МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Математика

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины Математика, целесообразно ознакомиться с программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов. Для более эффективного усвоения студентами курса Математика рекомендуется использовать на лекциях и практических занятиях видеоматериалы, обобщающие таблицы и др.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с программой. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№ п/п	Разделы дисциплины	Рассматриваемые вопросы
1	Элементы линейной алгебры	Матрицы. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений: основные понятия, решение систем линейных уравнений, теорема Кронекера-Капелли, решение невырожденных линейных систем, формулы Крамера, решение систем линейных уравнений методом Гауса, системы линейных однородных уравнений.
2	Элементы векторной алгебры	Векторы: линейные операции над векторами; проекция вектора на ось; разложение вектора по ортам координатных осей; модуль вектора; действия над векторами, заданными проекциями. Скалярное произведение векторов и его свойства: определение скалярного произведения; свойства скалярного произведения; выражение скалярного произведения через координаты. Векторное произведение векторов и его свойства: выражение векторного произведения через координаты. Смешанное произведение векторов: свойства смешанного произведения; выражение смешанного произведения через координаты.
3	Аналитическая геометрия на плоскости	Система координат на плоскости: основные приложения метода координат на плоскости; преобразование системы координат. Линии на плоскости: основные понятия; уравнение

		прямой на плоскости. Линии второго порядка на плоскости: основные понятия; окружность; эллипс; гипербола; парабола; общее уравнение линий второго порядка.
4	Введение в анализ	Действительные числа: множества; множество действительных чисел; числовые промежутки; окрестность точки. Функция: понятие функции; график функции; способы задания функций; обратная функция; основные элементарные функции и их графики. Последовательности: числовая последовательность; предел числовой последовательности; бесконечно малые и бесконечно большие величины; предельный переход в неравенствах; предел монотонной ограниченной последовательности; число е. Предел функции: предел функции в точке; односторонние пределы; предел функции при $x \to \infty$; основные теоремы о пределах; замечательные пределы. Непрерывность функций: непрерывность функции в точке; непрерывность функции в интервале и на отрезке; точки разрыва и их классификация; непрерывность элементарных функций; свойства функций, непрерывных на отрезке. Производная функции: задачи, приводящие к понятию производной; определение производной; ее механический и геометрический смысл; уравнение касательной и нормали к кривой; связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции; производная суммы, разности, произведения и частного функции; производная сложной и обратной функции; производные основных элементарных функций. Дифференциал функции: понятие дифференциала функции; геометрический смысл дифференциала функции; основные теоремы о дифференциалах. Исследование функций при помощи производных: теоремы о дифференцируемых функциях; возрастание и убывание функций; максимум и минимум функций; наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке; выпуклость графика функции; точки перегиба; асимптоты графика функции; общая схема исследования функции и построения графика. Формула Тейлора: формула Тейлора для многочлена; формула Тейлора для произвольной функции.
5	Комплексные числа	Понятие и представления комплексных чисел: основные понятия; геометрическое изображение комплексных чисел; формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами: сложение комплексных чисел; вычитание комплексных чисел; умножение комплексных чисел; деление комплексных чисел; извлечение корней из комплексных чисел.

Методические рекомендации по подготовке к промежуточной аттестации

Готовиться к промежуточной аттестации необходимо последовательно. Сначала следует определить место каждого контрольного вопроса в соответствующем разделе темы учебной программы, а затем внимательно прочитать и осмыслить рекомендованные научные работы, соответствующие разделы рекомендованных учебников. При этом полезно делать хотя бы самые краткие выписки и заметки. Работу над темой можно считать завершенной, если вы сможете ответить на все контрольные вопросы и дать определение понятий по изучаемой теме.

Для обеспечения полноты ответа на контрольные вопросы и лучшего запоминания теоретического материала рекомендуется составлять план ответа на контрольный вопрос. Это позволит сэкономить время для подготовки непосредственно перед промежуточной аттестацией за счет обращения не к литературе, а к своим записям.

При подготовке необходимо выявлять наиболее сложные вопросы, с тем, чтобы обсудить их с преподавателем на лекциях и консультациях.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

Раздел ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Матрицы и операции над ними

1. Умножение матрицы на число.
2. Сложение матриц
3. Умножение матриц.

Определитель квадратной матрицы

4. Определитель второго порядка.
5. Определитель третьего порядка.
6. Определитель n – го порядка.

Системы линейных уравнений и их решение

7. Решение систем линейных уравнений методом последователь-ного исключения неизвестных (методом Гаусса).
8. Применение определителей к исследованию и решению системы линейных уравнений.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами, и каковы их свойства?
2. Как сложить две матрицы и всегда ли это можно сделать?
3. Как умножить матрицу на число?
4. Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
6. Что называется определителем (детерминантом) второго и третьего порядков, каковы их свойства?
7. Каковы способы вычисления определителей?
8. Что называется произведением двух матриц? Каковы свойства произведения матриц?
9. Как умножить матрицу на матрицу? Всегда ли это выполнимо?
10. Какая матрица называется единичной, квадратной и транспонированной?
11. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?
12. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие сис-темы называются совместными, а какие несовместными?
13. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
14. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
15. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?
16. Что можно сказать о системе линейных уравнений, если ее определи-тель равен нулю?
17. При каком условии однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение?
18. Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.
19. Какие разновидности метода Гаусса вы знаете?
20. Что называется рангом системы линейных уравнений? Как, исполь-зуя метод Гаусса, можно найти ранг системы линейных уравнений?
21. Какие неизвестные в системе линейных уравнений, и в каком случае называют свободными, а какие базисными?
22. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?
23. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?
24. Запишите систему линейных уравнений с помощью матриц.

25. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравне-ний?

Пример. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&2&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&8\\1&2&4\end{pmatrix},$$

найти матрицу $2A+B$.

Пользуясь определениями 1.8 и 1.9, получим следующие матрицы:

$$2A=\begin{pmatrix}2\cdot1&2\cdot2&2\cdot3\\2\cdot2&2\cdot1&2\cdot4\\2\cdot3&2\cdot2&2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&2&8\\6&4&6\end{pmatrix},$$

$$2A+B=\begin{pmatrix}2+1&4+3&6+4\\4+5&2+7&8+8\\6+1&4+2&6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7&10\\9&9&16\\7&6&10\end{pmatrix}.$$

Пример. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&1\\1&-4&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Составить матрицу $A^T B$.

Пользуясь определениями 1.10 и 1.11, получим матрицы

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&-4\\3&1&2\end{pmatrix};$$

$$A^T B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&-4\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\\10\end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\text{ и } B=\begin{pmatrix}2&4&1\end{pmatrix}.$$

По определению 1.10, результатом перемножения матриц A и B будет матрица размерности 3×3, а при перемножении матриц B и A получится матрица размерности 1×1:

$$AB=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2&1\cdot4&1\cdot1\\4\cdot2&4\cdot4&4\cdot1\\3\cdot2&3\cdot4&3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\8&16&4\\6&12&3\end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 21.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц

$$A = (1\ 2) \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

По определению 1.10, результатом перемножения матриц A и B будет матрица размерности 1×2:

$$(1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (13\ 16).$$

<u>Пример.</u> Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу A^3.

Воспользуемся определением 1.10 и запишем:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Матрицы. Операции с матрицами»

Вариант 1

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 12 & -3 & 7 & 8 \\ -7 & 10 & 0 & 9 \\ 12 & 13 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 & 2 \\ 0 & -5 & 17 & 23 \\ 17 & 5 & 12 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A + B$;

2) $A - B$;

3) $2A + 3B$;

4) A^T;

5) $2E + B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 9\\ 3 & 1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 17\\ 12 & 1 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}11 & 9\\ 0 & 8\\ -2 & 7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -1 & 12\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 2

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4 & 1\\ 10 & -1 & 6 & 0\\ -5 & 17 & 3 & 2\\ -4 & -1 & -2 & 12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -8 & 15 & 7\\ 2 & -3 & 12 & 35\\ 14 & 2 & 10 & 10\\ 2 & -1 & 2 & -5\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $4A-2B$;

4) A^T;

5) $3E+2B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 7\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 10\\ 11 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 8\\ 3 & 9\\ -1 & 6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;

2) $D\cdot B$;

3) $A\cdot B^T$;

4) $C\cdot(A+B)$;

5) D^3.

Вариант 3

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 & 2 \\ 11 & -5 & 3 & 8 \\ -1 & 10 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & -5 & 10 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 10 & 3 \\ 1 & -4 & 11 & 18 \\ 13 & 5 & 16 & 11 \\ 3 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $5A+B$;
4) A^T;
5) $-E-B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 3 & 9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A\cdot C$;
2) $D\cdot B$;
3) $A\cdot B^T$;
4) $C\cdot(A+B)$;
5) D^3.

Вариант 4

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 1 \\ 13 & -7 & 2 & 9 \\ -5 & 13 & 7 & 6 \\ -1 & -6 & -4 & 12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 16 & 9 \\ 0 & -5 & 12 & 19 \\ 14 & 6 & 17 & 10 \\ 2 & -2 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;
2) $A-B$;
3) $-A+2B$;
4) A^T;
5) $12E+5B^T$.

2. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 14 \\ 15 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A+B)$;

5) D^3.

Вариант 5

1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 0 \\ 10 & -1 & 6 & 7 \\ -1 & 16 & 9 & 0 \\ -7 & -5 & -2 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 & 8 \\ 7 & -3 & 10 & 18 \\ 15 & 2 & 13 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A+B$;

2) $A-B$;

3) $-2A+2B$;

4) A^T;

5) $6E-B^T$.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 12 \\ 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 25 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицы

1) $A \cdot C$;

2) $D \cdot B$;

3) $A \cdot B^T$;

4) $C \cdot (A+B)$;

5) D^3.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

По формуле вычисления определителя квадратной матрицы второго порядка запишем:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 7 = -23.$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 1 - (1\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1) = 19.$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Для вычисления определителя матрицы A воспользуемся теоремой 2.3 и разложим определитель по элементам первой строки:

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14}.$$

Поскольку $a_{12} = 0,$ вычислим алгебраические дополнения $A_{11},\ A_{13},\ A_{14}.$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{11} = 10,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = 2,$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{14} = 10,$$

$$|A| = (-1)\cdot 10 + 3\cdot 2 + 4\cdot 10 = 36.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Определитель квадратной матрицы»

Вариант 1

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 8 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 11 \\ 8 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 2

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 8 & 7 & 19 \\ 3 & 1 & 31 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 13 & 8 & -6 \\ 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -6 & 0 \\ 18 & 1 & -2 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 3

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 17 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 0 & 3 & 12 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 4

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & -90\\ 0 & 32\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}13 & 5 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 11 & 2 & -17\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}7 & -6 & 12\\ 0 & 3 & 8\\ 9 & 11 & 34\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}36 & -15 & -10 & 2\\ 12 & -7 & -4 & 2\\ 4 & -5 & -2 & 0\\ 4 & 9 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Вариант 5

1. Вычислить определитель квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 7 & 19\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10 & 5 & -1\\ 2 & 17 & 1\\ 21 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 25\\ 7 & 0 & 6\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 3\\ -2 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

разложением по четвёртому столбцу и третьей строке.

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Составить обратную матрицу.

Для решения задачи воспользуемся теоремой 3.3 и запишем: $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-3)=3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-2)=2;\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1.$$

Таким образом,

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

__Пример.__ Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$. Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ невырожденная, поскольку её определитель $|A|=-1$ отличен от ноля. Матрицу A^{-1} найдём любым из известных способов: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. Искомая матрица X может быть найдена по формуле:

$$X=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Выполняя указанные действия, получим решение матричного уравнения:

$$X=\begin{pmatrix}-38\\ -11\end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме «Обратная матрица»

Вариант 1

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 1\\ 5 & 5 & 7\\ 5 & 4 & 9\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}8 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}41\\ 48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}93\\ 155\end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 5 & 5 & 7\\ 5 & 4 & 9\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}4\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\ 15\end{pmatrix}$.

Вариант 3

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & -30 & 0\\ 1 & 20 & 5\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}-5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}.$

Вариант 4

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7\\ 0 & 12 & 0\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 14\end{pmatrix}.$

Вариант 5

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 7\\ 1 & 2 & 8\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 14 & 10\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 15\end{pmatrix}.$

<u>**Пример.**</u> Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5,\\ x_1-2x_2+3x_3=-3,\\ 7x_1+x_2-x_3=10.\end{cases}$$

<u>**Прямой ход.**</u> Приведём расширенную матрицу системы

$$A_b=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 3 & -3\\ 7 & 1 & -1 & 10\end{pmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду. Переставим первую и вторую строки матрицы A_b, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сложим вторую строку полученной матрицы с первой, умноженной на (-2), а её третью строку – с первой строкой, умноженной на (-7). Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке полученной матрицы прибавим вторую строку, умноженную на (-3), в результате чего получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы привели данную систему уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ \quad 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ \qquad -x_3 = -2. \end{cases} ,$$

Обратный ход. Начиная с последнего уравнения полученной ступенчатой системы уравнений, последовательно найдём значения неизвестных: $x_3 = 2,\ x_2 = 5,\ x_1 = 1.$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна: она имеет хотя бы одно решение – нулевое (так называемое, тривиальное решение). Нас будут интересовать только нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений. Рассмотрим пример решения однородной системы линейных уравнений методом Гаусса.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найдём решение системы линейных уравнений, рассмотренной в предыдущем примере, методом Крамера. Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку $\det A=-30\neq 0$. Вычислим определители $\Delta_1,\ \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-30,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix}=-60,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix}=-90.$$

По формулам, представленным в теореме 5.2, вычислим значения неизвестных: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3.$

Задания для самостоятельной работы по теме «Системы линейных уравнений и методы их решения»

Вариант 1

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 2

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 3

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 4

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Вариант 5

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

методом Гаусса, матричным методом и методом Крамера.

Раздел МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Контрольные работы берутся из учебного пособия: Солодовникова Е.Н., Шарипов Б.У. Математика: учебное пособие по организации самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки «Машиностроение», профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств». – Борисоглебск: БФ ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», 2015. – 100 с.

1. Множества, функции, последовательности

Множества, действительные числа.

Основные понятия.

Числовые множества, множество действительных чисел.

Числовые промежутки. Окрестность точки.

Функция.

Понятие функции.

Числовые функции. График функции. Способы задания функции.

Основные характеристики функции.

Обратная функция.

Сложная функция.

Основные элементарные функции и их графики.

Последовательности.

Числовая последовательность.

Предел числовой последовательности.

Предельный переход в неравенствах.

Предел монотонной ограниченной последовательности. Число *e*.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры различных множеств, совпадающих множеств.

2. Дайте определение подмножества; почему пустое множество является подмножеством любого множества?

3. Какое множество называется упорядоченным?

4. Какие числовые множества называются промежутками?

5. Из отрезка [*a*; *b*] удален интервал (*a*; *b*). Что осталось?

6. Что называется абсолютной величиной числа?

7. Что больше: |2-3| или |2|+|-3| ?

8. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x|}{x}$?

9. Что называется областью определения функции; множеством значений функции?

10. Какую функцию называют постоянной?

11. Какие функции называются возрастающими, убывающими?

12. Сформулируйте определение чётной (нечётной) функции. В чём состоит геометрический смысл чётности и нечётности функций?

13. Какая функция называется периодической? Что называется периодом функции?

14. Какие функции называются простейшими элементарными функциями?

15. Какая функция называется сложной?

16. Напишите определение числовой последовательности.

Индивидуальные задания

Пример 1.1

Решить уравнение: $\left||x-4|-2\right|=3$.

<u>Решение</u>.

По определению модуль числа *m* равен:

$$|m|=\begin{cases} m,\ если\ m\ge 0,\\ -m,\ если\ m<0.\end{cases}$$

Воспользуемся данным определением для решения уравнения и рассмотрим 2 случая:

1) $|x-4|-2=3 \Rightarrow |x-4|=5$

а) $\begin{cases} x-4\ge 0,\\ x-4=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 4,\\ x=9;\end{cases} \Rightarrow x=9$.

б) $\begin{cases} x-4<0,\\ -x+4=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4,\\ x=-1;\end{cases} \Rightarrow x=-1$.

2) $|x-4|-2=-3 \Rightarrow |x-4|=-1$ - это уравнение не имеет корней, так как модуль не может быть отрицательной величиной.

Ответ: $x_1=-1, x_2=9$.

Пример 1.2

Решить неравенство: $|x+5|-|x-1|\ge 2$.

<u>Решение</u>.

Воспользуемся определением модуля числа и в соответствии с ним разобьём числовую ось на промежутки (рис.1):

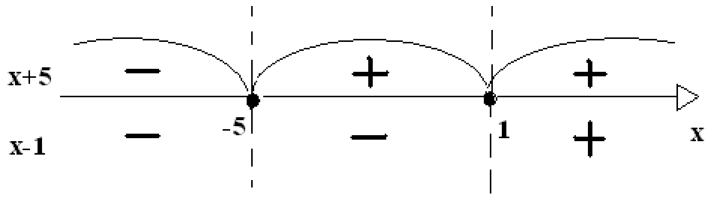


Рис. 1

1) $\begin{cases} x \le -5, \\ -x-5+x-1 \ge 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -5, \\ -6 \ge 2; \end{cases} \Rightarrow$ нет решений.

2) $\begin{cases} -5 < x < 1, \\ x+5+x-1 \ge 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < x < 1, \\ 2x \ge -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 < x < 1, \\ x \ge -1; \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 1)$

3) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x+5-x+1 \ge 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ 6 \ge 2; \end{cases} \Rightarrow x \in [1; +\infty)$

Ответом будет служить объединение найденных решений. Таким образом, решение исходного неравенства имеет вид: $x \in [-1; +\infty)$.

1.1. Решить уравнения и неравенства

1. $x^2 + 2|x+3| - 10 \le 0$
2. $x^2 - |3x+2| + x \ge 0$
3. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$
4. $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$
5. $|x-1| - |x| + |2x+3| > 2x + 4$
6. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$
7. $||x+1| + 2| = 2$
8. $||x-1| + 2| = 1$
9. $|x+3| - |x+1| < 2$
10. $|x-3| + |x+3| > 8$
11. $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$
12. $|x^2 - 3x| > |x^2| - |3x|$
13. $|(x^2 + 2x + 5) + (x - 5)| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|$
14. $||2 - 3x| - 1| > 2$
15. $||x| - 2| \le 1$
16. $x^2 - 2|x| - 3 = 0$
17. $|\sin x| - \sin x = 2$
18. $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$
19. $|x-1| + |1-2x| = 2|x|$
20. $|x+4| = |x-4|$
21. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$
22. $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$
23. $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$
24. $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$
25. $|x| < x + 1$

Пример 2

Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} + \lg(x-1)$.

<u>Решение</u>.

Так как исходная функция представляет собой сумму функций, то её область определения будет состоять из всех тех значений *x*, которые принадлежат одновременно областям определения функций $y_1=\frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ и $y_2=\lg(x-1)$. Таким образом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases}-x^2+x+2>0,\\ x-1>0.\end{cases}$$

Полученная система неравенств равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}(x+1)(x-2)<0,\\ x>1.\end{cases}$$

Решением этой системы является интервал (1; 2).

Таким образом, $D(y)=(1;\,2)$.

1.2. Найти области определения функций, заданных формулами

1. $y=3x+2$
2. $y=x^3+5x+6$
3. $y=\dfrac{3x-1}{5x+6}$
4. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$
5. $y=\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$
6. $y=\sqrt{2-3x}+\lg x$
7. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$
8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$
9. $y=\sqrt{4-x^2}$
10. $y=\sin 3x$
11. $y=x+\cos 2x$
12. $y=tgx$
13. $y=ctg\,\dfrac{x}{2}$
14. $y=\arcsin x$
15. $y=\arccos(x+2)$
16. $y=arctg(2x+1)$
17. $y=\log_2\log_3\log_4 x$
18. $y=\log_2(-x)$
19. $y=\log_{\frac{1}{3}}|x|$
20. $y=\log_5(2x-1)$
21. $y=\log_7(4x-x^2)$
22. $y=\dfrac{1}{\log_5(1-3x)}$
23. $y=3^{\frac{1}{x}}$
24. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}-3}$
25. $y=\arcsin\dfrac{1}{x+3}$

Пример 3.1

Выяснить, чётна или нечётна функция $f(x)=x^5-x^3+x$.

Решение.

Для выполнения данного задания необходимо воспользоваться определением чётной (нечётной) функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***чётной***, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого *x* из области определения верно равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечётной***, если её область определения симметрична относительно начала координат и для любого *x* из области определения верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

1) Исходная функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Следовательно, область определения данной функции симметрична относительно начала координат.

2) Найдём $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 + (-x) = -x^5 + x^3 - x = -(x^5 - x^3 + x) = -f(x).$$

Из 1)-2) следует, что заданная в условии функция нечётная.

Пример 3.2

Выяснить, является ли функция чётной или нечётной: $y = 14\lg(2x-3)$.

Решение.

Найдём область определения функции: для этого учтём тот факт, что выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительно.

$2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3;\ x > 1{,}5$.

Таким образом, $D(y) = (1{,}5; +\infty)$, т.е. область определения не является симметричной относительно начала координат. Следовательно, согласно определению данная функция ни чётна, ни нечётна (функция общего вида).

1.3. Установить чётность или нечётность функции

1.	$y = x \cdot 4^{-x^2}$	2.	$y = \log_2 \dfrac{2-x}{2+x}$
3.	$y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$	4.	$y = 5^{-x^2}$
5.	$y = x^2 - x$	6.	$y = x^3 + x^2$
7.	$y = \lg\cos 2x$	8.	$y = x^2 + 3x - 1$
9.	$y = x^4 - 2x^2 + 3$	10.	$y = x^3 + 2x$
11.	$y = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	12.	$y = \cos x + x\sin x$
13.	$y = x \cdot 2^{-x}$	14.	$y = 2^x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
15.	$y = 2x\sin^2 x - 3x^3$	16.	$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 3^x$

17. $y = \dfrac{x}{\sin x}$

18. $y = 5\log_2(x+1)$

19. $y = x^4 \sin 7x$

20. $y = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$

21. $y = x^4 - 3x^2 + x$

22. $y = |x| + 2$

23. $y = |x+2|$

24. $y = \lg\cos x$

25. $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$

Пример 4

Дана последовательность $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8};...$ 1)Написать формулу общего элемента последовательности; 2) установить, что она: а) ограничена или не ограничена; б) имеет грани сверху и снизу; в) бесконечно большая или бесконечно малая; г) возрастающая, неубывающая, убывающая или невозрастающая; д) немонотонная, монотонная, строго монотонная.

Решение.

1). Общий элемент последовательности $a_n = \dfrac{1}{2n}$.

2а) Последовательность ограниченная, так как $0 < a_n \le 1$.

2б). Верхняя грань последовательности M=a_1=1; нижняя грань последовательности $m = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

2в). Для любого ε > 0 $|a_n| = \left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, тогда для всех n > N (N – целое число из ряда натуральных чисел $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$) имеем $|a_n| < \varepsilon$, то есть последовательность $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ бесконечно малая.

2г). Последовательность убывающая, так как $a_{n-1} > a_n$.

2д). Последовательность строго монотонная, так как:

$a_1 > a_2 > a_n > ... > a_{n-1} > a_n$.

1.4. Написать формулу общего элемента последовательности, для которой установить, что она:

- ограничена или не ограничена;
- имеет грани сверху и снизу;
- бесконечно большая или бесконечно малая;
- возрастающая, неубывающая, убывающая или невозрастающая;
- немонотонная, монотонная, строго монотонная.

1. $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6};...$

2. $1; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{5^2}; \frac{1}{7^2};...$

3. $1; 2\frac{1}{4}; 2\frac{7}{9}; 3\frac{1}{16}; 3\frac{6}{25};...$

4. $1; \frac{1}{1\cdot 2}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};...$

5. $2; 10; 26; 82; 242; 730$

6. $-1; 1; -1; 1; -1;...$

7. $-1;2;-3;4;-5;...$

8. $\ln 1;\ln 2;\ln 3;\ln 4;...$

9. $2;4;6;8;10;...$

10. $\sin 1;\sin 2;\sin 3;\sin 4;...$

11. $1;-2;3;-4;5;-6;7;...$

12. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...$

13. $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...$

14. $1;1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{3};...$

15. $1;1;2;2;3;3;...$

16. $\frac{1}{3};-\frac{1}{5};\frac{1}{9};-\frac{1}{17};...$

17. $1;\frac{1}{3};\frac{1}{7};\frac{1}{15};...$

18. $\frac{1}{4};\frac{1}{11};\frac{1}{30};\frac{1}{85};...\frac{1}{3^n+n}$

19. $1;\frac{1}{4};\frac{1}{9};\frac{1}{16};...$

20. $\frac{1}{2};\frac{1}{7};\frac{1}{24};\frac{1}{77};...$

21. $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{11};\frac{1}{20};...$

22. $1;\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{1}{12};...$

23. $2;\frac{3}{2};\frac{4}{3};\frac{5}{4};...$

24. $-1;2;1;\frac{4}{5};...$

25. $\frac{1}{5};\frac{2}{7};\frac{1}{3};\frac{4}{11};...$

Пример 5

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x числитель и знаменатель дроби и применив теорему о свойствах пределов, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{4}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{3-0}{1-0}=3.$$

1.5. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n-1}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n+11}+\frac{\cos n}{10n}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n+1}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n}{n+1}+\dfrac{\sin n}{n}\right)$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+9+...+n^2}{n^3+3n+2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

2. Пределы функций

2.1 Предел функции.

2.1.1 Предел функции в точке.

2.1.2 Односторонние пределы.

2.1.3 Предел функции при $x\to\infty$

2.1.4 Бесконечно большая функция.

2.2 Бесконечно малые функции (БМФ).

2.2.1 Определения и основные теоремы.

2.2.2 Связь между функцией, ее пределом и БМФ.

2.2.3 Основные теоремы о пределах.

2.2.4 Признаки существования пределов.

2.2.5 Первый замечательный предел.

2.2.6 Второй замечательный предел.

2.3 Эквивалентные БМФ (ЭБМФ).

2.3.1 Сравнение БМФ.

2.3.2 ЭБМФ и основные теоремы о них.

2.3.4 Применение ЭБМФ.

2.4 Непрерывность функции.

2.4.1 Непрерывность функции в точке.

2.4.2 Непрерывность функции в интервале и на отрезке.

2.4.3 Точки разрыва функции и их классификация.

2.4.4 Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.

2.4.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.

2. Прочитайте запись: $\lim f(x)=b$. Дайте определение предела функции в точке.

3. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?

4. Приведите примеры бесконечно малых и бесконечно больших величин.

5. Какие функции называются эквивалентными бесконечно малыми?

6. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

7. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

8. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.

Индивидуальные задания

Теорема (*). Пусть функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ также непрерывны в этой точке (частное при $g(x_0)\neq 0$).

Пример 6

Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$.

Решение.

Так как в точке x = π/2 функции 1, sin$x$, cos2x непрерывны, то по теореме (*) функция $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$ непрерывна в точке x = π/2, т.е. предел функции и ее значение в этой точке равны. Тогда, переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\sin(\pi/2)}{1-\cos(2\pi/2)}=\frac{1+1}{1-(-1)}=1.$$

Пример 7

Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Непосредственно теорему о пределе частного применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель x+2.

Получаем $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x^2-2x+4}$.

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\dfrac{0}{0}$ раскрыта.

Применяя теорему о свойствах пределов, окончательно находим:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

2.1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{1+x-1}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^3+2x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

5. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$

9. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

11. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

Пример 8

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\ln x)}{2x-2e}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

Решение.

1) Имеем ln(1+3*x*) ~ 3*x*; sin 5*x* ~ 5*x*. Тогда получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2/4} = 4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2} =$

$= -4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = -4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2} = -2$

3) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\ln x)}{2x-2e} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln[1+(\ln x-1)]}{2x-e} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{2(x-e)} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{2(x-e)} =$

$= \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln[1+(\frac{x}{e}-1)]}{2(x-e)} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\frac{x}{e}-1}{2(x-e)} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-e}{2e(x-e)} = \dfrac{1}{2e}.$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-\log_3 3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3\frac{x}{3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{\ln x/3}{\ln 3}}{x-3} =$

$= \dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln[1+(x/3-1)]}{x-3} = \dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x/3-1}{x-3} = \dfrac{1}{3\ln 3}.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1}{2}.$

2.2.Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(2^{x-1}-1\right)}{\cos(x-1)-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2-1}}{3x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$

12. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-10^x}{3^x-7^x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)^x$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{1/x^2}$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg\,2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{1/x-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+x\right)^{1/x}$

3. Производная функции

3.1 Производная функции

3.1.1 Задачи, приводящие к понятию производной.

3.1.2 Определение производной: её механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.

3.1.3 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

3.1.4 Производная суммы, разности, произведения и частного функций.

3.1.5 Производная сложной и обратной функций.

3.1.6 Производные основных элементарных функций.

3.1.7 Гиперболические функции и их производные.

3.1.8 Таблицы производных.

3.2 Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

3.2.1 Неявно заданная функция.

3.2.2 Функция, заданная параметрически.

3.3 Логарифмическое дифференцирование.

3.4 Производные высших порядков.

3.4.1 Производные высших порядков явно заданной функции.

3.4.2 Механический смысл производной второго порядка.

3.4.3 Производные высших порядков неявно заданной функции.

3.4.4 Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.

Вопросы для самопроверки.

1. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?
2. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируете зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
8. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
9. В чем заключается механический смысл производной?
10. Что называется производной второго порядка, и каков ее механический смысл?

Правила дифференцирования

1. $(u\pm v)'=u'+v'$;
2. $(uv)'=u'v+uv'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$

4. $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;

5. $y_x' = \frac{1}{x_y'}$, если $y = f(x),\ x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e,$ в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Индивидуальные задания

Пример 9

Используя правила и формулы дифференцирования, найти производные функций:

1) $f(x) = 5 + x^2 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = x\sin x$;

4) $f(x) = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

<u>Решение</u>.

1) $f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x)' =$

$= (5)' + (x^3)' + (3x^2)' + (\sin x)' + (\cos x)' + (2tgx)' - (3ctgx)' + (\log_2 x)' + (3\ln x)' =$

$$= 3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x}\log_2 e + \frac{3}{x};$$

2) $$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2};$$

3) $$f'(x) = (x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cdot\cos x;$$

4) $$f'(x) = (x\cdot arctgx)' - (\frac{1}{2}\ln(1+x^2))' = (x)'arctgx + x(arctgx)' - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' =$$

$$= 1\cdot arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)} = arctgx.$$

3.1. Найти производные функций

1.	$y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$	$y = x^2 - \frac{1}{2^{x^e}}$
2.	$y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$	$y = \frac{x}{2x-1}$
3.	$y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$	$y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$
4.	$y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$	$y = \frac{\ln x}{x}$
5.	$y = 4x^5 - 3\sin x + 5ctgx$	$y = x\ln x$
6.	$y = \sqrt[3]{x} + 4\cos x - 2tgx + 3$	$y = \sin 3x$
7.	$y = 3 + 4x^2 + \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x$	$y = \sin(x^2 + 5x + 2)$
8.	$y = ctg^3\frac{x}{3}$	$y = \arcsin(e^{4x})$
9.	$y = \arcsin\sqrt{x}$	$y = \sqrt{1-x^2}$
10.	$y = \sin^4 x + \cos^4 x$	$y = \sqrt{1+5\cos x}$
11.	$y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$	$y = \sqrt{2x - \sin 2x}$
12.	$y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$	$y = \sin^2 x$
13.	$y = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^2} + \frac{1}{x}$	$y = \sin^3 x$

14.	$y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$	$y=\cos^{100}x$
15.	$y=tgx-ctgx$	$y=arctg\,\frac{x+3}{x-3}$
16.	$y=x^2e^{-x}$	$y=arcctg^{\,2}\frac{1}{x}$
17.	$y=x\cos x$	$y=\ln\sin x$
18.	$y=x^2tgx$	$y=\ln\cos x$
19.	$y=\sqrt[7]{x}\ln x$	$y=\ln tg5x$
20.	$y=x\arccos x$	$y=\ln(1+\cos x)$
21.	$y=10^{3-\sin^3 2x}$	$y=e^{tgx}$
22.	$y=\sin(2^x)$	$y=\ln(x^2-3x+7)$
23.	$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$	$y=\ln(x^2+2x)$
24.	$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$
25.	$y=\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)$	$y=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}$

4. Дифференциал функции

4.1. Дифференциал функции
- 4.1.1. Понятие дифференциала функции.
- 4.1.2. Геометрический смысл дифференциала функции.
- 4.1.3. Основные теоремы о дифференциале.
- 4.1.4. Таблицы дифференциалов.
- 4.1.5. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.
- 4.1.6. Дифференциалы высших порядков.

4.2. Исследование функций с помощью производных.
- 4.2.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях.
- 4.2.2. Правило Лопиталя.
- 4.2.3. Возрастание и убывание функций.
- 4.2.4. Максимум и минимум функций.
- 4.2.5. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
- 4.2.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
- 4.2.7. Асимптоты графика функции.
- 4.2.8. Общая схема исследования функции и построение графика.

4.3. Формула Тейлора.
- 4.3.1. Формула Тейлора для многочлена.
- 4.3.2. Формула Тейлора для произвольной функции.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

2. Как можно объяснить, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

3. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?

4. В чем заключается необходимый и достаточный признак экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функций с помощью первой производной.

5. Как отыскивают экстремумы функций с помощью второй производной?

6. В чем разница между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее набольшего и наименьшего значений?

7. Как определяется выпуклость и вогнутость функции?

8. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования?

Индивидуальные задания

4.1. Найти пределы, используя правило Лопиталя

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x - x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x\ln(x-1))$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx\ln x)$;

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2})$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x)$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$;

14. $\lim\limits_{x\to +\infty}xe^{-x}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$;

16. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$;

17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

18. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x ctgx)$;

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sec x - tgx)$;

22. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$;

23. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a^x}{x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$;

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$

Методические рекомендации по выполнению тестовых заданий

Как и любая другая форма подготовки к контролю знаний, тестирование имеет ряд особенностей, знание которых помогает успешно выполнить тест. Можно дать следующие методические рекомендации:

• Прежде всего, следует внимательно изучить структуру теста, оценить объем времени, выделяемого на данный тест, увидеть, какого типа задания в нем содержатся. Это поможет настроиться на работу.

• Лучше начинать отвечать на те вопросы, в правильности решения которых нет сомнений, пока не останавливаясь на тех, которые могут вызвать долгие раздумья. Это позволит успокоиться и сосредоточиться на выполнении более трудных вопросов.

• Очень важно всегда внимательно читать задания до конца, не пытаясь понять условия «по первым словам» или выполнив подобные задания в предыдущих тестированиях. Такая спешка нередко приводит к досадным ошибкам в самых легких вопросах.

• Если Вы не знаете ответа на вопрос или не уверены в правильности, следует пропустить его и отметить, чтобы потом к нему вернуться.

• Психологи также советуют думать только о текущем задании. Как правило, задания в тестах не связаны друг с другом непосредственно, поэтому необходимо концентрироваться на данном вопросе и находить решения, подходящие именно к нему. Кроме того, выполнение этой рекомендации даст еще один психологический эффект – позволит забыть о неудаче в ответе на предыдущий вопрос, если таковая имела место.

• Многие задания можно быстрее решить, если не искать сразу правильный вариант ответа, а последовательно исключать те, которые явно не подходят. Метод исключения позволяет в итоге сконцентрировать внимание на одном-двух вероятных вариантах.

• Рассчитывать выполнение заданий нужно всегда так, чтобы осталось время на проверку и доработку (примерно 1/3-1/4 запланированного времени). Тогда вероятность описок сводится к нулю и имеется время, чтобы набрать максимум баллов на легких заданиях и сосредоточиться на решении более трудных, которые вначале пришлось пропустить.

• Процесс угадывания правильных ответов желательно свести к минимуму, так как это чревато тем, что студент забудет о главном: умении использовать имеющиеся накопленные в учебном процессе знания, и будет надеяться на удачу. Если уверенности в правильности ответа нет, но интуитивно появляется предпочтение, то психологи рекомендуют доверять интуиции, которая считается проявлением глубинных знаний и опыта, находящихся на уровне подсознания.

При подготовке к тесту не следует просто заучивать, необходимо понять логику изложенного материала. Этому немало способствует составление развернутого плана, таблиц, схем, внимательное изучение исторических карт. Большую помощь оказывают опубликованные сборники тестов, позволяющие, во-первых, закрепить знания, во-вторых, приобрести соответствующие психологические навыки саморегуляции и самоконтроля. Именно такие навыки не только повышают эффективность подготовки, позволяют более успешно вести себя во время экзамена, но и вообще способствуют развитию навыков мыслительной работы. Поэтому целесообразно перед тестированием разобрать типовой тест по дисциплине.

ТИПОВЫЕ ТЕСТЫ

1.1. Если функция непрерывна в каждой точке промежутка, то эту функцию называют:

1. непрерывной в точке x_o справа;
2. непрерывной в точке x_o слева;
3. непрерывной на промежутке;
4. разрывом второго рода.

1.2. Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется:

1. точкой надрыва;
2. точкой разрыва;
3. точка перегиба;
4. точка перелома.

1.3. Строго монотонными функциями называются:

1. убывающие и возрастающие;
2. убывающие и неубывающие;
3. возрастающие и невозрастающие;
4. убывающие, возрастающие, неубывающие и невозрастающие.

1.4. Из перечисленных функций: а) $y = 7^x + 2$; б) $y = tg^3 \dfrac{x}{2}$; в) $y = 3x^5$; г) $y = 2^{x-2}$; д) $y = x^{-1}$ показательными являются:

1. а и г;
2. б и в;
3. в и г;
4. а и д.

1.5. Для функции $y = 5\sqrt{x}$ обратной является функция:

1. $x = 25y^2$;
2. $x = 5y^2$;
3. $x = 5\sqrt{y}$;
4. $y = \dfrac{x^2}{25}$.

1.6. Из перечисленных функций: а) $y = x^5 \sin x$; б) $y = 2tg\dfrac{x}{2}$;

с) $y = x^3 - 3x$; д) $y = \dfrac{x^3}{(x^5+2)}$; е) $y = x^{-2}\cos x$ нечетными являются:

1. а, д;
2. д, е;
3. б, с;
4. б, д, е.

1.7. Для функции $y = 3x - 1$ обратной является функция:

1. $x = \dfrac{y+1}{3}$;
2. $x = 3y + 1$;
3. $x = y + \dfrac{1}{3}$;
4. $x = 3(y+1)$.

1.8. Значение функции $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ равно:

1. 0;
2. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
4. $\sqrt{3}$.

1.9. Из перечисленных функций: 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = \lg x$; 3) $y = \dfrac{7}{x}$; 4) $y = -x^2$; 5) $y = 3$ возрастают на промежутке $(1;3)$:

1. 2; 4;
2. 1; 2;
3. 4; 5;
4. 1; 3.

1.10. Даны функции $\sin x, \cos x, x^2, x^3$. Из них четными являются:

1. 4; 2. 1; 3. 2;3; 4. 1; 4.

1.11. Интервалами монотонности функции $y = |x|$ будут:

1. $(-\infty;0)$ – убывает, $(0;+\infty)$ – возрастает; 2. один интервал $(-\infty;0)$;
3. $(-\infty;\infty)$ – возрастает; 4. $(0;+\infty)$ – возрастает.

1.12. Какая из перечисленных функций является нечетной:

1. $y = -3x^4$; 2. $y = 3/x$; 3. $y = 3x^2 + 7$; 4. $y = 3^x + 3^{-x}$.

1.13. Функция, обратная данной $y = 2x + 3, x \in [-1,5;1]$, имеет вид $y = 0,5x - 1,5$ с областью определения:

1. $x \in [-1,5;1,5]$; 2. $x \in [0;1,5]$; 3. $x \in [-1,5;3]$; 4. $x \in [0;5]$.

1.14. Установите соответствие между периодической функцией и значением ее периода: 1. $y = \cos \pi x$; 2. $y = tg\dfrac{3\pi x}{2}$; 3. $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$.

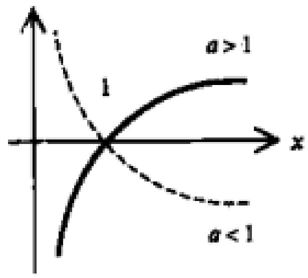
1. 4; 2. 2/3; 3. 2; 4. π.

1.15. Установите соответствие между функцией и ее областью определения.

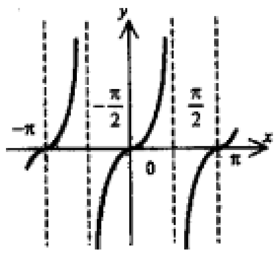
Функция	Область определения
1. $y = \dfrac{x}{x-2}$	А. $D(y) = [-1;1]$
2. $y = \dfrac{x^2 - 3}{e^x}$	Б. $D(y) = (0;+\infty)$
3. $y = \arcsin(x)$	В. $D(y) = (-\infty;+\infty)$
4. $y = \ln(x)$	Г. $D(y) = (1;+\infty)$
	Д. $D(y) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$

1.16. Установите соответствие между функцией и ее графиком:

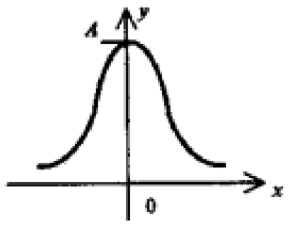
1) $y = tg\,x$; 2) $y = Ae^{ax^2}$; 3) $y = \sin x$; 4) $y = \log_a x \,(a > 0)$.



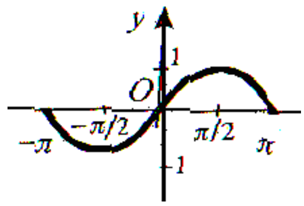
A)



B)



C)



D)

1.17. Кто ввел дельта-функцию?

1.Дирак; 2. Фурье; 3. Соболев; 4. Лейбниц.

1.18. Область определения функции $y=\frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$ имеет вид:
1. $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2)$; 2. $x\in(-\infty;1)\cup(1;2)$; 3. $x\in(2;+\infty)$; 4. $x\in(-1;+\infty)$.

1.19. Область определения функции $y=\frac{\cos x}{\sin x-1}$ имеет вид:
1. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 2. $x\neq 2\pi n, n\in Z$; 3. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; 4. $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

1.20. Пусть $f(x)=tgx$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ четна, если функция $g(x)$ задается формулами (указать несколько вариантов):
1. $g(x)=3^x$; 2. $g(x)=x+3$; 3. $g(x)=6x^2$; 4. $g(x)=\frac{3}{x^4+2}$.

1.21. Установите соответствие между периодической функцией и значением ее периода: а) $y=\cos 2\pi x$; б) $y=ctg\frac{2\pi x}{3}$; в) $y=\sin\frac{\pi}{3}x$:
1. 3/2; 2. 1/3; 3. ½; 4. 1; 5. 6.

1.22. Установите область значений функции $y=2x-7$ при изменении аргумента на отрезке $[-3;0]$.
1. $[-6;-3]$; 2. $[-13;-6]$; 3. $[-13;-7]$; 4. $[-13;0]$.

1.23. Наименьшее значение функции $y=e^{1-x^2}$ на отрезке $[-1;1]$ равно _______ (дополните утверждение).

1.24. Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ нечетна, если функция $g(x)$ задается формулами (указать несколько вариантов):
1. $g(x)=x^4$; 2. $g(x)=6x$; 3. $g(x)=x^5$; 4. $g(x)=3x^2-1$.

1.25. Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ четна, если функция $g(x)$ задается формулами (указать несколько вариантов):
1. $g(x)=x-1$; 2. $g(x)=5x^2+7$; 3. $g(x)=3^x$; 4. $g(x)=\frac{3}{x^4}+2$.

1.26. Найдите область определения функции $y=x^3+1$.
1. $[-\infty;+\infty]$; 2. $[-\infty;0)\cap(0;+\infty]$; 3. $[1;+\infty]$; 4. $[-\infty;0)$.

1.27. Область определения линейной функции – множество всех ____________ чисел. (дополните утверждение)

1.28. Функция $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c - постоянные величины, $a\neq 0$) называется ____________ (дополните утверждение).

1.29. Существуют три способа задания графиков функций: словесный, аналитический и ________________ (дополните утверждение).

1.30. Областью определения линейной функции является:
1. множество всех рациональных чисел;

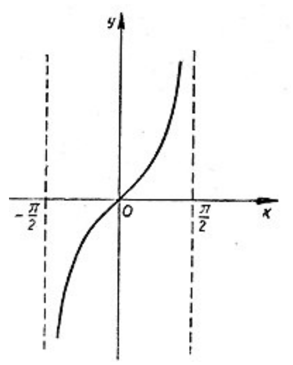
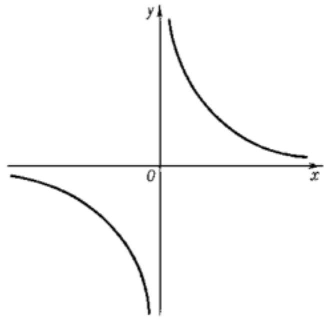
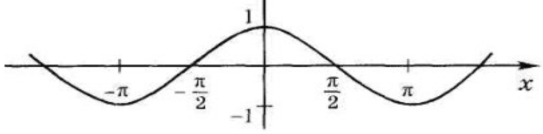
2. множество всех натуральных чисел;
3. множество всех действительных чисел;
4. множество иррациональных чисел.

1.31. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке:
1. $\left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ при $a > 0$, $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$ при $a < 0$;
2. $\left[\frac{-b}{2a}; -\infty\right)$ при $a > 0$, $[0; +\infty)$ при $a < 0$;
3. $(-\infty; -b]$ при $a > 0$, $[-b; +\infty)$ при $a < 0$;
4. $(-1; \infty)$ при $a > 0$, $(1; +\infty)$ при $a < 0$.

1.32. Степенной функцией называется функция вида:
1. $y = \sin x$; 2. $y = a^x$; 3. $y = x^a$; 4. $y = tgx$.

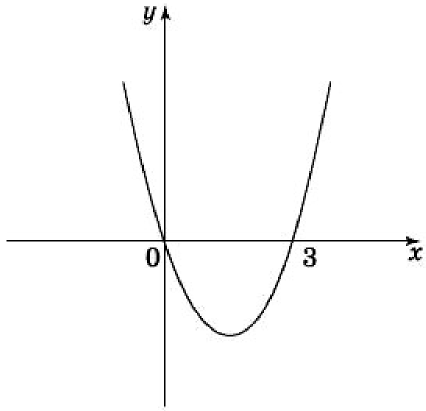
1.33. Если для любого значения x, взятого из области определения функции $f(x)$, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$, то функция называется:
1. периодической; 2. нечетной; 3. монотонной; 4. четной.

1.34. Установите соответствие между функцией и её графиком.

Функция	График
1) $y = \frac{1}{x}$	а) 
2) $y = \cos x$	б) 
3) $y = tgx$	в) 

4) $y = x^2 - 3x$

г)



1.35. Впервые понятие функции было введено в (укажите вариант ответа) году:

1. 1755; 2. 1748; 3. 1718; 4. 1637.