной	Делимость многочлена на двучлен и корни многочлена.

	переменной Теория делимости в кольце многочленов	Основные свойства делимости многочленов над полем. НОД многочленов. Взаимно простые многочлены и их свойства. НОК многочленов и его вычисление. Неприводимые над полем многочлены и их основные свойства. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность. Нахождение НОД и НОК многочленов при помощи разложения на неприводимые множители. Вычисление значений многочлена и его производных с помощью схемы Горнера. Формула Тейлора. Неприводимые кратные множители многочленов. Отделение неприводимых кратных множителей многочлена.
2.3	Многочлены от нескольких переменных	Степень и лексикографическое упорядочение многочлена от n переменных. Теорема о разложимости многочлена от нескольких переменных в произведение неприводимых множителей и единственность такого разложения. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема о единственности представления симметрического многочлена в виде многочлена от основных симметрических многочленов.
2.4	Многочлены над полем действительных и комплексных чисел.	Разложение многочлена с комплексными коэффициентами в произведение линейных множителей. Связь между корнями и коэффициентами многочлена (формулы Виета). Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Представление многочлена с действительными коэффициентами в виде произведения неприводимых множителей. Решение уравнений третьей и четвертой степени (в радикалах).
2.5	Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа	Целые корни многочлена с целыми коэффициентами. Дробные рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Понятие алгебраического числа и его минимального многочлена. Основные свойства минимального многочлена алгебраического числа. Строение простого алгебраического расширения поля. Разрешимость уравнений в радикалах. Разрешимость в квадратных радикалах.
2.6	Важнейшие функции в теории чисел	Функции $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ и их свойства. Мультипликативные функции. Число и сумма делителей натурального числа. Функция Мёбиуса. Функция Эйлера.
2.7	Основы теории сравнений	Простейшие свойства сравнений. Полная и приведённая системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнения первой степени. Системы сравнений первой степени. Сравнения любой степени по простому и составному модулю. Сравнения второй степени. Символ Лежандра. Понятия первообразного корня и индекса
2.8	Натуральные числа	Система аксиом Пеано и её свойства. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел.
2.9	Целые числа	Кольцо целых чисел как область целостности. Упорядоченное кольцо целых чисел.
2.10	Рациональные числа	Упорядоченное поле рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями.
2.11	Действительные числа	Упорядоченное поле действительных чисел. Представление действительных чисел десятичными дробями.
2.12	Комплексные, двойные и дуальные числа	Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Двойные и дуальные числа.
2.13	Алгебры над полем действительных чисел	Системы кватернионов и гиперкомплексных чисел.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
3 семестр						
1.	Алгебраические структуры	4	4	0	8	16
2.	Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов	6	6	0	12	24
3.	Многочлены от нескольких переменных	4	4	0	8	16
4.	Многочлены над полем действительных и комплексных чисел.	4	4	0	8	16
	Всего в 3 семестре:	18	18	0	36	72
4 семестр						
5.	Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа	4	6	0	10	20
6.	Важнейшие функции в теории чисел	2	4	0	6	12
7.	Основы теории сравнений	8	16	0	24	48
8.	Натуральные числа	4	4	0	8	16
9.	Целые числа	4	6	0	10	20
10.	Рациональные числа	4	4	0	8	16
11.	Действительные числа	2	4	0	6	12
12.	Комплексные, двойные и дуальные числа	6	8	0	14	28
13.	Алгебры над полем действительных чисел	2	2	0	4	8
	Экзамен					36
	Всего в 4 семестре:	36	54	0	90	216
	Итого:	54	72	0	126	288

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.
Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).
Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий, которые размещены на сайте филиала. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).
При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.
Для достижения планируемых результатов обучения используются интерактивные лекции, групповые дискуссии, анализ имитационных моделей.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Окунев Л.Я. Высшая алгебра: учеб.- СПб: Лань, 2009
2	Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учеб. пос. для вузов.- СПб: Лань, 2008

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Куликов Л.Я и др. Сборник задач по алгебре и теории чисел: - М.: Просвещение, 1993
4	Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел: учеб. пос.: ч. 1.- М.: Просвещение, 1974
5	Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел: учеб. пос.: ч. 2.- М.: Просвещение, 1978
6	Фадеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пос. для вузов.- СПб: Лань, 2007
7	Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: учеб. пос. для педин-тов: ч. 2.- Минск: Вышейш. шк., 1987
8	Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учеб. пос. дл педин-тов.- Минск: Вышейш. шк., 1982

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Источник
9	Алферова, З.В. Алгебра и теория чисел : учебно-методический комплекс / З.В. Алферова, Э.Л. Балюкевич, А.Н. Романников. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 279 с. - ISBN 978-5-374-00535-6 ; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90645 (11.01.2018).
10	Туганбаев, А.А. Линейная алгебра : учебное пособие / А.А. Туганбаев. - Москва : Флинта, 2012. - 74 с. - ISBN 978-5-9765-1407-2 ; То же [Электронный ресурс]. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115141 (11.01.2018).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Алексеева Т.И., Лободина Л.В. Руководство к решению задач по алгебре и теории чисел: - Борисоглебск: БГПИ, 2003
2	Алексеева, Т.И. Группы [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов заочной формы обучения.(специальность: 050201
3	Брик, И.М. Основные понятия и теоремы алгебры и геометрии [Электронный ресурс]: материалы для подготовки к государственному экзамену по математике и методике ее преподавания: учебное пособие/ И.М. Брик, Л.В. Лободина.
4	Сборник задач по алгебре: учеб. пос. для вузов/ под ред. А.И. Кострикина.- М.: Наука, 1987

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

Технологии создания и обработки тестовых заданий (тестовая оболочка MyTestX)
Microsoft Office Standard 2010
Microsoft Office 2007 (Word, Excel, PowerPoint)
Сетевые технологии:

- браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer.
- Научная электронная библиотека – http://www.scholar.ru/;
- Федеральный портал Российское образование – http://www.edu.ru/;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» http://window.edu.ru/;
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – http://fcior.edu.ru;
- Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – https://www.lektorium.tv/;
- Электронно-библиотечная система «Издательства Лань» – http://e.lanbook.com/;
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – http://biblioclub.ru/.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Компьютерный класс, мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1: готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Знать: – связь теоретических основ и технологических приёмов алгебры и теории чисел (*определения и свойства бинарных отношений, отображений, алгебраических структур, основы теории многочленов, основные числовые структуры и их свойства, теорию сравнений*) с содержанием преподаваемых учебных предметов; – требования образовательных стандартов к предметным результатам освоения основной образовательной программы общего образования по математике и алгебре.	Алгебраические структуры Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов Многочлены от нескольких переменных Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа Важнейшие функции в теории чисел Основы теории сравнений Натуральные числа Целые числа Рациональные числа Действительные числа Комплексные, двойные и дуальные числа Алгебры над полем	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Индивидуальные задания

		действительных чисел	
	Уметь: – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения алгебры и теории чисел; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе реализации образовательных программ по образовательной области «Математика и информатика»; – осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов (*применять теоретико-множественный подход, основы теории сравнений, свойства кольца многочленов от одной переменной к решению задач школьного курса математики*).	Алгебраические структуры Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов Важнейшие функции в теории чисел Основы теории сравнений Натуральные числа Целые числа Рациональные числа Действительные числа Комплексные, двойные и дуальные числа Алгебры над полем действительных чисел	Тест для самопроверки Разноуровневые задачи и задания
	Иметь навыки: – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – общепедагогической ИКТ-компетентности; – предметно-педагогической ИКТ-компетентности.	Алгебраические структуры Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов Натуральные числа Целые числа Рациональные числа Действительные числа Комплексные, двойные и дуальные числа	Разноуровневые задачи и задания Индивидуальные задания
ПК-4: способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	Знать: – технологические приемы алгебры и теории чисел (*теоретико-множественный и теоретико-групповой подходы*), лежащие в основе построения математических моделей в экономике, социологии, эконометрике и т.д.; – основные методы использования образовательной среды для достижения метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы общего образования по математике и алгебре.	Алгебраические структуры Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа Основы теории сравнений Натуральные числа Целые числа Рациональные числа Действительные числа Комплексные, двойные и дуальные числа	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Индивидуальные задания
	Уметь: – использовать знание основ алгебры и теории чисел для перевода информации с естественного языка на язык	Алгебраические структуры Основы теории сравнений Натуральные числа	Разноуровневые задачи и задания Индивидуальные задания

	математики и обратно; – применять знания основ алгебры и теории чисел в описании процессов и явлений в различных областях знания; – использовать преимущества теоретико-множественного подхода и алгебраического метода при решении задач школьного курса математики; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи.	Целые числа Рациональные числа Действительные числа Комплексные, двойные и дуальные числа Алгебры над полем действительных чисел	
	Владеть: – содержательной интерпретацией и адаптацией теоретических знаний по преподаваемым предметам для решения образовательных задач; – понятиями и методами алгебры и теории чисел на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по математике, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач; – практическими навыками использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения математике и алгебре.	Алгебраические структуры Многочлены от одной переменной Теория делимости в кольце многочленов Многочлены от нескольких переменных Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа Важнейшие функции в теории чисел Основы теории сравнений Натуральные числа Целые числа Рациональные числа Действительные числа Комплексные, двойные и дуальные числа Алгебры над полем действительных чисел	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Тест для самопроверки Разноуровневые задачи и задания Индивидуальные задания
Промежуточная аттестация – экзамен			Вопросы к экзамену

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):
1) знание основ и закономерностей алгебры и теории чисел;
2) умение связывать теорию с практикой;
3) навыки решения стандартных задач по алгебре и теории чисел.
Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами алгебры и теории чисел, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения типовых расчётных задач и практических заданий более высокого уровня сложности в области алгебры и теории чисел	*Повышенный уровень*	*Отлично*
Обучающийся владеет теоретическими основами алгебры и теории чисел, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, допускает незначительные ошибки при решении практических заданий более высокого уровня сложности в области алгебры и теории чисел.	*Базовый уровень*	*Хорошо*
Обучающийся владеет частично теоретическими основами алгебры и теории чисел, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, в ряде случаев затрудняется применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, не всегда способен решить практические задания более высокого уровня сложности в области алгебры и теории чисел.	*Пороговый уровень*	*Удовлетворительно*
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при решении типовых задач либо не имеет представления о способе их решения.	–	*Неудовлетворительно*

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Бинарные отношения и их свойства.
2. Кольцо многочленов от одной переменной над областью целостности.
3. Алгебраические операции на множествах и их основные свойства.
4. Делимость многочлена на двучлен (х-а). Теорема Безу и корни многочлена.
5. Алгебраические структуры с одной бинарной операцией: группоид, полугруппа, моноид, группа. Примеры. Простейшие свойства групп.
6. Теорема о возможном наибольшем числе корней многочлена.
7. Алгебраические структуры с двумя бинарными операциями: полукольцо, кольцо, поле, их простейшие свойства. Примеры.
8. Многочлены над полем. Основные свойства делимости многочленов над полем.
9. Гомоморфизм и изоморфизм групп, колец и полей.
10. Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов. Теорема о существовании и нахождении НОД многочленов. НОК многочленов и его вычисление.
11. Приводимые и неприводимые над полем многочлены и их основные свойства.
12. Разложение многочлена в произведение неприводимых множителей и его единственность. Нахождение НОД и НОК многочленов при помощи разложения на неприводимые множители.
13. Понятие производной многочлена, основные свойства производных многочленов. Вычисление значений многочлена и его производных с помощью схемы Горнера. Формула Тейлора.
14. Неприводимые кратные множители и корни многочленов. Основная теорема о кратности неприводимого множителя многочлена. Отделение неприводимых кратных множителей многочлена.
15. Теорема о существовании корня многочлена с комплексными коэффициентами (основная теорема алгебры). Следствия из неё.

16. Связь между корнями и коэффициентами многочлена (формула Виета).

17. Сопряженность комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами. Многочлены, неприводимые над полем действительных чисел.

18. Решение уравнений третьей и четвертой степени (в радикалах).

19. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий неприводимости многочлена с целыми коэффициентами.

20. Многочлены с действительными коэффициентами. Неприводимость многочленов с действительными коэффициентами.

21. Построение кольца многочленов от n переменных.

22. Степень и лексикографическое упорядочение многочлена от n переменных. Понятие приводимого многочлена от n переменных. Теорема о разложимости многочлена от n переменных в произведение неприводимых множителей и его единственность.

23. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема о единственности представления симметрического многочлена в виде многочлена от основных симметрических многочленов.

24. Простейшие свойства делимости целых чисел. НОД и НОК целых чисел и их свойства. Алгоритм Евклида. Непрерывные дроби и их связь с алгоритмом Евклида..

25. Индексы по модулям p^{α} и $2p^{\alpha}$. Индексы по модулю 2^{α}.

26. Простые числа и их роль в кольце целых чисел. Каноническая форма целого числа. Теорема о единственности разложения на простые множители.

27. Сравнения второй степени. Символ Лежандра.

28. Функции $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$ и их свойства. Мультипликативные функции. Число и сумма делителей натурального числа.

29. Аксиоматическое построение поля действительных чисел как минимального расширения поля рациональных чисел. Существование поля действительных чисел. Упорядоченное поле действительных чисел.

30. Функция Мёбиуса. Функция Эйлера.

31. Представление действительных чисел десятичными дробями. Другие определения системы действительных чисел: с помощью понятий сечения и верхней границы; с помощью понятия фундаментальной последовательности.

32. Основные понятия теории сравнений. Простейшие свойства сравнений. Полная и приведённая системы вычетов.

33. Понятие натурального ряда. Аксиоматическое построение системы натуральных чисел. О непротиворечивости аксиоматической теории натуральных чисел.

34. Теоремы Эйлера и Ферма.

35. Система аксиом Пеано и её свойства. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Конечные и счётные множества.

36. Сравнения первой степени. Системы сравнений первой степени.

37. Аксиоматическое построение кольца целых чисел как минимального расширения полукольца натуральных чисел. Существование системы целых чисел.

38. Сравнения любой степени по простому и составному модулю.

39. Аксиоматическое построение поля рациональных чисел как минимального расширения кольца целых чисел. Существование поля рациональных чисел.

40. Понятия первообразного корня и индекса. Первообразные корни по модулям p^{α} и $2p^{\alpha}$.

41. Упорядоченное поле рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями.

42. Понятия и основные свойства числовых и алгебраических систем.

43. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Двойные и дуальные числа.

44. Системы кватернионов и гиперкомплексных чисел. Общий взгляд на действительные, комплексные числа и кватернионы. Предел расширения числовых систем.

19.3.2 Перечень практических заданий (примеры)

1. Выяснить, какими свойствами обладает бинарная операция «$\circ$», заданная на множестве действительных чисел правилом:

$(\forall a,b \in R)\, a \circ b = \frac{a+b}{2}$.

2. Выяснить, будут ли гомоморфны алгебры $\langle Z,+\rangle$ и $\langle 2Z,+\rangle$, если отображение $\varphi: Z \to 2Z$ задано по следующему правилу: $(\forall x \in Z)\, \varphi(x) = 2x$.

3. Вычислить $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 - 2x + 7$

4. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Установить, линейно зависима или нет система векторов $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (1;-2;3)$, $a_3 = (1;2;-3)$ в соответствующем арифметическом пространстве над полем Q.

7. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Решить по формуле Кардано уравнение $x^3 + 18x + 15 = 0$.

9. Решить методом Феррари уравнение $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$.

10. Дополнить многочлен до симметрического, и выразить через основные симметрические многочлены $f = x_1^3 x_2 + \ldots$

11. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.

12. Разложить многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над полями Q, R, C:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$$

13. Исключить иррациональность в знаменателе выражения $\frac{\alpha}{\alpha+1}, \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.

14. Решить сравнение $2x \equiv 3 \pmod 5$.

Решить систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{11},$$
$$x \equiv 5 \pmod 7;$$

15. С помощью символа Лежандра установить, имеет ли решения сравнение

$$x^2 \equiv 404 \pmod{523};$$

19.3.3 Тестовые задания

Комплект тестовых заданий для самопроверки (пример)

Задание 1. Решите уравнения:

1.1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; 1.2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Варианты ответов:

1) $x = -2/5$;

2) $x = 6/5$;

3) $x=-3$;
4) $x=-6$ **;**
5) $x=-1/3$;
6) $x=1$.
Задание 2. Решите уравнения и неравенство:
2.1) $\begin{vmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 0 & x\\ x & 1 & 0\end{vmatrix}=0$; 2.2) $\begin{vmatrix}5 & 2 & x\\ 0 & 3 & -1\\ 7 & x & 3\end{vmatrix}=-1$; 2.3) $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 5 & -3 & x\end{vmatrix}>0$.
Варианты ответов:
1) $x\in$(-∞; -6)$\cup$(-4; +∞);
2) x **=-2;**
3) x $\in$(-6; -4);
4) $x=\pm 2$;
5) $x\in$ **(4; 6);**
6) x =2;
7) x **=0,** x **=** $\pm$ **1;**
8) x =0, x =1.
Задание 3. Вычислите определитель разложением по первой строке:
$\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$;
Варианты ответов:
1) $-4a+2b-5c$;
2) $-2a-2b-2c$;
3) $-4a-2b+7c$ **.**
Задание 4. Найдите значения *a* (если они существуют), при которых систему
$\begin{cases}2x-5y=1,\\ ax+5y=-2a-5\end{cases}$ можно решить методом Крамера.
Варианты ответов:
1) при $a\neq 2$ **;**
2) при $a\neq -2$;
3) при любом *a;*
4) ни при каких *a* систему нельзя решить методом Крамера.
Задание 5. Систему уравнений из задания 4 решите методом Крамера, используя формулы $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$. Ответ должен состоять из тройки чисел $(x, y, \Delta x+\Delta y)$.
Варианты ответов:
1) (2, 1, 15*a*+30);
2) (-2, -1, -15*a*-30);
3) (-1, -2, -15*a*-30);
4) (1, 2, 15+30*a*).

Задание 6. Найдите матрицу X, удовлетворяющую условию , $2A+X=B$ где $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$;
$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
Варианты ответов:
1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ -9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 13 & 4 \\ -3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$**.**

Задание 7. Даны матрицы $A_{n\times m}$ и $B_{k\times p}$. Какие четвёрки чисел (*n*, *m*, *k*, *p*) характеризующие размеры матриц *A* и *B*, обеспечивают существование произведения матрицы *AB?*
Варианты значений (*n*, *m*, *k*, *p*):
1) (1, 2, 3, 4);
2) (6, 3, 3, 4);
3) (2, 3, 4, 3).
Задание 8. Определите размеры матрицы $C = A\cdot B$, если *A* и *B* согласованные матрицы из задания 7.
Варианты ответов:
1) 3×4;
2) 4×6;
3) 6×4**.**
Задание 9. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите $C = A\cdot B$ и $D = B\cdot A$. Ответ должен состоять из пары чисел (c_{21}, d_{21}), являющихся элементами матриц *C* и *D* соответственно.
Варианты ответов:
1) (-4, 2);
2) (0, 1);
3) (-7, 2);
4) (1, 3).
Задание 10. Найдите значение многочлена $f(A)$
от матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Указание. Пусть дан многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ и квадратная матрица *A.* Тогда $f(A) = aA^2 + bA + cE$, где *E* – единичная матрица того же порядка, что и матрица *A*.
Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$**;**

3) $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Задание 11. Определите, при каком значении α существует матрица, обратная данной:

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:

1) $\alpha = \sqrt{5}$;
2) $\alpha \neq -1$**;**
3) при любом α;
4) $\alpha \neq 1$.
Задание 12. Пусть *A* и *B* – невырожденные матрицы. Решите матричное уравнение $AXB = C$.
Варианты ответов:
1) $A^{-1}CB^{-1}$ **;**
2) $\frac{C}{AB}$;
3) $CA^{-1}B^{-1}$;
4) $A^{-1}B^{-1}C$.
Задание 13. Найдите матрицу, обратную матрице *A* (с помощью элементарных преобразований)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Ответ должен состоять из тройки чисел (α, β, γ), каждое из которых равно сумме элементов, соответственно, первой, второй и третьей строк обратной матрицы.
Варианты ответов:
1) (-3, -2, -3);
2) (3, 2, -3);
3) (1/2, 1/3, 1/2);
4) (-1/3, -1/2, -1/3).

Задание 14. При каких значениях α ранг *r(A)* матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 \end{pmatrix}$ равен 1:

Варианты ответов:
1) $\alpha = 2$;
2) $\alpha \neq \pm 2$;
3) $\alpha = -2$**.**

Задание 15. Найдите решения системы $Ax = \theta$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, для которого $x_4 = -1$. Ответ должен состоять из четверки чисел $(x_1, x_2, x_{3,} x_4)$.
Варианты ответов:
1) (-6, 1, 1, -1);
2) (6, -1, 0, -1);
3) (3, 1, 0, -1).

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ
Комплект заданий для контрольной работы №1

Вариант 1
Тема Алгебраические структуры
Задание 1. Определить, какой алгебраической структурой является множество $A = \{2^n \mid n \in Z\}$ по операции обычного умножения.
Тема Алгебраические структуры
Задание 2. Выяснить, будут ли гомоморфны алгебры $\langle Z, + \rangle$ и $\langle 2Z, + \rangle$, если отображение $\varphi : Z \to 2Z$ задано по следующему правилу: $(\forall x \in Z)\, \varphi(x) = 2x$.

Тема Алгебраические структуры

Задание 3. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить:
а) $\frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i}$; б) все значения $\sqrt[4]{-4}$ и изобразить их геометрически.

Тема Системы линейных уравнений

Задание 5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

Тема Системы линейных уравнений

Задание 7.

Найти общее и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4. \end{cases}$$

Тема Системы линейных уравнений

Задание 8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Комплект заданий для контрольной работы № 2

Тема Многочлены над полем действительных и комплексных чисел

Задание 1. Решить по формуле Кардано уравнения:

$a)\ x^3 + 18x + 15 = 0;$

$b)\ x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0;$

$c)\ x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0.$

Задание 2. Решить методом Феррари уравнения:

$a)\ x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0;$

$b)\ x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0;$

$c)\ x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 2x + 7 = 0.$

Задание 3.

а) Дана кривая $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$ Найти прямую так, чтобы точки пересечения A, B, C, D ее с кривой отсекали три равных отрезка:

AB=BC=CD.

При каком условии эта задача имеет решение?

б) Найти площадь и радиус описанного круга треугольника, стороны которого равны корням уравнения:

$$x^3 - ax^2 + bx - c.$$

в) Найти соотношение между коэффициентами уравнения, корни которого равны синусам углов треугольника.

Задание 4.

а) Составить уравнение 4-й степени, корнями которого являются:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ \ -\alpha,\ \ -\frac{1}{\alpha}.$$

Тема Многочлены от нескольких переменных

Задание 1. а) Найти уравнение наименьшей степени, одним из корней которого является

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}$, где x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, и коэффициенты которого выражаются рационально через коэффициенты данного уравнения.

б) Найти уравнение наименьшей степени, одним из корней которого является $\frac{x_1}{x_2}$, где x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, и коэффициенты которого выражаются через коэффициенты данного уравнения.

в) Найти уравнение наименьшей степени с коэффициентами, выражающимися рационально через коэффициенты данного уравнения:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

принимая за один из корней искомого уравнения:

1) $x_1x_2+x_3x_4$;

2) $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$;

3) x_1x_2;

4) x_1+x_2;

5) $(x_1-x_2)^2$.

г) Найти уравнение, одним из корней которого является

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\cdot(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4\ x_4x_1),$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 - корни уравнения $x^5+ax+b=0$.

Задание 2. Решить систему уравнений:

а)методом последовательного исключения одной из переменных:

$\begin{cases} y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0 \\ y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2+x^2-y-3x=0 \\ y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+2-5y^3=0 \\ 2x^2+y^2-7=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2-16=0 \\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0 \end{cases}$

б)с помощью результанта:

$\begin{cases} x^2-3xy+y^3=2 \\ 2x^2-xy+3y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y^3-2xy^2+y^3-2x^2-2x-y=0 \\ x^2+xy-y^2+y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3-3xy+y^3-y^2=2 \\ 2x^2-xy+3y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3-xy-y^3+y=0 \\ x^2+x-y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2-16=0 \\ 2x^2-xy-x+y^2-y-4=0 \end{cases}$

Задание 3. Дополнить, если нужно, следующие многочлены до симметрических, и выразить через основные симметрические многочлены:

а) $f=x_1^3x_2+\ldots$;

$b)\ f=x_1^3x_2x_3+\ldots$;

$c)\ f=(x_1+x_2)^2+\ldots$;

$d)\ f=(x_1+x_2)+\ldots$.

$e) f=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

$f) f=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

$g) f=x_1^2x_2^2x_3+\ldots$.

Тема Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа

Задание 1. Найти рациональные корни многочленов:

а) $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$

$b) f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$c)\ f(x)=x^5-x^3-x^2+1$

$d)\ f(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x+6$

$e)\ f(x)=x^3-11x^2+38x-40$

$f)\ f(x)=x^4-9x^2+14$

$g)\ f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$

$i)\ f(x)=2x^3+3x^2+6x-4$

$j)\ f(x)=x^3+6x^2-8x+12$

Задание 2. Разложить многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над полями Q,R,C:

$a)\ f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$

$b)\ f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$c)\ f(x)=x^5-x^3-x^2+1$

$d)\ f(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x+6$

$e)\ f(x)=x^3-11x^2+38x-40$

$f)\ f(x)=x^4-9x^2+14$

$g)\ f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$

$h)\ f(x)=2x^3+3x^2+6x-4$

$i)\ f(x)=x^3+6x^2-8x+12$

Тема Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

Задание 1. Исключить иррациональность в знаменателе выражения:

$$a)\frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}};$$

$$b)\frac{\alpha}{\alpha+1},\qquad \alpha^3-3\alpha+1=0;$$

$$c)\frac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1},\qquad \alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0;$$

$$d)\frac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1},\qquad \alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0.$$

Комплект заданий для контрольной работы № 3

Задание 1. Решить сравнения:

$2x\equiv 3 \pmod 5$;

$3x\equiv 4 \pmod 7$;

$7x\equiv 10 \pmod{11}$;

$12x\equiv 7 \pmod{13}$;

$7x\equiv 11 \pmod{15}$;

$5x\equiv 3 \pmod{17}$;

$3x\equiv 5 \pmod{11}$;

$9x\equiv 2 \pmod{14}$;

Задание 2. Решить системы сравнений:

$$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod{11}, \\ x\equiv 5 \pmod 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\equiv 6 \pmod 7, \\ x\equiv 2 \pmod{13}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod{17}, \\ 3x\equiv 6 \pmod 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\equiv 7 \pmod{11}, \\ x\equiv 3 \pmod{10}, \\ x\equiv 2 \pmod 3; \end{cases}$$

Задание 3. С помощью символа Лежандра установить, имеют ли решения сравнения:

$x^2\equiv 404 \pmod{523}$;

$x^2\equiv 99 \pmod{601}$;

$x^2\equiv 219 \pmod{383}$;

$x^2\equiv 47 \pmod{73}$;

$x^2\equiv 231 \pmod{101}$;

Задание 4. Заменить данные сравнения равносильными им сравнениями, степени которых ниже р, где р—модуль:

$x^8-3x^7+2x^6+3x^4-2x^2-1\equiv 0 \pmod{5}$;

$x^{13}-x^3+x-3\equiv 0 \pmod{11}$;

$x^8-2x^7+3x^6+x^5-2x^2-x-3\equiv 0 \pmod{5}$;

$x^9-3x^4+2x^3-x+3\equiv 0 \pmod{7}$;

$x^{10}+3x^5-4x^3+x^2-3\equiv 0 \pmod{7}$;

Задание 5.

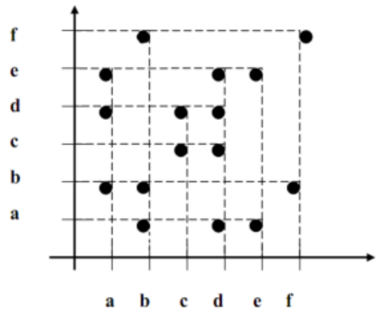
1. Найти остаток от деления числа 48^{5n+3} на 11, где n — любое целое неотрицательное число.

19.3.5 Индивидуальные задания

Тема Алгебраические структуры

Задача 1. На множестве A={1, 2, 3, 4} задано бинарное отношение α. Какими свойствами оно обладает: α = {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <3, 2>, <2, 3>}?
Построить граф и график отношения α.

Задача 2. По графику отношения α определить множество A, на котором оно задано, и свойства этого отношения:



Задача 3. По виду матрицы Δ определить бинарное отношение α, заданное на множестве A = {a, b, c, d}, и свойства этого бинарного отношения:

$$\Delta=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Задача 4. Какими свойствами обладает бинарное отношение σ на множестве A, если:
a) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow a < 2b$;
b) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow$ (a + b) делится на 2;
c) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow a = b^2$?

Задача 5. Какое отношение эквивалентности задает разбиение множества целых чисел: классов разбиения бесконечное множество и в каждом классе содержится ровно одно целое число?

Задача 6. Построить по данному отношению эквивалентности σ разбиение множества M = {a, b, c, d}, если: σ = {<a, a>; <b, b>; <c, c>; <d, d>; <a, c>; <c, a>}.

Задача 7. Построить по данному разбиению множества M = {a, b, c, d} отношение эквивалентности σ, если: M_1 = {a}; M_2 = {b, c}; M_3 = {d}.

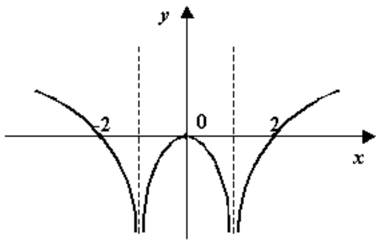
Задача 8. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве M, если:
a) M = {a, b, c, d}; b) M = {1, 2, 3} ?

Задача 9. Расположите следующие понятия по порядку по принципу: содержание каждого последующего понятия шире, чем содержание предыдущего:
бинарное отношение, рефлексивное отношение, декартов квадрат множества, отношение эквивалентности.

Задача 10. Проверить, является ли бинарное отношение f отображением, и если да, то обладает ли оно свойствами инъективности, сюръективности, биективности:
a) f = {<x, y> $\in$ R × R| 2x + 3y = 12}; б) f = {<x, y> $\in$ R × R| x + y = x^2}.

Задача 23. Доказать, что если существует биективное отображение множества на его собственное подмножество, то это множество бесконечно.

Задача 11. По виду графика определить, является ли соответствующая функция инъекцией, сюръекцией, биекцией:



Задача 12. (Группа переключателей). Назовем *переключателем* электрическую схему, имеющую три входа и три выхода, соединенные попарно в некотором порядке. Таких переключателей всего шесть (рис.1).

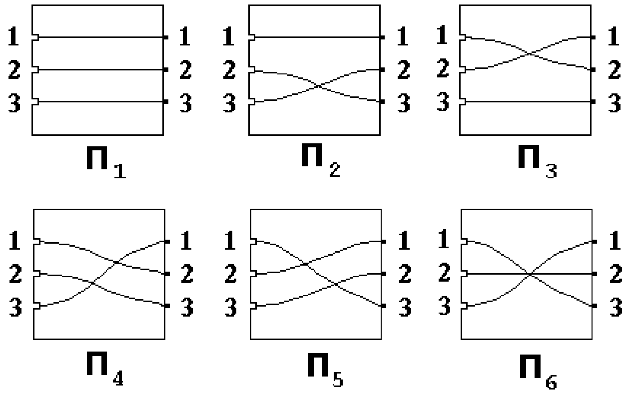


Рис. 1. Шесть переключателей

На множестве переключателей определим операцию «*» соединения переключателей.

Например, в результате соединения переключателей $П_2$ и $П_3$ (рис. 2) вход 1 будет соединен с выходом 2, вход 2 - с выходом 3, вход 3 - с выходом 1. Точно такое же соответствие между входами и выходами осуществляет переключатель $П_5$.

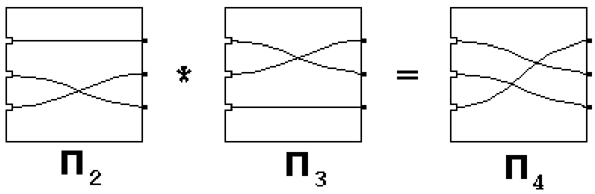


Рис.2. Результат соединения двух переключателей

Поэтому можно записать: $П_2 * П_3 = . П_5$.

Доказать, что множество переключателей относительно операции «*» соединения переключателей образует группу. Будет ли эта группа абелевой?

Задача 13. Доказать, что множество всех наборов фиксированной длины *n,* составленных из 0 и 1, образует аддитивную группу по операции суммирования по модулю два. Что представляет собой элемент, противоположный произвольному элементу a этой группы?

Задача 14. Пусть $G = S_3$ - группа подстановок степени 3. Занумеруем ее элементы: g_1=(1,2,3); g_2 =(1,3,2); g_3=(2,1,3); g_4=(2,3,1); g_5=(3,1,2); g_6=(3,2,1).

Найти все подгруппы в S_3 и выписать смежные классы по каждой из подгрупп. Будут ли найденные подгруппы являться нормальными делителями?

Задача 15. Всякий изоморфизм групп является биективным отображением одной группы на другую. Верно ли, что всякое биективное отображение одной группы на другую является их изоморфизмом?

Тема Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

Задача 1. Запишите решения системы в алгебраической форме

a) $\begin{cases} z_1 - 3z_2 = i, \\ 2z_1 + z_2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$.

Задача 2. Существуют ли такие действительные числа x и y, для которых числа z_1 и z_2 являются сопряжёнными: $z_1=8x^2 - 20i^{15}$, $z_2=9x^2 - 4+ 10yi^3$?

Задача 3. Сколько решений имеет система уравнений:

$\begin{cases} |z| = 3, \\ |z - 1 + i| = 1; \end{cases}$?

Задача 4. Решить квадратное уравнение в комплексных числах:

$z^2 + z + 1 = 0$; d) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$.

Задача 5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству:

$|z + 1| > |z - 2i|$.

Задача 6. Найти все значения $\sqrt[n]{1}$ и показать, что они образуют геометрическую прогрессию.

Задача 12. Вычислить:

$$\frac{(3 + i\sqrt{3})^4}{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}.$$

Темы Многочлены над полем действительных и комплексных чисел. Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа

Задача 1. Найти значения всех элементов поля как расширение GF(2) по неприводимому многочлену $p(x) = x^3+x+1$.

Задача 2. Найти циклические порождающие полей GF(4), GF(9).

Задача 3. Найти все неприводимые многочлены степени два над полем GF(5).

Задача 4. Решить в поле GF(7) уравнение $x^4 = 3$.

Задача 5. Избавиться от иррациональности в знаменателе выражений:

$\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$;

Задача 6. Описать строение поля $K = Q(\alpha)$, где Q – поле рациональных чисел и найти элемент, обратный для элемента β:

$\alpha = \sqrt{2 + \sqrt[3]{5}}, \quad \beta = \sqrt[3]{5} - \sqrt{2 + \sqrt[3]{5}}$;

Темы Многочлены от одной переменной. Многочлены от нескольких переменных. Теория делимости в кольце многочленов.

Задача1. Вычислить $f(x_0)$:

$a)\ f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16; \quad x_0 = 4;$

$b)\ f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1; \quad x_0 = -1;$

$c)\ f(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3; \quad x_0 = 2;$

$d)\ f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33; \quad x_0 = -2.$

Задача 2. Докажите, что не существует многочлена P(x) с целыми коэффициентами, для которого одновременно выполняются условия: P(6) = 5 и P(14) = 9.

Задача 3. Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трёх целых точках он принимает значение два. Доказать, что ни в какой целой точке он не принимает значение три.

Задача 4. Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $(x - 1)$?

Задача 5. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням двучлена $(x - a)$, а также найти значение многочлена и всех его производных при $x = a$, если:

$a)\ f(x)=x^4+2x^3-7x^2+3x-1; \quad a=2$

$b)\ f(x)=2x^5+x^2+1; \quad a=-3$

$c)\ f(x)=x^3+2ix^2-3; \quad a=1$

$d)\ f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16; a=-2$

$e)\ f(x)=4x^3-2x^2+5x-1; \quad a=-2$

Задача 6. Пользуясь формулами Виета, построить многочлен с действительными коэффициентами степени 4 со старшим коэффициентом 1, имеющий корни:
простые корни 2, -1, 1+i и 1-i.

Задача 7. Найдите корни многочлена $f(x)=x^3-15x^2+74x-120$, если известно, что один из его корней является средним арифметическим двух других корней.

Задача 8. Многочлен $x^{15}+1$ разлагается на следующие неприводимые сомножители: $x+1$, x^2+x+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$. Определить корни многочлена $x^{15}+1$ и распределить их по неприводимым сомножителям. В качестве делителя использовать многочлены: a) x^4+x+1; b) x^4+x^3+1; c) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

Задача 9. Дополнить следующие многочлены до симметрических и выразить через основные симметрические многочлены:

1) $f=x_1^3x_2+\ldots;$

2) $f=x_1^3x_2x_3+\ldots;$

3) $f=(x_1+x_2)^2+\ldots;$

4) $f=(x_1+x_2)+\ldots.$

19.3.5 Темы курсовых работ

Не предусмотрено

19.3.6 Разноуровневые задачи и задания

1 Составление глоссария и кластера основных терминов раздела (нескольких разделов) дисциплины (реконструктивный уровень)
2 Составление сравнительных, концептуальных таблиц по заданной теме (творческий уровень)
3 Составление, коррекция синквейнов и денотатных графов с основными понятиями (творческий уровень)
4 Составление аннотированного перечня источников сети Интернет (реконструктивный уровень)
5 Написание рецензий на готовые рефераты по разделам дисциплины, скачанные с различных сайтов (творческий уровень)
6 Составление таблицы толстых и тонких вопросов по разделам дисциплины (реконструктивный уровень)
7 Составление вопросов к ромашке Блума (таксономия целей) к разделам дисциплины (творческий уровень)

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах*: фронтальных опросов, защиты индивидуальных заданий, контрольных работ, выполнения рефератов, тестирования.* Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.