

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ  
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ  
Избранные вопросы математики

## Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Вводная лекция содержит информацию об основных разделах рабочей программы дисциплины; электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Обучающиеся должны иметь четкое представление о:

- основных целях и задачах дисциплины;
- формах аудиторных занятий и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания ваших учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия.

В ходе лекционных занятий следует не только слушать излагаемый материал и кратко его конспектировать, но очень важно участвовать в анализе примеров, предлагаемых преподавателем, в рассмотрении и решении проблемных вопросов, выносимых на обсуждение. Необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения основную литературу, просмотреть и дополнить конспекты лекции, ознакомиться с дополнительной литературой – это поможет усвоить и закрепить полученные знания. Кроме того, к каждой теме даются практические задания, которые также необходимо выполнить самостоятельно во время подготовки к занятию.

Обязательно следует познакомиться с критериями оценивания каждой формы контроля – это поможет избежать недочетов, снижающих оценку за работу.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет с оценкой. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

## Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

№ п/п	Тема	План
1	Комбинаторика	Правило суммы и правило произведения для конечных множеств. Принцип Дирихле. Размещения, перестановки. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Разбиение множеств.
2	Комбинаторика	Числа Стирлинга второго рода Числа Белла. Числа Стирлинга первого рода. Полиномиальная теорема. Методы в комбинаторном анализе. Метод производящих функций..
3	Теория групп	Определение и важнейшие части группы. Гомоморфизмы. Свободные группы и многообразия. Подгруппы. Тождества и многообразия.

4	Теория групп	Нильпотентные группы, их общие свойства и примеры. Конечные нильпотентные группы. Разрешимые группы
5	Многомерные пространства	Многомерные аффинные пространства. k-мерные плоскости. Многомерные евклидовы пространства. Квадратичные формы.
6	Многомерные пространства	Квадрики (гиперповерхности второго порядка) в аффинных пространствах. Квадрики в евклидовых пространствах.
7	Неевклидовы геометрии	Исторический очерк обоснования геометрии. Основные факты геометрии Лобачевского. Гиперболическое пространство. Модель Кэли-Кляйна плоскости Лобачевского.
8	Неевклидовы геометрии	Понятие о сферической геометрии. Элементарная геометрия на сфере. Двуугольники и треугольники. Расстояние между точками. Прямоугольные треугольники.
9	Неевклидовы геометрии	Понятие об эллиптической геометрии Римана. Связность и ковариантное дифференцирование. Определение и свойства аффинной связности. Римановы связности. Тензор кривизны.

**Вопросы к промежуточной аттестации по дисциплине  
«Избранные вопросы математики»**

1. Правило суммы и правило произведения для конечных множеств.
2. Принцип Дирихле.
3. Размещения, перестановки.
4. Бином Ньютона.
5. Треугольник Паскаля.
6. Разбиение множеств.
7. Числа Стирлинга второго рода
8. Числа Белла.
9. Числа Стирлинга первого рода.
10. Полиномиальная теорема.
11. Методы в комбинаторном анализе.
12. Метод производящих функций.
13. Определение и важнейшие части группы.
14. Гомоморфизмы.
15. Свободные группы и многообразия.
16. Подгруппы.
17. Тожества и многообразия.
18. Нильпотентные группы, их общие свойства и примеры.
19. Конечные нильпотентные группы.
20. Разрешимые группы
21. Многомерные аффинные пространства.
22. k-мерные плоскости.
23. Многомерные евклидовы пространства.
24. Квадратичные формы. Квадрики (гиперповерхности второго порядка) в аффинных пространствах. Квадрики в евклидовых пространствах.

25. Гиперболическое пространство.
26. Модель Кэли-Кляйна плоскости Лобачевского.
27. Понятие о сферической геометрии.
28. Понятие об эллиптической геометрии Римана.

#### **Критерии оценки:**

– оценка **«отлично»** выставляется студенту, если студент свободно ориентируется в теоретическом материале; умеет изложить и корректно оценить различные подходы к излагаемому материалу, способен сформулировать и доказать собственную точку зрения; обнаруживает свободное владение понятийным аппаратом; демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и полное освоение показателей формируемых компетенций;

– оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если студент хорошо ориентируется в теоретическом материале; имеет представление об основных подходах к излагаемому материалу; знает определения основных теоретических понятий излагаемой темы, в основном демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение большинства показателей формируемых компетенций;

– оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент может ориентироваться в теоретическом материале; в целом имеет представление об основных понятиях излагаемой темы, частично демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение некоторых показателей формируемых компетенций;

– оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не ориентируется в теоретическом материале; не сформировано представление об основных понятиях излагаемой темы, не демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение показателей формируемых компетенций.

#### **Варианты контрольных работ по дисциплине «Избранные вопросы математики»**

##### Тема «Комбинаторика»

##### **1 Вариант**

1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 4, 7, 8.
  - а) Сколько всего чисел можно составить?
  - б) Составить таблицу исходов.
  - в) Сколько можно составить четных чисел?
  - г) Сколько можно составить нечетных чисел?
2. Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр 1, 3, 5, 7, 9?
3. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из 20 человек?
4. Сколькими способами можно из 30 человек назначить председателя и секретаря?
5. Во взводе 5 сержантов и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать наряд из двух сержантов и трёх солдат?
6. В классе 36 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если:
  - а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу;
  - б) оба выполняют рисунок.

7. Вычислить: а)  $A^2_6$ ; б)  $C^2_{10}$ .
8. Раскройте скобки в выражении (использовать бином Ньютона):  $(4+3x)^5$ .
9. Разложить выражение по формуле бинома Ньютона  $(2m^2 - n^4)^5$
10. В разложении  $(a + 1)^{10}$  найти коэффициент при  $a^6$

### Контрольная работа 2 вариант

1. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 5,8,9.
  - а) Сколько всего чисел можно составить?
  - б) Составить таблицу исходов.
  - в) Сколько можно составить четных чисел?
  - г) Сколько можно составить нечетных чисел?
2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг разных авторов?
3. Сколькими способами можно выбрать 3 разные краски из 5 разных красок?
4. Сколькими способами можно из 20 человек назначить двух дежурных, один из которых - старший?
5. Из 11 роз и 6 гербер нужно составить букет, в котором 3 розы и 2 герберы. Сколько разных букетов можно составить?
6. В классе 26 учеников, из которых надо выбрать двоих.
7. Сколькими способами это можно сделать, если:
  - а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу;
  - б) оба выполняют рисунок.
8. Вычислить: а)  $A^2_7$ ; б)  $C^2_9$ .
8. Раскройте скобки в выражении (использовать бином Ньютона):  $(3+2x)^5$ .
9. Разложить выражение по формуле бинома Ньютона  $(k^6 - 3d^2)^4$
10. В разложении  $(a + 2)^{10}$  найти коэффициент при  $a^6$

#### Домашняя контрольная работа «Комбинаторика»

(номер в заданиях соответствует последней цифре номера в списке группы)

#### **Задачи на применение правило суммы и правило произведения**

1. На день благодарения было решено подать жареную индейку. Для маринада можно использовать одну из четырех видов острых приправ или одну из двух видов пряных. Сколькими способами можно приготовить маринад?
2. В цветочный магазин завезли пять сортов роз, четыре сорта хризантем, герберы и два сорта лилий. Сколькими способами можно составить букет из этих цветов (каждый цветок может быть только одного сорта)?
3. В сериале «Зачарованные» Прю обладает двумя, а Пайпер и Фиби тремя волшебными силами, способными уничтожить демона. Сколькими способами они могут сделать это?
4. В магазине есть шесть фасонов кофт, подходящих к четырем фасонам брюк. Сколько можно составить костюмов?
5. Женщина в парикмахерской попросила сделать ей колорирование, соответствующее году огненной собаки. Ей предложили один из трех тонов красной краски и второй цвет на выбор из черного, темно-каштанового или светло-каштанового. Из скольких вариантов она может выбрать?
6. Новая фирма объявила набор сотрудников на конкурсной основе. На должность бухгалтера отобрали четыре человека, программиста – два человека, экономиста и юриста – три человека, секретаря – пять человек. Остальные должности определились однозначно. Сколькими способами можно набрать штат?

7. В торговой лавке продаются четыре вида матрешек, лапти трех размеров, шестнадцать видов брелоков с изображениями достопримечательностей России и стеклянный шар с мини-Кремлем внутри. Сколькими способами иностранный турист может выбрать себе один сувенир?

8. К кухонному гарнитуру можно подобрать семь видов обоев, четыре вида плитки и три цвета пластика. Сколькими способами можно сделать ремонт на кухне: а) используя один из материалов; б) сочетая обои и плитку; в) сочетая плитку и пластик?

9. В ресторане есть три сорта грибов и семь видов сыров. Сколькими способами можно приготовить жульен, если остальные ингредиенты неизменны?

10. К выпускному на те деньги, которые есть у Насти, на прокат можно взять либо один из двух наборов бижутерии, либо одно из трех колец, либо одну из пяти вечерних сумочек. Сколькими способами можно выбрать один аксессуар на Настины деньги?

### ***Задачи с использованием формулы включений и исключений***

1. Из 32 школьников 12 занимается волейболом, 15 - баскетболом, 8 - и волейболом, и баскетболом. Сколько учеников не занимается в этих секциях?

2. В классе 20 человек. На физкультуру в спортивный зал ходят 14 человек, а в спортивный зал и бассейн ходят 18 человек. Сколько человек ходят только в бассейн?

3. В аквариуме «Зимнего сада» живут 52 рыбки. 44 из них едят живой корм, 33 – сушеный, а 27 рыбок едят и тот, и другой корм. Остальные питаются свежими растениями. Сколько рыбок поглощают только свежие растения?

4. В школе плавания учатся 250 человек. Из них 170 человек плавают брасом, 92 человека – кролем, а 70 человек владеют и тем, и другим стилем. Сколько человек еще не умеют плавать?

5. В показе прет-а-порте коллекции «Gucci» участвовали 105 манекенщиц. 61 девушка была в зеленом, 52 – в красном, 55 – в белом; 42 манекенщицы были в зеленом и красном, 45 – в зеленом и белом, 40 – в красном и белом, 39 – в зеленом, красном и белом. Остальные – в синем. Сколько девушек были одеты в синее?

6. Из 120 студентов английский язык изучают 44 человека, немецкий – 50, французский – 49, английский и немецкий – 13 человек, английский и французский – 14, немецкий и французский – 12. Все три языка изучают 5 студентов. Сколько студентов изучают один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?

7. В лыжной, хоккейной и конькобежной секциях занимаются 38 человек. Известно, что в лыжной секции занимается 21 человек, среди которых 3 человека занимались еще и в конькобежной секции, 6 человек еще в хоккейной секции и 1 человек занимался одновременно во всех трех. В конькобежной секции занимались 13 человек, среди которых 5 человек занимались одновременно в двух секциях. Сколько человек занималось в хоккейной секции?

8. Из 40 учащихся класса 32 занимаются в математическом кружке, 21 – в кружке «Умелые руки», а 15 – в обоих кружках. Сколько учащихся не занимаются ни в том, ни в другом кружке?

9. На турбазе отдыхало 60 человек. Из них 22 каталось на лыжах, 29 – на коньках, 30 – на санках. На лыжах и коньках – 10 человек, на лыжах и санках – 9 человек, на санках и коньках – 7 человек. Сколько человек не каталось вообще, если три человека каталось и на лыжах, и на санках, и на коньках?

10. Из 100 студентов 85 пересдают математический анализ, 45 – физику. Сколько человек пересдают оба предмета?

### ***Задачи на перестановки без повторов***

*Задача в общем виде:* Дано конечное множество  $M$  различных элементов. Необходимо подсчитать число способов упорядочивания элементов данного множества.

1. Группа туристов за пять дней пребывания в Гагре может посетить Сухум, Альпийские луга, Каман, озеро Рица и экскурсию по ночной Гагре. Сколькими способами они могут сделать это?

2. Горзеленхоз закупило семь сортов цветов для озеленения города. Было решено оформлять клумбы в виде семи окружностей, имеющих один центр и разные радиусы. Сколько различных клумб можно сделать?

3. Веселые человечки построились в ряд: Незнайка, Знайка, Тобик, Винтик, Шпунтик, Кнопочка, Сиропчик, Цветик, Гунька, Ворчун, Пончик. Сколькими способами они могли это сделать?

4. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

5. Сколько есть перестановок чисел 1, 2, 3, ..., 9, в которых цифры 4 и 8 стоят на своих местах?

6. Двенадцати семиклассникам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда по 6 человек, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

7. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 при условии, что каждая цифра входит в число только один раз?

8. Питер Пен и его друзья нашли сокровища семи морей. Для того, чтобы открыть сундук, им надо разложить в правильном порядке по кругу 7 драгоценных камней. Сколько может оказаться неудачных попыток?

9. Сколько существует способов размещения 5 мужчин и 5 женщин за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались?

10. Сколько шестизначных чисел, не кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра входит в число только один раз?

### **Задачи на перестановки с повторениями**

*Задача в общем виде:* Дано конечное множество, содержащее  $m_1$  элементов одного типа,  $m_2$  элементов второго типа, ...,  $m_n$  элементов  $n$ -го типа. Необходимо подсчитать число способов упорядочивания элементов данного множества.

1. Сколько имеется различных шестизначных чисел, у которых три цифры – 3, и три цифры – 6?

2. Для премии на математической олимпиаде выделено 8 экземпляров одной книги, 9 экземпляров второй и 13 экземпляров третьей. Сколькими способами могут быть распределены эти премии между 30 участниками олимпиады, если каждому вручается не более одной книги?

3. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы слова «парабола», слова «метаморфоза»?

4. Сколькими способами можно расставить шахматные фигуры (короля, ферзя, две ладьи, двух слонов и двух коней) на первой горизонтали шахматной доски?

5. Вовочка нарисовал «свою» радугу, составленную из двух обычных (применяя по 2 цвета). Сколькими еще способами он мог это сделать?

6. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

7. Сколько «слов» можно составить из пяти букв А и не более, чем из трех букв Б?

8. Сколько существует способов расстановки на полке 3-х книг одного вида, 5 – другого и 8 – третьего?

9. У Шалтая-Балтая на завтрак 2 коровы, 3 овцы, 5 кадок масла, 4 жареных цыпленка. Сколькими способами он может изменить последовательность приема пищи?

10. На новогоднем утреннике присутствуют 12 детей. У Снегурочки для конкурса есть 15 конфет «Маска», 12 конфет «Белочка» и 9 конфет «Орешек». Сколькими способами дети могут получить по 3 одинаковые конфеты? по 3 разные конфеты?

### **Задачи на размещения без повторений**

**Задача в общем виде:** Дано конечное множество. Необходимо найти число способов упорядочивания каждого  $k$ -элементного подмножества.

1. Борис Николаевич решил подарить жене, дочери и брату по новому автомобилю. В автосалоне есть 12 марок, удовлетворяющих всем требованиям. Сколькими способами он может сделать подарки?

2. В Небыляндию ведут 7 дорог. Сколькими способами можно туда сходить и вернуться, не проходя дважды по одной дороге?

3. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани пяти различных цветов? Решите эту задачу при условии, что одна полоса должна быть красной.

4. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

5. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если в каждый из них опускают не более одного письма?

6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 (без повторений)?

7. Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (без повторений)?

8. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает по 1 фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

9. Учащиеся седьмых классов решили высадить около школы три аллеи. На ярмарке были саженцы березы, липы, дуба, клена, рябины, ели, акации, тополя и каштана. Сколькими способами ребята могут закупить саженцы, если они решили в одну аллею высаживать только одинаковые деревья? На сколько увеличится количество способов, если на другой день, когда пришли ребята, на ярмарке появились ещё и саженцы осины?

10. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр числа 564731, если каждую использовать не более одного раза?

### **Задачи на размещения с повторениями**

**Задача в общем виде:** Дано конечное множество  $M$ . Необходимо найти число способов упорядочивания  $k$ -элементных «подмножеств», каждое из которых может содержать одинаковые элементы.

1. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

2. Каждую клетку квадратной таблицы  $4 \times 4$  можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

3. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

4. Пусть на диск сейфа нанесено 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?



5. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

6. Сколько существует пятизначных номеров, не содержащих цифр 0 и 8?

7. Имеется набор 16 карточек. На четырех из них написана буква «А», на четырех – буква «Б», на четырех – буква «В», и на четырех – буква «Г». Сколько различных комбинаций можно получить, выбирая из набора 4 карточки и располагая их в некотором порядке?

8. На железнодорожной станции 5 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: красный, желтый, зеленый?

9. Сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123153?

10. Сколько существует способов расстановки 20 разных книг по 5 полкам?

### **Задачи на сочетания без повторений**

*Задача в общем виде:* Дано конечное множество  $M$ . Необходимо найти число  $k$ -элементных подмножеств.

1. На день рождения Лене подарили коробку конфет (в коробке 30 штук). Сколькими способами она может выбрать по одной конфете маме, папе, сестренке и двум братьям?

2. У Малыша есть банка вишневого варенья, банка клубничного, 2 пачки разного печенья, пачка вафель, кукурузных палочек и коробка шоколадных конфет. Он предложил Карлесону выбрать 2 вида сладостей из этого списка. Между сколькими возможностями придется выбирать Карлесону?

3. Дмитрий Сычев из «Локомотива» в целях поддержания интереса к футболу у подростков должен посетить 10 школ Перми для детей с дивиантным поведением. Всего в городе 30 таких школ. Сколькими способами он может сделать выборку?

4. В «Лукойл» требуются 9 охранников. В агентстве «Альфа» есть 15 человек, подходящих на эту должность. Сколькими способами может быть набран отдел охраны «Лукойла»?

5. Заявления на проживание в общежитии написали 146 человек. Свободных лишь 92 места, можно освободить еще 12, переселив некоторых студентов. Сколькими способами может быть отобрана группа студентов для проживания в общежитии?

6. На горнолыжной базе есть 20 разных трамплинов. Группа туристов сняли базу на 3 часа. За это время они могут спуститься с шести трамплинов. Сколькими способами они могут сделать это?

7. В классе 6 учеников, абсолютно не общающихся друг с другом. Учитель, для сплочения коллектива, в течение 20 дней приглашает на консультации троих из них так, чтобы компания ни разу не повторилась. Сколькими способами он может сделать это?

8. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть 3 завода, где требуются рабочие в литейные цеха (туда берут только мужчин), 2 ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и 2 фабрики, где требуются и мужчины, и женщины. Сколькими способами они могут распределиться между этими предприятиями?

9. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танцев?

10. У семиклассника Лени есть 7 книг по математике, а у восьмиклассника Бори – 8 книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

### **Задачи на сочетания с повторениями**

**Задача в общем виде:** Дано конечное множество  $M$ . Необходимо найти число  $k$ -элементных «подмножеств», каждое из которых может содержать одинаковые элементы.  $K$  может быть как меньше, так и больше числа элементов множества  $M$ .

1. В магазине 10 разных открыток. Ребятам надо поздравить 13 преподавателей с днем учителя. Сколькими способами они могут купить открытки?

2. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?

3. На озере водится 4 вида рыб. Петя решил поймать 8 рыб и пойти домой. Сколькими различными наборами рыб можно составить?

4. Сколько можно построить треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?

5. В зоомагазине продаются рыбки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 рыб?

6. У Остапа Бендера в мешке 100 слонов, из которых  $k$  разноцветных, и он раздает их  $m$  детям по слону в руки ( $k < m < 100$ ). Сколькими способами может состояться раздача слонов?

7. У старушки есть по клубку красных, зеленых, желтых и синих ниток. Сколькими разными шарфами она может связать с использованием не менее трех цветов, если порядок цветов не имеет значения?

8. Саша купил 3 набора елочных шаров разных цветов по 6 в каждом. Елку достаточно украсить 15 шарами. Сколькими способами можно выбрать комплект украшений?

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, 6 карт, если карты одной масти считать одинаковыми?

10. Букеты состояются из 3 цветов. Всего имеется 5 видов, гармонирующих как по отдельности, так и в сочетании друг с другом. Сколькими различными букетами можно составить?

### Тема «Теория групп»

1. Проверить какие из отображений групп  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  являются гомоморфизмами:

а)  $f(z) = |z|$ ;

б)  $f(z) = 2|z|$ ;

в)  $f(z) = \frac{1}{|z|}$ ;

г)  $f(z) = 1 + |z|$ ;

д)  $f(z) = |z|^2$ ;

е)  $f(z) = 1$ ;

ж)  $f(z) = 2$ .

2. Проверить какие из отображений являются гомоморфизмами групп:

а)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ , где  $f(x) = e^x$ ;

б)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , где  $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ ;

в)  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ , где  $f(A) = a_{11}$ ;

г)  $f : T_n(\mathbb{R}) \rightarrow D_n(\mathbb{R})$ , где  $f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**3.** Доказать, что

- а) группа  $S_n$  порождается транспозициями  $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$ ;
- б) группа  $S_n$  порождается транспозицией  $(1, 2)$  и циклом  $(1, 2, \dots, n)$ ;
- в) группа  $A_n$  порождается циклами длины 3.

Тема «Многомерные пространства»

1. В пространстве  $A^2$  приведите к нормальному виду уравнения следующих квадрик, установите вид квадрики и напишите формулы преобразования координат:

- а)  $x^{1^2} + 5x^{2^2} + 4x^1x^2 - 2x^1 - 2x^2 - 2 = 0$ ;
- б)  $-x^{1^2} + 7x^{2^2} + 6x^1x^2 + 12x^1 + 28x^2 + 28 = 0$ ;
- в)  $x^{1^2} + 5x^{2^2} - 2x^1x^2 - 4x^1 + 12x^2 + 8 = 0$ ;
- г)  $x^{1^2} + x^{2^2} - 2x^1x^2 + 6x^1 - 10x^2 + 25 = 0$ ;
- д)  $x^{1^2} + 5x^{2^2} + 6x^1x^2 + 6x^1 + 2x^2 - 7 = 0$ ;
- е)  $2x^{1^2} + 5x^{2^2} + 2x^1x^2 - 4x^1 - 2x^2 - 16 = 0$ ;
- ж)  $x^{1^2} + x^{2^2} + 2x^1x^2 + 8x^1 - 8 = 0$ ;
- з)  $3x^{1^2} + 4x^1x^2 + 8x^2 + 36 = 0$ ;
- и)  $x^{1^2} + 4x^{2^2} + 4x^1x^2 + 8x^1 + 24x^2 + 8 = 0$ ;
- к)  $3x^{1^2} + 3x^{2^2} + 10x^1x^2 + 2x^1 + 14x^2 - 53 = 0$ .

2. В пространстве  $E^3$  приведите к каноническому виду уравнения следующих квадрик и напишите формулы преобразования координат:

- а)  $3x^{1^2} + 2x^{2^2} + 3x^{3^2} - 4x^1x^2 - 2x^1x^3 + 4x^2x^3 - 6 = 0$ ;
- б)  $2x^{2^2} - x^{3^2} + 4x^1x^2 + 4x^2x^3 - 6x^1 - 12x^2 + 18 = 0$ ;
- в)  $5x^{1^2} + 5x^{2^2} - 3x^{3^2} + 8x^1x^2 - 9 = 0$ ;
- г)  $2x^1x^2 - x^{2^2} + 2x^2x^3 + 12x^2 - 4 = 0$ ;
- д)  $x^{1^2} + 4x^{2^2} - 3x^{3^2} - 4x^1x^2 + 2x^1 - 4x^2 + 1 = 0$ ;
- е)  $9x^{1^2} + 3x^{2^2} - 4x^2x^3 - 24x^2 - 8x^3 - 24 = 0$ ;
- ж)  $6x^{1^2} - 2x^{2^2} + 6x^{3^2} + 4x^1x^3 + 8x^1 - 4x^2 - 8x^3 + 1 = 0$ ;
- з)  $4x^{1^2} + x^{2^2} + 5x^{3^2} + 4x^1x^2 + 50x^2 - 10x^3 - 70 = 0$ ;
- и)  $2x^{1^2} - 3x^{2^2} + 2x^{3^2} - 8x^1x^3 + 4x^1 - 6x^2 + 8x^3 - \frac{35}{3} = 0$ ;
- к)  $2x^{1^2} + 2x^{2^2} - 5x^{3^2} + 2x^1x^2 - 2x^1 - 4x^2 + 4x^3 + 2 = 0$ .

3. На расширенной плоскости задан проективный репер  $R$ . Постройте точку  $M$  по ее координатам в этом репере:

- а)  $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ ,  $M(3, -1, 2)$ ;
- б)  $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ ,  $M(2, 3, -1)$ ;
- в)  $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ ,  $M(1, 2, 1)$ ;

- г)  $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}, M(-2, -1, 1);$
- д)  $R = \{A_{1\infty}, A_2, A_3, E\}, M(-2, 1, -2);$
- е)  $R = \{A_{1\infty}, A_2, A_3, E\}, M(1, 2, 2);$
- ж)  $R = \{A_1, A_{2\infty}, A_3, E\}, M(2, 1, -1);$
- з)  $R = \{A_1, A_{2\infty}, A_3, E\}, M(1, 2, 1);$
- и)  $R = \{A_1, A_2, A_{3\infty}, E\}, M(3, -2, 1);$
- к)  $R = \{A_1, A_2, A_{3\infty}, E\}, M(2, -1, 1).$

### Тема «Неевклидовы геометрии»

#### **Примерные задания для контрольной работы.**

1. Преобразовать выражение  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  к новым координатам  $u, v$ , где  $u=y+ax$ ,  $v=y-ax$ . При каких  $a$  предложенная замена дает регулярную систему координат?
2. Вычислить метрику на стандартной единичной псевдосфере в  $R^3$  в сферических координатах  $\Theta, \varphi$ .
3. Доказать теорему синусов для сферического треугольника.
4. Найти координаты тензоров  $(e_1 + e_2) \oplus (e_1 - e_2)$ .
5. Найти компоненту  $R_{1212}$  тензора кривизны следующей метрики  $ds^2 = du^2 - u^2 dv^2$ .
6. Получить евклидову теорему Пифагора как предельный случай соответствующей гиперболической теоремы при  $k \rightarrow \infty$ .
7. В эллиптической плоскости геометрическое место точек  $B(a, b)$  при  $a \neq b$  состоит из двух прямых.
8. Две параллельные кривые имеют общий центр. Найти площадь, ограниченную двумя диаметрами и дугами, высекаемыми ими на предельных кривых.

## Темы рефератов по дисциплине «Избранные вопросы математики»

1. Правило суммы и правило произведения для конечных множеств.
2. Суть принципа Дирихле.
3. Размещения с повторениями и без повторений.
4. Перестановки с повторениями и без повторений.
5. Бином Ньютона. Биномиальное разложение.
6. Чудесный треугольник Блеза Паскаля.
7. Разбиение множеств.
8. Числа Стирлинга второго рода
9. Числа Белла.
10. Числа Стирлинга первого рода.
11. Полиномиальная теорема.
12. Методы в комбинаторном анализе.
13. Метод производящих функций.
14. Элементарные производящие функции.
15. Различные факты геометрии Лобачевского.
16. Модели плоскости Лобачевского.
17. Великие геометры

### Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется за самостоятельно написанный реферат по теме; умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы;

- **оценка «хорошо»** ставится, если: реферат удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков: в изложении: допущены небольшие пробелы, не искажившие содержание реферата; допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя. В реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация;

- **оценка «удовлетворительно»** ставится, если: неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя; студент не может применить теорию в новой ситуации;

- **оценка «неудовлетворительно»** ставится, если: не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя; нарушена логика в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов; недостаточно сформированы навыки письменной речи; реферат является плагиатом других рефератов более чем на 80%.