МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин

С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.18 Теория функций действительного переменного

1. Шифр и наименование направления подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

2. Профили подготовки: Математика. Физика.

Квалификация выпускника:

Бакалавр

4. Форма образования:

Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин

6. Составители программы:

Зюзин Сергей Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована:

научно-методическим советом факультета Филиала (протокол № 1 от 31.08.2018 г.)

8. Семестр: 5

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цель учебной дисциплины: заключается в систематическом введении в классические разделы современной теории функций и функционального анализа.

Задачи учебной дисциплины:

- ознакомить с теоретическими основами курса;
- привить навыки практического применения теоретических положений при решении практических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы: дисциплина Теория функций действительного переменного входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной дисциплиной вариативной части образовательной программы. Для освоения дисциплины «Теория функций действительного переменного» студенты используют знания, умения, навыки, сформированные в ходе изучения математического анализа.

Для изучения данной дисциплины необходимо:

знать: основные понятия теории множеств; основные положение теории метрических пространств;

уметь: решать типовые задачи теории множеств, самостоятельно пополнять знания путем работы с учебной, научно-популярной и научной литературой;

владеть: терминологией теории множеств, теории метрических пространств.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	Готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	**знает (имеет представление)**: – связь теоретических основ и технологических приёмов учебной дисциплины с содержанием преподаваемых учебных предметов; – необходимые сведения педагогического, методического характера, необходимые для создания и реализации учебных программ в соответствии с требованиями образовательных стандартов; **умеет**: – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов; – планировать и осуществлять учебный процесс в соответствии с требованиями образовательных стандартов; **имеет навыки**: – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – владения способами организации образовательного процесса в соответствии с требованиями образовательных стандартов; владения профессиональным инструментарием, позволяющим реализовывать учебные программы в соответствии с требованиями образовательных стандартов;
ПК-4	Способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного	**знает (имеет представление)**: – основные методы использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов; **умеет**: – использовать знание основ учебной дисциплины для перевода

	процесса средствами преподаваемых учебных предметов	информации с естественного языка на язык соответствующей предметной области и обратно; – применять теоретические знания по учебной дисциплине в описании процессов и явлений в различных областях знания; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи; **владеет**: – содержательной интерпретацией и адаптацией теоретических знаний по преподаваемым предметам для решения образовательных задач; – материалом учебной дисциплины на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по преподаваемым предметам, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 2/72.

Форма промежуточной аттестации *зачет с оценкой*

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		сем. 5
Контактная работа, в том числе:	36	36
лекции	18	18
практические занятия	18	18
лабораторные работы	0	0
Самостоятельная работа	36	36
Форма промежуточной аттестации (зачет с оценкой – 0 час.)	0	0
Итого:	72	72

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
	1. Лекции	
1.1	Мощность множества	Понятие о множестве. Операции над множествами. Взаимно-однозначное соответствие и равномощность бесконечных множеств. Счетные множества. Множества мощности континуума.
1.2	Строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой.	Предельная точка множества. Необходимое и достаточное условия существования предельной точки множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Замкнутые, плотные в себе, совершенные множества. Внутренние точки и открытые множества. Структура открытых и замкнутых множеств. Канторовы множества P_o и Q_o.
1.3	Мера Лебега на числовой прямой	Мера интервала. Мера непустого ограниченного открытого множества на числовой прямой. Мера ограниченного замкнутого множества на числовой прямой. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Измеримые множества (по Лебегу) и их свойства. Класс измеримых множеств. Существование неизмеримых ограниченных множеств
1.4	Функции, измеримые по Ле-	Определение и свойства измеримой функции. Теорема

	бегу, интеграл Лебега	Вейерштрасса. Определение интеграла Лебега. Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Восстановление первообразной функции.
1.5	Метрические пространства	Метрические пространства. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства.
1.6	Пространство функций, суммируемых с квадратом	Суммируемые функции. Пространство функций, суммируемых с квадратом (L_2). Скалярное произведение, норма и метрика в (L_2). Ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Связь $L_2(a;b)$ с пространством последовательностей, суммируемых с квадратом.
	***2.* Практические занятия**	
2.1	Мощность множества	Понятие о множестве. Операции над множествами. Взаимно-однозначное соответствие и равномощность бесконечных множеств. Счетные множества. Множества мощности континуума.
2.2	Строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой.	Предельная точка множества. Необходимое и достаточное условия существования предельной точки множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Замкнутые, плотные в себе, совершенные множества. Внутренние точки и открытые множества. Структура открытых и замкнутых множеств. Канторовы множества P_o и Q_o.
2.3	Мера Лебега на числовой прямой	Мера интервала. Мера непустого ограниченного открытого множества на числовой прямой. Мера ограниченного замкнутого множества на числовой прямой. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Измеримые множества (по Лебегу) и их свойства. Класс измеримых множеств. Существование неизмеримых ограниченных множеств
2.4	Функции, измеримые по Лебегу, интеграл Лебега	Определение и свойства измеримой функции. Теорема Вейерштрасса. Определение интеграла Лебега. Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Восстановление первообразной функции.
2.5	Метрические пространства	Метрические пространства. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства.
2.6	Пространство функций, суммируемых с квадратом	Суммируемые функции. Пространство функций, суммируемых с квадратом (L_2). Скалярное произведение, норма и метрика в (L_2). Ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Связь $L_2(a;b)$ с пространством последовательностей, суммируемых с квадратом.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Мощность множества	2	2	0	6	10
2.	Строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой.	4	4	0	6	14
3.	Мера Лебега на числовой прямой	2	2	0	6	10
4.	Функции, измеримые по Лебегу, интеграл Лебега	4	4	0	6	14
5.	Метрические пространства	4	4	0	6	14
6.	Пространство функций, суммируемых с квадратом	2	2	0	6	10
	Зачёт с оценкой					0
	Итого:	18	18	0	36	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Обучающиеся должны иметь четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания ваших учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе лекционных занятий следует не только слушать излагаемый материал и кратко его конспектировать, но очень важно участвовать в анализе примеров, предлагаемых преподавателем, в рассмотрении и решении проблемных вопросов, выносимых на обсуждение. Необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения основную литературу, просмотреть и дополнить конспекты лекции, ознакомиться с дополнительной литературой – это поможет усвоить и закрепить полученные знания. Кроме того, к каждой теме в планах практических занятий даются практические задания, которые также необходимо выполнить самостоятельно во время подготовки к занятию.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет с оценкой. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Для достижения планируемых результатов обучения используются групповые дискуссии, анализ ситуаций.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	Авраменко, В.С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / В.С. Авраменко ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». - Елец : Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2011. - Ч. 1. - 100 с. - Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. -

	URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=271996 (03.07.2018).
02	Веселовская, А.З. Математика: логика, множества, отображения. Избранные аспекты в элементарном изложении : учебное пособие / А.З. Веселовская, Н.Б. Шепелявая ; Санкт-Петербургский государственный университет. - 2-е изд., перераб. и доп. - Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского Государственного Университета, 2014. - 153 с. - (Высшая математика). - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-288-05599-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458126 (03.07.2018).
03	Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: учеб. пос. для вузов.- 4-е изд., стереотип.- М.: ИД «Лидер-М», 2008

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
04	Введение в математический анализ. Действительные числа. Множества. Презентация / . - Москва : Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2014. - 19 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=239548 (03.07.2018).
05	Шевалдина, О.Я. Начала математического анализа : учебное пособие / О.Я. Шевалдина, Е.В. Стрелкова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина ; науч. ред. В.Т. Шевалдин. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 100 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7996-1191-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=276483 (03.07.2018).

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
5.	Гурьянова, К.Н. Математический анализ : учебное пособие / К.Н. Гурьянова, У.А. Алексеева, В.В. Бояршинов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 332 с. - ISBN 978-5-7996-1340-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275708 (03.07.2018).
6.	Мельников, Р.А. Математический анализ (практическое руководство для решения индивидуальных заданий) : учебное пособие / Р.А. Мельников, С.А. Силкин, В.А. Филин ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». - Елец : Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2011. - 325 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-94809-520-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272211 (03.07.2018).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы *(*

№ п/п	Источник
1.	Зюзин, С.Е. Теория функций действительного переменного: учебно-методическое пособие по организации самостоятельной работы студентов заочной формы обучения [Текст]/ С.Е. Зюзин Учебно-методическое пособие – Борисоглебск: ФГБОУ ВПО «Борисоглебский ГПИ», 2014. – 51 с.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

Программное обеспечение:

Microsoft Office 2007 (Word, Excel, PowerPoint)

Сетевые технологии:

- браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer.

Информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:

–Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU – http://elibrary.ru/

–Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» http://window.edu.ru/

–Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – http://fcior.edu.ru

–Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – http://biblioclub.ru/

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:
Мультимедийное оборудование (проектор, стационарный компьютер, экран).

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1 Готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	**знает (имеет представление)**: – связь теоретических основ и технологических приёмов учебной дисциплины с содержанием преподаваемых учебных предметов; – необходимые сведения педагогического, методического характера, необходимые для создания и реализации учебных программ в соответствии с требованиями образовательных стандартов;	1-5	Написание реферата. Темы рефератов п. 19.3.3
	умеет: – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов; – планировать и осуществлять учебный процесс в соответствии с требованиями образовательных стандартов;	1-6	Написание реферата. Темы рефератов п. 19.3.3
	имеет навыки: – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – владения способами организации образовательного процесса в соответствии с требованиями образовательных стандартов; владения профессиональным инструментарием, позволяющим реализовывать учебные программы в соответствии с требованиями образовательных стандартов;	1-5	Перечень заданий для индивидуальной работы п.19.3.2
ПК-4 Способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, мета-	**знает (имеет представление)**: – основные методы использования образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами	1-5	Написание реферата. Темы рефератов п. 19.3.3

предметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	преподаваемых учебных предметов;		
	умеет: – использовать знание основ учебной дисциплины для перевода информации с естественного языка на язык соответствующей предметной области и обратно; – применять теоретические знания по учебной дисциплине в описании процессов и явлений в различных областях знания; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи;	1-5	Написание реферата. Темы рефератов п. 19.3.3
	владеет: – содержательной интерпретацией и адаптацией теоретических знаний по преподаваемым предметам для решения образовательных задач; – материалом учебной дисциплины на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по преподаваемым предметам, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; навыками формализации теоретических и прикладных практических задач.	1-5	Перечень заданий для индивидуальной работы п.19.3.2
Промежуточная аттестация – зачет с оценкой			Вопросы к зачету п. 19.3.1

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Студент умеет соединять знания из различных разделов курса, умеет профессионально прокомментировать физический факт. Полно, правильно и логически безупречно излагает теоретический материал, может обосновать свои суждения. Владеет необходимым математическим аппаратом. Без затруднений применяет теоретические знания при анализе конкретных задач и вопросов. Свободно подбирает (составляет сам) примеры, иллюстрирующие теоретические положения. Сопровождает ответ сведениями по истории вопроса; ориентируется в смежных темах курса, знает основную литературу по своему вопросу.	*Повышенный уровень*	*Отлично*
Студент хорошо владеет теорией вопроса; видит взаимосвязь различных разделов курса, может их объяснить. Может найти примеры, иллюстрирующие ответ, умеет использовать УМК. Хорошо владеет профессиональной терминологией, в случае неверного употребления термина может сам исправить ошибку. В основном полно, правильно и логично излагает теоретический материал, может обосновать свои суждения. Применяет теоретические знания при анализе фактического материала, может приводить	*Базовый уровень*	*Хорошо*

собственные примеры, иллюстрирующие теоретические положения. Допускается 1-2 недочета в изложении и речевом оформлении ответа. Демонстрирует хороший уровень понимания вопросов по теме. Обладает правильной математической речью.		
Студент правильно воспроизводит основные положения теории, демонстрирует понимание этих положений, иллюстрирует их примерами. Умеет использовать знания при характеристике фактического материала. В то же время в ответе могут присутствовать следующие недочеты: а) допускает неточности в определении понятий, терминов, законов (но исправляет их при помощи наводящих вопросов экзаменатора); б) излагает материал недостаточно полно; в) не может достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения; г) излагает материал недостаточно последовательно; д) допускает ошибки в речи. Отвечая на конкретный вопрос, не учитывает различные варианты обучения, обусловленные целями, условиями и индивидуальными особенностями аудитории. Проявляет ассоциативные знания лишь при условии наводящих вопросов экзаменатора. С трудом соотносит теорию вопроса с практическим примером, подтверждающим правильность теории. Даёт неверные примеры, путается при изложении существа физического факта. Слабо владеет профессиональной терминологией, допускает много ошибок и не умеет их исправить.	*Пороговый уровень*	*Удовлетворительно*
Не понимает суть вопроса, механически повторяет текст лекций или учебника, не умеет найти нужное подтверждение в защиту или опровержение определённой позиции, не знает, не умеет соотнести теорию с практикой. Не владеет терминологией, подменяет одни понятия другими. Не понимает сути наводящих вопросов.	–	*Неудовлетворительно*

19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к зачету с оценкой

1. Взаимно-однозначное соответствие и равномощность конечных множеств. Понятие мощности множества. Конечные, бесконечные и счетные множества (опр.). Примеры. Представимость счетного множества в форме числовой последовательности.
2. Существование счетного подмножества у бесконечного множества. Счетность бесконечного подмножества счетного множества.
3. Мощность суммы счетного и конечного множеств. Мощность счетной суммы конечных множеств. Мощность счетной суммы счетных множеств.
4. Счетность множества рациональных чисел. Следствие. Мощности суммы бесконечного и не более чем счетного множества.
5. Несчетность множества [0,1]. Множество мощности континуум. Континуальность [a,b], (a,b], [a,b), (a,b).
6. Мощность конечной и счетной суммы попарно не пересекающихся континуальных множеств.
7. Мощность множества $\{a_{x,y,\ldots,z} \mid x\in X,\ y\in Y,\ \ldots,\ z\in Z\}$, где X, Y, … , Z – континуальные множества. Следствия.
8. Сравнение мощностей, сравнение мощности множества с мощностью всех его подмножеств. Мощность множества всех последовательностей натуральных чисел. Существование множеств сколь угодно высокой мощности.
9. Предельная точка множества. Изолированная точка множества. Примеры. Свойства предельной точки множества.
10. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки бесконечного ограниченного множества.
11. Определение производного множества, замкнутого множества, плотного в себе множества, совершенного множества, замыкания множества. Примеры.
12. Производное множество суммы множеств. Необходимое и достаточное условие замкнутости множества. Замкнутость суммы и пересечения замкнутых множеств.
13. Внутренняя, внешняя и граничная точки множества. Открытое множество. Примеры.

14. Сумма и пересечение открытых множеств.

15. Дополнение множества. Связь замкнутости и открытости дополнения множества с замкнутостью и открытостью самого множества. Дополнение открытого множества до отрезка и дополнение замкнутого множества до интервала.

16. Составляющий интервал. Свойства составляющих интервалов. Структура открытого множества. Структура замкнутого множества и совершенного множества. Канторовы множества.

17. Мера интервала, открытого ограниченного множества. Мера открытого ограниченного множества, как точная нижняя грань мер открытых множеств, его содержащих. Мера множества $G = \sum_k G_k$.

18. Мера ограниченного замкнутого множества, как точная верхняя грань мер замкнутых подмножеств. Определение меры интервала и меры ограниченного замкнутого множества. Мера канторовых множеств G_0, P_0.

19. Внешняя и внутренняя меры множества. Внешняя и внутренняя меры открытых и замкнутых множеств. Соотношение между внутренней и внешней мерами для произвольного множества.

20. Измеримые множества по Лебегу. Измеримость конечной или счетной суммы измеримых множеств. Измеримость пересечения конечного или счетного множества измеримых множеств.

21. Мера суммы $E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots$ измеримых множеств в случае $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots\subseteq E_n\subseteq\ldots$Мера пересечения измеримых множеств E_1, E_2, … , E_n, … в случае $E_1\supseteq E_2\supseteq\ldots\supseteq E_n\supseteq\ldots$

22. Измеримая функция. Измеримость функции на измеримом подмножестве измеримого множества. Измеримость функции, тождественно равной константе. Измеримость функции на множестве нулевой меры.

23. Измеримость эквивалентных функций. Измеримость ступенчатой функции. Измеримость множеств $\{x\in M \mid f(x)\geq a\}$, $\{x\in M \mid f(x)\leq a\}$, $\{x\in M \mid f(x)<a\}$ для измеримой на множестве M функции f.Измеримость функции f(x)+к, к·f(x), |f(x)| и $(f(x))^2$ для измеримой функции f и константы к. Измеримость суммы, разности, произведения и частного двух измеримых функций. Измеримость предела последовательности измеримых функций.

24. Определение интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции.

25. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Интегрируемость по Лебегу и неинтегрируемость по Риману функции Дирихле.

26. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства.

27. Пространство L_2, его основные свойства.

28. Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве.

19.3.2 Индивидуальные задания

Индивидуальное задание выдается по блокам, номер варианта задания совпадает с номером задачи и порядковым номером студента в списке учебной группы.

№1

1. Записать символически: множество всех общих кратных натуральных чисел a,b; множество всех действительных чисел, квадрат которых меньше 2.

2. Записать следующие множества с помощью перечисления элементов или $\varnothing$: $M_1= \{x \in N | x < 6\}$, $M_2= \{x \in N | x < 0\}$, $M_3= \{x \in Z | |x| \leq 2\}$, $M_4= \{x \in N | (x \vdots 2) \wedge (x \vdots 5) \wedge (x < 35)\}$, $M_5= \{x \in R | (x^2-5)(x^2+3) = 0\}$, $M_6= \{x \in R | |x| \leq 2\}$, $M_7= \{x \in Z | |x| > 3\}$.

3. Выяснить истинность следующих высказываний: $6 \in \{x \in N | x \vdots 5\}$, $6 \in \{x \in N | (36 \vdots x) \wedge (x > 5)\}$.

4. Установить вид отношения между множествами: $A = \{x | (x = 2y) \wedge (y \in N)\}, B = \{x | (x = 6y) \wedge (y \in N)\}$.

5. Пусть А-множество всех точек плоскости, у которых ордината положительна, В - множество всех точек плоскости, у которых абсцисса положительна. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \overline{A}, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$.

6. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | x = y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | |x| + |y| \leq 1\}$.

7. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | x = -y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 = y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

9. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | 0 \leq xy\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \geq 1\}$.

10. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | y = -x^2\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1\}$.

11. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | xy \leq 0\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | |x| + |y| \geq 1\}$.

12. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | x \geq y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | 9x^2 + y^2 \leq 36\}$.

13. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | x \leq y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | 4x^2 + 9y^2 \geq 36\}$.

14. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$: $A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | max\{|x|, |y|\} = 1\}$.

№2

1. Установить, существуют ли множества A,B,C, такие, что для них выполняются следующие условия: $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) \setminus C = \emptyset$.
2. Доказать A$\setminus (A \setminus B) \subset (A \cap B)$
3. Доказать $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
4. Доказать: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. Доказать: $A \subset B \Leftrightarrow X \setminus B \subset X \setminus A$, где X – универсальное множество.
6. Доказать: $A \cup B = A \cup (A\Delta B)$
7. Доказать: $A \setminus B = A \cap (A\Delta B)$
8. Доказать или опровергнуть A$\setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
9. Доказать или опровергнуть A$\setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
10. Доказать что если $A\Delta B = A$, то $B = \emptyset$.
11. Установите взаимно-однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством: а) целых чисел; б) всех четных положительных чисел; в) всех четных чисел; г) всех рациональных чисел.
12. Найдите взаимно однозначное отображение: а) отрезка [1; 4] на отрезок [7; 9]; б) отрезка [0; 1] на отрезок [4; 5]; в) отрезка [0; 5] на отрезок [4; 8].
13. Найдите взаимно однозначное отображение: а) интервала (0; 1) на всю числовую прямую; б) интервала (- ∞ ; + ∞) на интервал (0; 1); в) всей числовой прямой на интервал (а; в).
14. Найти взаимно однозначное соответствие между: а) полусегментом [0;1) и полуосью [0; + ∞); б) полусегментом [0; + ∞) и полуосью [0;1); в) полусегментом [а; с) и полуосью [0; + ∞).
15. Построить взаимно однозначное отображение: а) отрезка [0; 1]на интервал (0; 1); б) отрезка [0; 1]на интервал (0; + ∞); в) отрезка [0; 1]на интервал (- ∞; + ∞); г) отрезка [0; 1]на полуинтервал [0; + ∞).
16. Построить взаимно однозначное соответствие окружности радиуса равного 1 на отрезок [0; 1].
17. Установить взаимно однозначное соответствие между окружностью и прямой.
18. Установить взаимно-однозначное соответствие между поверхностью сферы с одной “выколотой” точкой и плоскостью.
19. Построить взаимно однозначное соответствие между единичным кругом с центральной выколотой точкой и дополнением к открытому единичному кругу.

№ 3

1. Доказать, что множество всех окружностей на плоскости, радиусы которых рациональны и координаты центра которых – рациональные числа, есть множество счетное.

2. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества на прямой больше единицы, то это множество конечно или счетно.

3. Определите мощность следующих множеств:

а) множество точек непрерывной кривой $y = f(x), a \leq x \leq b$.

б) множество точек гиперболы;

в) множество точек окружности;

г) множество точек круга;

д) множество точек шара;

е) множество комплексных чисел;

ж) множество попарно неперекрывающихся отрезков прямой.

4. Определите мощность следующих множеств плоскости:

а) множество эллипсов на плоскости, оси которых совпадают с осями координат;

б) множество парабол на плоскости, оси которых параллельны оси координат;

в) множество всех треугольников на плоскости;

г) множество всех четырехугольников на плоскости;

д) множество всех многоугольников на плоскости;

е) множество точек плоскости с рациональными координатами;

ж) множество точек плоскости с иррациональными координатами

з) множество точек плоскости, у которых одна координата рациональная, а другая иррациональная;

и) множество точек плоскости, у которых хотя бы одна координата рациональная.

6. Пусть A и B – два эквивалентных бесконечных множества. Существует ли подмножество A (отличное от A), эквивалентное множеству B?

7. Доказать, что если $A \subset B$ и $A \sim A \cup C$, то $B \sim B \cup C$.

8. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$ и $C \supset A, C \supset B$, то $C \setminus A \sim C \setminus B$».

9. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$ и $C \subset A, C \subset B$, то $A \setminus C \sim B \setminus C$».

10. Верно ли утверждение: «Если $A \sim C$ и $B \sim D$ и $B \subset A, D \subset C$, то $A \setminus B \sim C \setminus D$».

11. Доказать что если $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A)$, то $\mu(A) = \mu(B)$.

№ 4

1. Определить: производное множество множества E, граничное множество множества E (δE), замыкание множества E ($\overline{E}$), если:

а) E – множество точек (x; y) таких, что $-1 < x \leq 1, -1 < y \leq 1$.

б) E – множество точек с рациональными координатами.

в) E = $A_1 \cap A_2$, где A_1 - окружность с центром в точке с координатами (1;2) и радиусом равным 3, A_2 - окружность с центром в точке с координатами (2;5) и радиусом равным 4.

2. Найдите производное множество, множество $\delta E \setminus E$ для указанного в условии множества E.

а) Множество точек прямой вида: $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, (n \in N)$;

б) Множество точек плоскости, которые соответствуют комплексным числам $z_n = (i)^n + \frac{1}{n}, (n \in N)$;

в) множество рациональных чисел отрезка [0;1];

г) множество точек окружностей $x^2 + y^2 = \frac{1}{n}, (n \in N)$;

д) множество точек окружностей $x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{n}, (n \in N)$

е) множество точек прямых x= $\frac{1}{n}, (n \in N)$.

3. Доказать что если множества A и B открыты и $A \cap B = \emptyset$, то $\bar{A} \cap B = \emptyset$ и $A \cap \overline{B} = \emptyset$ (хотя, возможно что $\bar{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$), $\bar{A}$ и $\overline{B}$ - замыкания множеств.

4. Доказать что множество внутренних точек множества A (*int* A) принадлежит $\overline{A}$ ($int\, A \subset \overline{A}$). Привести пример когда эти множества различны.

5. Пусть f(x) – непрерывная функция. Доказать что для любого $a \in R$ *множество точек* $\{x|f(x) = a\}$ замкнуто на числовой прямой.

6. Доказать, что если функция y=f(x) непрерывна, то ее график *E* $= \{(x; y)|y = f(x)\}$ – замкнутое множество на плоскости.

7. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные функции. Доказать что *множество точек* $\{x|f(x) = g(x)\}$ замкнуто на числовой прямой.

8. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные функции. Доказать что *множество точек* $\{x|f(x) \geq g(x)\}$ замкнуто на числовой прямой.

9. Вычислить интеграл Лебега: $\int_0^1 f(x)dx$

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ -1, x \notin Q \end{cases} \text{ где } x \in [0,1]$$

Решение:

f(x) измерима на $[0,1]$ *и ограничена. Действительно,*$|f(x)| < 1$ *при любом* $x \in [0,1]$.

$$X(f > a) = \begin{cases} [0,1], a < -1 \\ Q_{[0,1]}, -1 \leq a < 1 \\ \emptyset, a \geq 1 \end{cases} \text{ – измеримо.}$$

Поэтому существует $\int_0^1 f(x)dx$. *f(x)*$\sim(-1)$ *на [0,1]. Имеем:* $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (-1)dx = -x|_0^1 =$ *-1*

10. Вычислить интеграл Лебега: $\int_0^1 f(x)dx\,;\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \notin Q \\ x^3, x \in Q \end{cases}$

11. Вычислить интеграл Лебега: $\int_X x^3 dx\,; X = \{1\}$.

12. Вычислить интеграл Лебега:

$\int_{Q_0} \frac{sinx}{5^x} dx, Q_0 -$ *множество рациональных чисел отрезка* $[2{,}56.7]$.

13. Вычислить интеграл Лебега:

$\int_{N_0} \frac{sinx}{5^x} dx, N_0 -$ *множество натуральных чисел отрезка*$[2{,}56.7]$.

14. На интервале (1,2) вычислить интеграл Лебега от функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

№ 5

1. Будет ли множество иметь меру Лебега, если его внешняя мера не более нуля?
2. Пусть дано множество состоящее из конечного множества точек. Имеет ли оно меру Лебега?
3. Найти меру Лебега множества а) целых чисел, б) всех четных чисел, в) рациональных чисел, г) множества, состоящего из счетного числа точек.
4. Найти меру Лебега множества иррациональных точек отрезка [0; 1].
5. Определите, измеримо ли множество натуральных чисел?
6. Измеримо ли множество, состоящее из изолированных точек?
7. Измеримы ли заданные множества $E = \bigcup_n E_n$, в случае положительного ответа найдите их меру Лебега: а) $E_n = \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right], n \in N;$ б) $E_n = [0; n], n \in N;$ в) $E_n = \left[n; n + \frac{1}{2^n}\right], n \in N;$ *г)* $E_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{n}{n+1}\right], n \in N.$
8. Около каждой точки канторова множества описан интервал длины: 0,1 с центром в этой точке. Чему равна мера множества, являющегося объединением всех этих интервалов?
9. Пусть множество E на отрезке [0; 1] имеет меру нуль. Является ли его замыкание также множеством меры нуль?
10. Может ли мера множества быть равной нулю, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку?
11. Функция – f^3 измеримая функция на множестве E, докажите, что функция f также измерима на E.

12. Докажите, что если f^2 - измеримая функция на E, то из этого не следует измеримость функции f на E.

13. Докажите, что если функция f имеет производную во всех точках отрезка [a;b], то эта производная является измеримой функцией на отрезке [a;b].

14. Докажите, что если функция f измерима на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ ($a<\alpha<\beta<b$), то она измерима и на всем отрезке [a;b]

19.3.3 Темы рефератов

1. Структура замкнутых и открытых ограниченных множеств, точки конденсации.
2. Проблема меры множества, теорема Витали.
3. Структура измеримых функций, теорема Вейерштрасса.
4. Интеграл Стилтьеса.
5. Точечные множества в двумерном пространстве.
6. Непрерывные кривые, кривые Жордано, Пеано.
7. Кривые Кантора, Урысона. Спрямляемые кривые.
8. Мера Жордано.
9. Непрерывность и разрывность функции одной переменной.
10. Функции с ограниченным изменением.

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах: устного опроса, выполнения индивидуального задания, оценки результатов практической деятельности (реферат). Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практические задание(я), позволяющие оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используется количественная шкала оценок. Критерии оценивания приведены выше.