

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин

 С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.04 Элементарная математика**

1. Код и наименование направления подготовки:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

2. Профили подготовки:

Математика. Физика.

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин

6. Составитель программы: Е.А. Позднова, кандидат педагогических наук, доцент

7. Рекомендована: научно-методическим советом Филиала (протокол № 1 от 31.08.2018 г.)

8. Учебный год: 2019-2020, 2020-2021 **Семестр:** 6, 7

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью учебной дисциплины «Элементарная математика» является формирование знаний основ элементарной математики и умений применять математический аппарат при решении профессиональных задач.

Задачи учебной дисциплины:

- систематизация знаний по элементарной алгебре, теории функций, геометрии;
- изложение теоретических основ элементарной математики;
- формирование навыков практического применения теоретических сведений;
- развитие умения анализировать, систематизировать, обобщать при выборе рациональных способов решения задач;
- дополнение знаний новыми фактами, необходимыми для решения задач школьного курса математики;
- развивать умения анализировать, систематизировать, обобщать при выборе рациональных способов решения задач;
- изучить школьные разделы, которые недостаточно представлены в основных математических курсах.

10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Элементарная математика» входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной дисциплиной вариативной части образовательной программы. Для изучения дисциплины требуется освоение курсов «Математика» или «Элементы дифференциального исчисления» и «Введение в математический анализ» или «Элементы интегрального исчисления», «Математический анализ», «Линейная алгебра» «Математическая логика и теория алгоритмов». Дисциплина является предшествующей для курсов «Методика обучения математике», «Теория вероятностей и математическая статистика». Знания, полученные при изучении дисциплины, используются практически во всех математических и методических дисциплинах предметной подготовки, а также будут востребованы на производственной педагогической практике.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	знает (имеет представление): <ul style="list-style-type: none">– связь теоретических основ и технологических приёмов элементарной математики с содержанием преподаваемых учебных предметов;– необходимые сведения педагогического, методического характера, необходимые для создания и реализации учебных программ в соответствии с требованиями образовательных стандартов. умеет: <ul style="list-style-type: none">– осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов;– планировать и осуществлять учебный процесс в соответствии с требованиями образовательных стандартов; владеет (имеет навыки): <ul style="list-style-type: none">– владения профессиональным инструментарием, позволяющим реализовывать учебные программы в соответствии с

		требованиями образовательных стандартов;
ПК-4	способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	<p>знает:</p> <ul style="list-style-type: none"> – основные методы использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов; <p>умеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> – использовать знание основ элементарной математики для перевода информации с естественного языка на язык математики и обратно; – применять теоретические знания по элементарной математике в описании процессов и явлений в различных областях знания; – планировать и осуществлять научно-исследовательскую работу с учетом возможности использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи; <p>владеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> – конструктивными умениями как одним из главных аспектов профессиональной культуры будущего учителя-предметника; – материалом элементарной математики на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по преподаваемым предметам, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 5/180.

Форма промежуточной аттестации зачет с оценкой

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		
	Всего	По семестрам	
		6 сем.	7 сем.
Контактная работа, в том числе:	110	60	50
лекции	36	20	16
практические занятия	74	40	34
Самостоятельная работа	70	48	22
Форма промежуточной аттестации (зачет с оценкой – 0 час. 7 семестр)	0	–	0
Итого:	180	108	72

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Арифметика	Некоторые сведения из арифметики. Основная теорема арифметики. Свойства делимости. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Представление рациональных чисел в виде десятичной дроби.
1.2	Элементарные функции и их графики	Основные элементарные функции и их графики. Элементарные функции. Их свойства. Преобразование графиков функций.
1.3	Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений	Уравнения с одной переменной. Равносильность уравнений. Рациональные уравнения. Основные методы решения: метод подстановки и метод разложения на множители. Специальные виды рациональных уравнений. Дробно-рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Уравнения, содержащие переменную под знаком абсолютной величины. Неравенства. Равносильные преобразования. Рациональные неравенства. Метод интервалов. Иррациональные неравенства. Неравенства с модулем. Показательные и логарифмические неравенства Системы уравнений. Равносильность систем. Системы алгебраических уравнений. Системы показательных и логарифмических уравнений. Методы решения систем
1.4	Показательные и логарифмические уравнения	Действия со степенями. Основные виды показательных и логарифмических уравнений и методы их решения.
1.5	Тригонометрия	Основные тригонометрические формулы. Формулы приведения. Тожественные преобразования тригонометрических выражений. Простейшие тригонометрические уравнения. Различные виды тригонометрических уравнений и методы их решения. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства. Системы тригонометрических неравенств.
1.6	Элементы комбинаторики.	Основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания. Формулы для вычисления. Комбинаторные тождества.
1.7	Элементы математической логики	Элементы математической логики. Метод математической индукции.
1.8	Планиметрия	Аксиомы планиметрии. Свойства аксиом. Треугольники. Замечательные линии и точки в треугольнике. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Виды треугольников. Многоугольники: выпуклые, невыпуклые, звёздчатые, правильные. Вписанные и описанные многоугольники. Окружность. Круг, части круга, вычисление их площадей. Геометрические места точек, обладающих заданными свойствами. Построения на плоскости. Инверсия, метод симметрии, метод подобия.
1.9	Стереометрия	Аксиомы стереометрии. Свойства аксиом. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах. Многогранные углы. Многогранники: выпуклые, невыпуклые, полуправильные, звёздчатые. Тела и поверхности вращения. Цилиндр. Конус. Сфера. Шар. Призма. Параллелепипед. Пирамида. Вычисление объёмов и площадей поверхностей.
1.10	Координатный и векторный методы	Координатный метод при решении планиметрических и стереометрических задач. Применение векторной алгебры при решении планиметрических и стереометрических задач.
2. Практические занятия		
2.1	Арифметика	Основная теорема арифметики. Свойства делимости. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Представление рациональных чисел в виде десятичной дроби.
2.2	Элементарные функции и их графики	Основные элементарные функции и их свойства и графики. Преобразование графиков функций.

2.3	Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений	Основные методы решения уравнения с одной переменной: метод подстановки и метод разложения на множители. Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Уравнения, содержащие переменную под знаком абсолютной величины. Неравенства. Системы уравнений.
2.4	Показательные и логарифмические уравнения	Действия со степенями. Основные виды показательных и логарифмических уравнений и методы их решения.
2.5	Тригонометрия	Различные виды тригонометрических уравнений и методы их решения. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Системы тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства. Системы тригонометрических неравенств.
2.6	Элементы комбинаторики.	Основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания. Формулы для вычисления. Комбинаторные тождества.
2.7	Элементы математической логики	Элементы математической логики. Метод математической индукции.
2.8	Планиметрия	Решение планиметрических задач на вычисления и доказательства. Построения на плоскости. Инверсия, метод симметрии, метод подобия.
2.9	Стереометрия	Вычисление объёмов и площадей поверхностей. Построение сечений многогранников. Задачи повышенной сложности.
2.10	Координатный и векторный методы	Координатный метод при решении планиметрических и стереометрических задач. Применение векторной алгебры при решении планиметрических и стереометрических задач.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
6 семестр						
1.	Арифметика	6	8	0	8	22
2.	Элементарные функции и их графики	4	8	0	6	18
3.	Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений.	4	10	0	14	28
4.	Показательные и логарифмические уравнения	2	6	0	10	18
5.	Тригонометрия	4	8	0	10	22
	Итого в 6 семестре:	20	40	0	48	108
7 семестр						
6.	Элементы комбинаторики	2	4	0	2	8
7.	Элементы математической логики	2	6	0	4	12
8.	Планиметрия	4	10	0	6	20
9.	Стереометрия	6	8	0	6	20
10.	Координатный и векторный методы	2	6	0	4	12
11.	Зачет с оценкой					0
	Итого в 7 семестре:	16	34	0	22	72
	Итого:	36	74	0	70	180

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

–перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;

- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий, которые размещены на сайте филиала. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет с оценкой. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Для достижения планируемых результатов обучения используются интерактивные лекции, групповые дискуссии.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Задачи по элементарной математике: учеб. пос. /Т.И.Алексеева, И.М.Брик, Л.В.Гаврилова. - Борисоглебск: БГПИ, 2002
2	Гаврилова Л.В. Элементарная математика: учеб. пос.: - Борисоглебск: БГПИ, 2006

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 3-х т. Т. 1. Планиметрия, преобразование плоскости.- 2-е изд., стер.- М.: МЦНМО, 2008
4	Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 3-х т. Т. 2. Стереометрия, преобразование пространства.- 2-е изд., стер.- М.: МЦНМО, 2008
5	Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 3-х т. Т. 3. Треугольники и тетраиды.- 2-е изд., стер.- М.: МЦНМО, 2008

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
6	Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С. Элементарные функции и их графики: учеб. пособие. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-тасистем упр. и радиоэлектроники, 2011. – 52 с. http://window.edu.ru/resource/569/75569/files/funct.pdf (10.04.2018).
7	Муратова, Г.З. Математика. Вводно-предметный курс / Г.З. Муратова, А.И. Бурмистрова ; Казанский федеральный университет. - Казань : Издательство Казанского университета, 2014. - 104 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. ; То же [Электронный ресурс]. - URL:

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Методические материалы по дисциплине

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

При реализации дисциплины применяется смешанное обучение с использованием:

- электронной почты,
- сайта кафедры естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин:
<http://pmii.ru/pumk/uchebnyie-materialyi>.

программное обеспечение:

- Win10 (или Win7), OfficeProPlus 2010
- браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer
- STDU Viewer version 1.6.2.0
- 7-Zip
- GIMP GNU Image Manipulation Program
- Paint.NET
- Tux Paint
- Adobe Flash Player

информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:

- Научная электронная библиотека – <http://www.scholar.ru/>;
- Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>;
- Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – <https://www.lektorium.tv/>;
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1 готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Знать: – связь теоретических основ и технологических приёмов элементарной математики с содержанием преподаваемых учебных предметов; – необходимые сведения педагогического, методического характера, необходимые для создания и реализации учебных программ в соответствии с	1. Арифметика 2. Элементарные функции и их графики 3. Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений 4. Показательные и логарифмические уравнения 5. Тригонометрия	Контрольная работа Реферат

	требованиями образовательных стандартов.	6. Элементы комбинаторики. 7. Элементы математической логики 8. Планиметрия 9. Стереометрия 10. Координатный и векторный методы	
	Уметь: – осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов; – планировать и осуществлять учебный процесс в соответствии с требованиями образовательных стандартов;	1. Арифметика 3. Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений 4. Показательные и логарифмические уравнения 5. Тригонометрия 6. Элементы комбинаторики. 7. Элементы математической логики 8. Планиметрия 9. Стереометрия 10. Координатный и векторный методы	Комплекты индивидуальных заданий
	Иметь навыки: – владения профессиональным инструментарием, позволяющим реализовывать учебные программы в соответствии с требованиями образовательных стандартов;	1. Арифметика 2. Элементарные функции и их графики 3. Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений 4. Показательные и логарифмические уравнения 5. Тригонометрия 6. Элементы комбинаторики. 7. Элементы математической логики 8. Планиметрия 9. Стереометрия	Комплекты индивидуальных заданий
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	Знать: – основные методы использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов;	1. Арифметика 2. Элементарные функции и их графики 3. Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений 4. Показательные и логарифмические уравнения 5. Тригонометрия 6. Элементы комбинаторики. 7. Элементы математической логики 8. Планиметрия 9. Стереометрия 10. Координатный и векторный методы	Контрольная работа
	Уметь: – использовать знание основ элементарной математики для	1. Арифметика 2. Элементарные функции и их графики	Комплекты индивидуальных заданий

	<p>перевода информации с естественного языка на язык математики и обратно;</p> <ul style="list-style-type: none"> – применять теоретические знания по элементарной математике в описании процессов и явлений в различных областях знания; – планировать и осуществлять научно-исследовательскую работу с учетом возможности использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи; 	<p>3. Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений</p> <p>4. Показательные и логарифмические уравнения</p> <p>5. Тригонометрия</p> <p>6. Элементы комбинаторики.</p> <p>7. Элементы математической логики</p> <p>8. Планиметрия</p> <p>9. Стереометрия</p>	Реферат
	<p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> – конструктивными умениями как одним из главных аспектов профессиональной культуры будущего учителя-предметника; – материалом элементарной математики на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по преподаваемым предметам, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач. 	<p>1. Арифметика</p> <p>2. Элементарные функции и их графики</p> <p>3. Алгебраические уравнения и неравенства. Системы уравнений</p> <p>4. Показательные и логарифмические уравнения</p> <p>5. Тригонометрия</p> <p>6. Элементы комбинаторики.</p> <p>7. Элементы математической логики</p> <p>8. Планиметрия</p> <p>9. Стереометрия</p>	Комплекты индивидуальных заданий
Промежуточная аттестация – зачет с оценкой			Вопросы к зачету с оценкой

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом элементарной математики;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
- 4) умение применять теоретические знания для решения практических задач в области элементарной математики, решать типовые расчётные задачи.

Для оценивания результатов обучения на зачете с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
---------------------------------	--------------------------------------	--------------

Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом элементарной математики, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения типовых расчётных задач и практических заданий более высокого уровня сложности в области элементарной математики.	Повышенный уровень	Отлично
Обучающийся владеет понятийным аппаратом элементарной математики, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, допускает незначительные ошибки при решении практических заданий более высокого уровня сложности в области элементарной математики.	Базовый уровень	Хорошо
Обучающийся владеет частично теоретическими основами элементарной математики, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, в ряде случаев затрудняется применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, не всегда способен решить практические задания более высокого уровня сложности в области элементарной математики	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при решении типовых расчётных задач либо не имеет представления о способе их решения.	–	Неудовлетворительно

19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к зачету с оценкой:

1. Делимость чисел и её свойства. Признаки делимости.
2. Основная теорема арифметики.
3. НОД и НОК чисел. Алгоритм Евклида.
4. Алгоритм Евклида. Представление рациональных чисел в виде дроби.
5. Элементарные функции и их графики.
6. Тождественные преобразования выражений.
7. Квадратные уравнения. Теоремы Виета.
8. Рациональные и иррациональные уравнения.
9. Показательные и логарифмические уравнения.
10. Методы решения уравнений высших степеней
11. Основные свойства числовых неравенств. Некоторые важные неравенства.
12. Неравенства. Обобщённый метод интервалов.
13. Иррациональные неравенства, неравенства с модулем. Показательные и логарифмические неравенства.
14. Системы уравнений.
15. Основные формулы тригонометрии.
16. Тригонометрические уравнения (основные формулы и частные случаи). Системы тригонометрических уравнений.
17. Виды тригонометрических уравнений и методы их решения.
18. Тригонометрические неравенства
19. Рациональные уравнения неравенства с параметром.
20. Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.
21. Метод математической индукции.
22. Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Решение комбинаторных задач
23. Треугольник Паскаля.
24. Бином Ньютона (вывод формулы, свойства разложения бинома).
25. Аксиомы планиметрии. Свойства аксиом.
26. Треугольники и их виды. Замечательные линии и точки в треугольнике. Свойство биссектрисы треугольника

27. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Теорема Пифагора. Теоремы синусов и косинусов.
28. Формулы площади треугольника.
29. Признаки равенства и подобия треугольников
30. Многоугольник. Выпуклый многоугольник. Свойство диагоналей выпуклого четырехугольника.
31. Четырехугольники. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Трапеция.
32. Вписанные и описанные четырехугольники.
33. Площадь прямоугольника, параллелограмма и трапеции. Окружность. Характеристическое свойство окружности. Углы, связанные с окружностью: вписанный, угол между хордой и секущей, угол между касательной и хордой.
34. Свойства хорд окружности. Теорема о касательной и секущей.
35. Окружности, вписанные и описанные около треугольника.
36. Круг, части круга, вычисление их площадей. Геометрические места точек, обладающих заданными свойствами.
37. Правильные многоугольники. Вписанные и описанные окружности в правильные многоугольники. Длина окружности. Площадь правильного многоугольника.
38. Координаты точек и векторов. Длина вектора. Расстояние между двумя точками. Скалярное произведение векторов.
39. Построения на плоскости. Инверсия, метод симметрии, метод подобия.
40. Угол между прямыми в пространстве.
41. Применение векторной алгебры при решении стереометрических задач школьного курса геометрии.
42. Перпендикулярные прямые и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
43. Расстояние от точки до плоскости, расстояния между прямыми и плоскостями.
44. Угол между плоскостями. Двугранный угол, биссектор, трехгранный угол.
45. О вычислении объемов многогранников и их частей.
46. Задачи на комбинации многогранников.
47. Фигуры вращения.
48. Комбинации фигур вращения с правильными многогранниками)
49. Элементы теории вероятности в школьном курсе классов с углубленным изучением математики. Предложения, зависящие от переменной.

19.3.2 Перечень практических заданий (примеры)

Тема 1 Решение задач в натуральных числах

План занятия

1. Задачи на признаки и свойства делимости
2. Задачи на простые и составные числа

Задачи на признаки и свойства делимости

Задание 1. Приведите пример пятизначного числа кратного 12, произведение цифр которого равно 40. В ответе укажите ровно одно такое число.

Задание 2. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Задание 3. Найдите все трёхзначные натуральные числа, большие 800, которые делятся на каждую свою цифру и все цифры которых различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Задание 4. Фома и Ерема нашли на дороге по пачке 11-рублевков. Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерема выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Ерема.

Задание 5. Десятичное число на 1 больше квадрата натурального числа. доказать, что в нём есть одинаковые цифры.

Задачи на простые и составные числа

Задание 1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

Задание 2. Сколькими нулями заканчивается число $100!$?

Задание 3. Является ли простым число $43^{111} + 8^{37}$?

Задание 4. При каких натуральных n число $n^2 - 1$ является простым?

Задание 5. Установить, является ли число $n^4 + 64$ ($n \in \mathbb{Z}$) простым или составным.

Задание 6. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1?

Найдите все возможные значения этого произведения.

Тема 2. Методы решения задач с целочисленными переменными

План занятия

1. Десятичная запись натурального числа
2. Метод анализа остатков
3. Метод анализа последних цифр числа

Десятичная запись натурального числа

1. Шестизначное число, оканчивается цифрой 7. Если эту цифру перенести в начало числа, то оно увеличится в 5 раз. Что это за число?

2. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке равно 2430. Найти эти числа.

3. Трёхзначное число при делении на 10 даёт в остатке 3. Если последнюю цифру числа перенести в начало его записи, то полученное число будет на 72 больше первоначального. Найдите исходное число.

4. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы число 454^{**} делилось на 2, 7 и 9?

5. Найдите такую цифру x , чтобы: а) $\overline{573x2}:6$; б) $\overline{890x52}:72$; в) $\overline{367x5}:75$.

6. Было задано целое число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученное число утроить. Вместо этого приписали к цифровой записи данного числа справа цифру 2 и получили правильный результат. Найдите исходное число.

Метод анализа остатков

1. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

2. Найдите наименьшее трёхзначное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 5 даёт остаток 3 и которое записано тремя различными нечётными цифрами.

3. Найдите наименьшее трёхзначное натуральное число, которое при делении на 6 и на 11 даёт равные ненулевые остатки и у которого средняя цифра является средним арифметическим двух крайних цифр.

4. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

5. Найдите такие цифры x и y , чтобы: а) $\overline{2x39y}:88$; б) $\overline{2x3y}:45$; в) $\overline{7x37y}$ давало от деления на 4 остаток 3, а от деления на 11 остаток 7.

Метод анализа последних цифр числа

1. Найти последнюю цифру числа 2013^{2013} .

2. На какую цифру оканчивается число:

а) 9^{999} ;

б) 3^{999} ;

в) 7^{1000} ;

г) $33^{77} + 77^{33}$?

3. Найти две последние цифры числа 237 401 .
4. Сколькими нулями оканчивается число 110!?
5. Найти две последние цифры числа 243 802 .
6. Найти последнюю цифру числа:
 - а) 2^{92012} ;
 - б) 3^{2010} ;
 - в) $5^{239} + 9^{57} - 7^{366}$.

Тема 3. Решение задач на НОК и НОД. Сравнение по модулю

План занятия

1. Задачи на НОД и НОК
2. Задачи на свойства сравнений по модулю

Задачи на НОД и НОК

1. Решить в натуральных числах системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x + y = 150, \\ \text{НОД}(x, y) = 30; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \text{НОД}(x, y) = 45, \\ \frac{x}{y} = \frac{11}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 8400, \\ \text{НОД}(x, y) = 20; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{9}, \\ \text{НОД}(x, y) = 28; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} xy = 20, \\ \text{НОК}(x, y) = 10. \end{cases}$$

2. Пусть $a, m, n \in \mathbb{N}, a > 1$. Доказать, что:

$$\text{НОД}\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{НОД}(m, a - 1).$$

3. Доказать, что если $\text{НОД}(a, a + 5) = \text{НОД}(b, b + 5)$, $a, b \in \mathbb{N}$, то $a = b$.

4. Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$. Возможно ли, чтобы $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + c, b + c)$?

5. Существуют ли такие числа $a, b \in \mathbb{N}$, чтобы дроби $\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b}, \frac{a+1}{b+1}$ все были несократимы?

6. Найдите все пары взаимно простых чисел a и b , для которых выполнено равенство:

$$\frac{a + b}{a^2 + ab + b^2} = \frac{3}{13}.$$

7. Пусть $a, k \in \mathbb{N}$, причём a – чётное число. Докажите, что:

$$\text{НОД}(a + 1, a^{2k} + 1) = 1.$$

Задачи на свойства сравнений по модулю

1. Доказать, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
2. Найти остаток от деления числа $10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$ на 7.
3. Можно ли число 2006 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?
4. Найти все натуральные числа $n > 1$, для которых $n^3 - 3$ делится на $n - 1$.
5. Доказать, что для любого натурального n число $n^3 + 2n$ делится на 3.
6. Доказать, что числа 16, 1156, 111556, 11115556, ..., являются полными квадратами.
7. Показать, что натуральное число, записанное в десятичной системе счисления, сравнимо по mod 9 и по mod 3 с суммой своих цифр.
8. Найти остаток от деления на число 37 числа $A = 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$.

Тема 4. Методы решения линейных диофантовых уравнений с двумя переменными (линейных уравнений в целых числах)

План занятия

1. Линейные однородные уравнения

2. Общие линейные уравнения

1. Решить однородное линейное уравнение $80x + 126y = 0$.
2. Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?
3. Фирма продавала чай в центре города по 7 руб., а кофе по 10 руб. за стакан; на вокзале — по 4 руб. и 9 руб. соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?
4. Решить в целых числах уравнение $5x + 19y = 111$. Найти одно частное решение этого уравнения.
5. Решить в целых числах уравнение $89x - 137y = 1520$.
6. Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе 100 рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп. Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы?
7. Решить в целых числах уравнение $142x + 82y = 6$.
8. Транспортной компании, имеющей грузовые машины грузоподъемностью 3,5 и 4,5 т, предложено перевезти 53 т груза. Сколько машин того и другого типа должен выделить диспетчер компании для перевозки указанного груза одним рейсом при условии полного использования грузоподъемности всех выделенных машин?

Тема 5. Методы решения задач с рациональными и действительными числами

План занятия

1. Перевод рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно.
2. Сравнение рациональных чисел.
3. Доказательство рациональности или иррациональности числа.
4. Сравнение действительных чисел.

1. Перевести периодическую дробь $3,1(20)$ в обыкновенную.

2. Что больше: $\frac{222221}{333332}$ или $\frac{444443}{666665}$?

3. Сравнить числа $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ и 1.

4. Доказать иррациональность числа $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$.

5. Доказать, что $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ не является рациональным.

19.3.3 Тестовые задания

Не предусмотрены

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа № 1

1. Разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления

Задание: Сравнить числа 3^{400} и 4^{300} .

2. Метод анализа делимости нацело. Использование признаков делимости

Задание: Найти все натуральные n , при которых число $2^n - 1$ делится нацело на 7.

3. Метод анализа остатков

Задание: Найти остаток от деления целого числа n на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 4, а остаток от деления на 18 равен 7.

4. Задачи на простые и составные числа

Задание: Доказать, что если p и $8p^2 + 1$ - простые числа, то $8p^2 - 1$ - тоже простое число.

5. *Задачи на НОД и НОК*

Задание: Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n , если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

Перевод рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно.

Задание: Какие из следующих чисел можно записать в виде конечных десятичных дробей:

$$\frac{7}{352}, \frac{12}{56}, \frac{21}{75}, \frac{12}{96}$$

6. *Сравнение рациональных чисел.*

Задание: Сравнить два числа: $4, (9)^{5, (0)}$ и $5, (0)^{4, (9)}$.

7. *Доказательство рациональности или иррациональности числа.*

Задание: Доказать, что число $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ является иррациональным.

8. *Сравнение действительных чисел.*

Задание: Какое из чисел больше: $2 \cdot \sqrt{17}$ или $8, (24)$?

Контрольная работа № 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = |x|(x - 1)$

2) $y = (x + 2)(|x|)$

и осью абсцисс.

2. Найдите общие точки графика функции 1) $y = x^3 - 5x^2$ и прямой $y + 7x - 3 = 0$.

Есть ли среди них точки касания? 2) $y = x^3 - 3x^2 - 5$ и $y = 9x$.

3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$

2) $-\sqrt{1 + \cos 2x} + 3\sqrt{\cos(x - \pi)} = \sqrt{2}$

4. Решить систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} \log_2(11 - 2y^2) = \log_2(2x^2 - 5xy + 11) \\ 3\log_x y + \log_{2y} x = 5 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \log_3(3 - 6xy + 8x^2) = \log_3(3 - y^2) \\ \log_x y - \log_y 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Контрольная работа № 3 (планиметрия)

1. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника имеет место соотношение $0,4 < \frac{h}{r} < 0,5$, где h - высота, опущенная на гипотенузу, r - радиус вписанной окружности.

2. Доказать, что, если диагонали двух четырёхугольников соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырёхугольники равновелики.

3. Пусть в треугольнике ABC $a < b < c$ и длины сторон a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $ac = 6Rr$.

Контрольная работа № 4 (стереометрия)

1. Вычислить объём правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R .

2. В кубе, ребро которого равно a , центр верхней грани соединён с вершинами основания. Найти полную поверхность образовавшейся пирамиды.

3. Высота конуса и его образующая соответственно равны 4 см и 5 см. Найти объём вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.5 Темы курсовых работ (примеры)

1. Основная теорема арифметики
2. Алгебраические уравнения и неравенства с параметрами
3. Алгебраические уравнения высших степеней
4. Системы линейных алгебраических уравнений
5. Метод математической индукции
6. Числа Фибоначчи
7. Числовые последовательности
8. Методы решения задач на построение
9. Методы решения диофантовых уравнений
10. Бином Ньютона
11. Алгебраические уравнения и неравенства, содержащие знак абсолютной величины
12. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами
13. Компьютерное моделирование в электронных таблицах как метод решения сюжетных задач
14. Головоломка Эрне Рубика

Критерии оценки за курсовую работу

Курсовая работа оценивается **«отлично»**, если

1. Работа выполнена в срок, оформление, структура и стиль работы образцовые.
2. Работа выполнена самостоятельно, присутствуют собственные обобщения, заключения и выводы.
3. Использовано оптимальное количество литературы и источников по теме работы, их изучение проведено на высоком уровне. Автор работы владеет методикой исследования.
4. Тема работы четко сформулирована, тема раскрыта полностью, дано обоснование ее актуальности

Курсовая работа оценивается **«хорошо»**, если:

1. Работа выполнена в срок, в оформлении, структуре и стиле работы нет грубых ошибок.
2. Работа выполнена самостоятельно, присутствуют собственные обобщения, заключения и выводы.
3. Используются основная литература и источники по теме работы, однако работа имеет недостатки в проведенном исследовании, прежде всего в изучении источников.
4. Тема работы в целом раскрыта.

Курсовая работа оценивается **«удовлетворительно»**, если:

1. Работа выполнена с нарушениями графика, в оформлении, структуре и стиле работы есть недостатки.
2. Работа выполнена самостоятельно, присутствуют собственные обобщения, заключения и выводы.
3. При этом литература и источники по теме работы использованы в недостаточном объеме, их анализ слабый или вовсе отсутствует.
4. Тема работы раскрыта не полностью

Курсовая работа **не может быть оценена положительно**, если:

1. Какая-либо ее часть, не говоря уже о всем тексте работы, является плагиатом, скомпилирована из фрагментов работ других авторов и носит несамостоятельный характер. Проще говоря, если студент выдает чужую работу за свою. Использование текстов, взятых на специальных сайтах сети Интернет, в качестве якобы «своей» работы также является плагиатом.
2. Содержание курсовой работы не соответствует ее теме.

3. При написании работы не были использованы источники и литература.
4. Оформление работы совершенно не соответствует требованиям.

19.3.6 Темы рефератов и докладов

1. Элементарные функции и их графики
2. Алгебраические уравнения и методы их решения.
3. Системы алгебраических уравнений и методы их решения
4. Иррациональные неравенства
5. Арифметическая и геометрическая прогрессии
6. Алгебраические уравнения и системы уравнений
7. Алгебраические неравенства
8. Логарифмические и показательные уравнения
9. Логарифмические и показательные неравенства
10. Комбинаторика и бином Ньютона
11. Задачи на составление уравнений
12. Планиметрия. Задачи на вычисление
13. Планиметрия. Задачи на построение
14. Планиметрия. Задачи на доказательство
15. Стереометрия Задачи на вычисление
16. Стереометрия Задачи на доказательство
17. Геометрические места точек
18. Наибольшие и наименьшие значения.
19. Преобразование выражений, содержащих тригонометрические функции
20. Тригонометрические уравнения и системы уравнений. Виды и методы решения.
21. Обратные тригонометрические функции
22. Тригонометрические неравенства. Типы неравенств. Способы решений.

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется за самостоятельно написанный реферат по теме; умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы;

- **оценка «хорошо»** ставится, если: реферат удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков: в изложении: допущены небольшие пробелы, не искажившие содержание реферата; допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя. В реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация;

- **оценка «удовлетворительно»** ставится, если: неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя; студент не может применить теорию в новой ситуации;

- **оценка «неудовлетворительно»** ставится, если: не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя; нарушена логика в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов; недостаточно сформированы навыки письменной речи; реферат является плагиатом других рефератов более чем на 80%.

19.3.7 Комплект индивидуальных заданий (примеры)

Тема. Натуральные и целые числа.

1. Разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления

а) Найти сумму цифр в десятичной записи числа

$$N = 10^{1999} - 1999.$$

б) Найти сумму цифр в десятичной записи числа

$$N = 10^{2006} - 2006.$$

в) Найти все числа, кратные числу 72 и имеющие десятичную запись вида $\overline{74X23Y}$, где X, Y - цифры.

г) Найти все пятизначные числа, делящиеся на 45, запись которых в десятичной системе имеет вид $\overline{53X1Y}$.

д) Доказать, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + 3 + \dots + n$ не может оканчиваться цифрой 7.

е) Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b , то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.

ж) Ученик должен перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в 3 раза больше истинного. Найдите все три числа.

2. Метод анализа делимости нацело. Использование признаков делимости

а) Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^3 - n$ делится нацело на 6.

б) Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 - 7n$ делится нацело на 6.

в) Доказать, что при любом натуральном n выражение $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится нацело на 6.

г) Доказать, что число $10^{1999} - 1999$ делится нацело на 9.

д) Доказать, что если a, b, c - целые числа, и $a + b + c$ делится нацело на 6, то и $a^3 + b^3 + c^3$ делится нацело на 6.

3. Метод анализа остатков

а) Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

б) Каждое из целых чисел n, m, k не делится на 3. Доказать, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на 3.

в) Найти остаток от деления целого числа n на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 4, а остаток от деления на 18 равен 7.

г) Учительница принесла в класс счетные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счетных палочек?

д) Найти наименьшее натуральное число x такое, что остаток от деления x на 8 равно на 5 больше остатка от деления x на 5 и в два раза больше остатка от деления x на 7.

4. Задачи на простые и составные числа

а) Является ли простым число $43^{211} + 8^{37}$?

б) Найти все p , при которых $p, p + 10, p + 14$ - простые числа.

в) Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ являются натуральными числами. Может ли число $a^2 + b^2$ быть простым?

г) Является ли простым число $50^{20} - 49^{11}$?

д) Является ли число $100007 \cdot 100013 \cdot 10001 + 55$ простым? Ответ обосновать.

5. Задачи на НОД и НОК

а) Найти наибольший общий делитель чисел $n = 720, m = 756, k = 468$.

б) Интервалы движения городских автобусов по трем маршрутам, проходящим через общую остановку, составляют 15, 20 и 24 минуты соответственно. Сколько раз с 7-55 до 17-05 того же дня на этой остановке одновременно встречаются автобусы всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 12-35?

в) Натуральные числа a, b, c таковы, что $НОК(a, b) = 60$ и $НОК(a, c) = 270$. Найти $НОК(b, c)$.

г) Натуральные числа n и m таковы, что $НОД(n, m) + НОК(n, m) = n + m$. Доказать, что одно из них является делителем другого.

д) Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

е) Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Решение уравнений в натуральных и целых числах. Примеры

1. Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1} - n! = 5(30k + 11)$

3. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n .

4. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

5. Парикмахер получал за стрижку женщины по 2 рубля, за стрижку мужчины — по 50 копеек, а ребенка — по 25 копеек. За 12 рублей он подстриг 12 человек. Сколько женщин, мужчин и детей он подстриг?

6. Каждый из двух стрелков сделал по 30 выстрелов. Всего было 44 попадания, а остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в 2 раза больше попаданий, чем у второго?

7. Определенное количество одинаковых шаров можно уложить в виде квадрата или в виде равностороннего треугольника. Найдите число этих шаров, если известно, что, если расположить их треугольником, то сторона этого треугольника будет содержать на 2 шара больше, чем сторона квадрата, составленного из этих же шаров. Причем, шары располагаются не только по контуру квадрата или треугольника, но и заполняют их внутреннюю часть

8. Решите уравнение в целых числах $2x - x + 5y = 13$

9. Решите в целых числах $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$.

10. Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакете будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях?

Тема Рациональные числа

Перевод рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно.

а) Представить число $0,(25)$ в виде обыкновенной дроби.

б) Представить число $0,2(13)$ в виде обыкновенной дроби.

в) Упростить рациональное число $\frac{0,449291997}{2,1394857}$

г) Записать дроби $\frac{1234}{40}, \frac{6969}{45}, \frac{37}{7}$ в виде десятичных.

д) Записать числа $7,11; 0,45; 13,745$ в виде несократимых обыкновенных дробей.

2. Сравнение рациональных чисел.

- а) Сравнить числа $\frac{7}{33}$ и $\frac{21212121}{99999999}$.
- б) Что больше: $0,7(621)$ или $141/185$?
- в) Сравнить числа $\frac{7}{33}$ и $\frac{141}{999}$.
- г) Сравнить числа $0,2(1) : 4 + 0, (2)$ и $0,275$.
- д) Что больше: $0,7(621)$ или $\frac{25}{33}$.

3. Доказательство рациональности или иррациональности числа.

- а) Является ли число $\sqrt{7}$ рациональным?
- б) Является ли число $\sqrt{5}$ рациональным?
- в) Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным.
- г) Доказать, что $\sqrt[4]{5}$ не является рациональным.
- д) Доказать, что $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ не является рациональным.

4. Сравнение действительных чисел.

- а) Сравнить числа $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$.
- б) Что меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$.
- в) Сравнить числа $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$.
- г) Сравнить числа $(\sqrt{5} + \sqrt{10})^2$ и $14 + \sqrt{200}$.
- д) Сравнить два числа: $\sqrt{2001} + \sqrt{2003}$ и $2 \cdot \sqrt{2002}$.

5. Разные задачи

А) Среди обыкновенных дробей с положительным знаменателем, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

Пример индивидуального задания по темам «Элементы комбинаторики», «Элементы математической логики»

Вариант №1

1. Имеется ткань трех цветов: красная, зеленая и черная, и требуется обить диван, кресло и стул. Сколько существует различных вариантов обивки этой мебели?

2. Поэт-модернист написал стихотворение, в котором первая строка «Хочу пойти гулять куда-нибудь», а все остальные строки разные и получены из первой перестановкой слов. Какое наибольшее количество строк может быть в этом стихотворении?

3. Доказать тождество:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \dots + (n+1)(3n-1) = \frac{n(2n^2 + 5n + 1)}{2}$$

Вариант №2

1. Сколько существует трехзначных чисел, сумма цифр которых превосходит 15?

2. На собрании должны выступить пять человек: Арбузов, Борщов, Виноградов, Глебов и Дмитриев. Сколькими способами можно расположить их в списке выступающих?

3. Доказать тождество:

$$5 + 9 \cdot 5 + 13 \cdot 5^2 + \dots + (4n+1)5^{n-1} = n5^n$$

Пример индивидуального задания по теме «Элементы комбинаторики»

Вариант №1

1. Двухзначное число составляют из цифр 0, 1, 4, 7, 8.

а) Сколько всего чисел можно составить?

б) Составить таблицу исходов.

- в) Сколько можно составить четных чисел?
- г) Сколько можно составить нечетных чисел?
- 2. Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр 1, 3, 5, 7, 9?
- 3. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из 20 человек?
- 4. Сколькими способами можно из 30 человек назначить председателя и секретаря?
- 5. Во взводе 5 сержантов и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать наряд из двух сержантов и трёх солдат?
- 6. В классе 36 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если:
 - а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу;
 - б) оба выполняют рисунок.
- 7. Вычислить: а) A^2_6 ; б) C^2_{10} .
- 8. Раскройте скобки в выражении (использовать бином Ньютона): $(4+3x)^5$.
- 9. Разложить выражение по формуле бинома Ньютона $(2m^2 - n^4)^5$
- 10. В разложении $(a + 1)^{10}$ найти коэффициент при a^6

Вариант №2

- 1. Двухзначное число составляют из цифр 0,2, 5,8,9.
 - а) Сколько всего чисел можно составить?
 - б) Составить таблицу исходов.
 - в) Сколько можно составить четных чисел?
 - г) Сколько можно составить нечетных чисел?
- 2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг разных авторов?
- 3. Сколькими способами можно выбрать 3 разные краски из 5 разных красок?
- 4. Сколькими способами можно из 20 человек назначить двух дежурных, один из которых - старший?
- 5. Из 11 роз и 6 гербер нужно составить букет, в котором 3 розы и 2 герберы. Сколько разных букетов можно составить?
- 6. В классе 26 учеников, из которых надо выбрать двоих.
- 7. Сколькими способами это можно сделать, если:
 - а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу;
 - б) оба выполняют рисунок.
- 8. Вычислить: а) A^2_7 ; б) C^2_9 .
- 8. Раскройте скобки в выражении (использовать бином Ньютона): $(3+2x)^5$.
- 9. Разложить выражение по формуле бинома Ньютона $(k^6 - 3d^2)^4$
- 10. В разложении $(a + 2)^{10}$ найти коэффициент при a^6

Пример индивидуального задания по темам «Тригонометрия», «Геометрия»

Вариант №1

- 1. Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.
- 2. Доказать, что в сечении куба плоскостью не может получиться правильный пятиугольник.
- 3. Решить уравнение:

$$2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$$

Вариант №2

- 1. В окружность вписан правильный треугольник, на сторонах которого как на диаметрах описаны вне треугольника полуокружности. Доказать, что сумма площадей трёх луночек больше площади треугольника на $1/8$ часть площади данного круга.
- 2. Доказать, что в сечении куба плоскостью не может получиться прямоугольный треугольник.
- 3. Решить уравнение:

$$4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x - 5)^{\log_3 2}$$

Пример индивидуального задания по геометрии

Вариант №1

- 1. Продолжения высот треугольника ABC делят описанную около треугольника окружность на дуги, длины которых относятся как $p:g:r$. Найти углы треугольника ABC.

2. Доказать, что отрезки соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в точке O ; которая делит каждый из этих отрезков в отношении $3:2$, считая от вершины.

3. Длина каждого ребра куба a . На рёбрах AD и B_1C_1 , взяты соответственно точки M и Q , а на ребре CD - точки P и N так, что

$AM=C_1Q, Q=CP=DN= a/3$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через прямую $MP \parallel NQ$ и найти площадь этого сечения.

4. Все плоские углы при вершине S пирамиды $SABC$ прямые. $SA=a, SB=b, SC=c$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

Вариант №2

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$), медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE . Найти величину угла ACB .

2. Дан треугольник ABC . Найти множество точек M , расположенных в плоскости треугольника ABC и таких, что площади треугольника AMB и BMC равны.

3. Длина каждого ребра тетраэдра $ABCD$ равна a . На ребрах DA, DC и

BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $DM=CN=a/3, CP=a/5$. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP и найти длину отрезка BQ , где точка $P=MNP \cap AB$.

4. Около сферы радиуса R описан усечённый конус, образующая которого равна a . Найти объём конуса.

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах: *фронтальных опросов, контрольных работ, индивидуальных заданий, рефератов*. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.