МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Теория функций действительного переменного

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе лекционных занятий необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Тема	Рассматриваемые вопросы
1	Мощность множества	Понятие о множестве. Операции над множествами. Взаимно-однозначное соответствие и равномощность бесконечных множеств. Счетные множества. Множества мощности континуума.
2	Строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой.	Предельная точка множества. Необходимое и достаточное условия существования предельной точки множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Замкнутые, плотные в себе, совершенные множества. Внутренние точки и открытые множества. Структура открытых и замкнутых множеств. Канторовы множества P_o и Q_o.
3	Мера Лебега на числовой прямой	Мера интервала. Мера непустого ограниченного открытого множества на числовой прямой. Мера ограниченного замкнутого множества на числовой прямой. Внешняя и

		внутренняя меры ограниченного множества. Измеримые множества (по Лебегу) и их свойства. Класс измеримых множеств. Существование неизмеримых ограниченных множеств
4	Функции, измеримые по Лебегу, интеграл Лебега	Определение и свойства измеримой функции. Теорема Вейерштрасса. Определение интеграла Лебега. Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Восстановление первообразной функции.
5	Метрические пространства	Метрические пространства. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства.
6	Пространство функций, суммируемых с квадратом	Суммируемые функции. Пространство функций, суммируемых с квадратом (L_2). Скалярное произведение, норма и метрика в (L_2). Ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Связь $L_2(a;b)$ с пространством последовательностей, суммируемых с квадратом.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим/лабораторным занятиям

№	Тема занятий	Рассматриваемые вопросы
1	Мощность множества	Понятие о множестве. Операции над множествами. Взаимно-однозначное соответствие и равномощность бесконечных множеств. Счетные множества. Множества мощности континуума.
2	Строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой.	Предельная точка множества. Необходимое и достаточное условия существования предельной точки множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Замкнутые, плотные в себе, совершенные множества. Внутренние точки и открытые множества. Структура открытых и замкнутых множеств. Канторовы множества P_o и Q_o.
3	Мера Лебега на числовой прямой	Мера интервала. Мера непустого ограниченного открытого множества на числовой прямой. Мера ограниченного замкнутого множества на числовой прямой. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Измеримые множества (по Лебегу) и их свойства. Класс измеримых множеств. Существование неизмеримых ограниченных множеств
4	Функции, измеримые по Лебегу, интеграл Лебега	Определение и свойства измеримой функции. Теорема Вейерштрасса. Определение интеграла Лебега. Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Восстановление первообразной функции.
5	Метрические пространства	Метрические пространства. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства.
6	Пространство функций, суммируемых с квадратом	Суммируемые функции. Пространство функций, суммируемых с квадратом (L_2). Скалярное произведение, норма и метрика в (L_2). Ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве. Связь $L_2(a;b)$ с пространством последовательностей, суммируемых с квадратом.

Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

Перечень вопросов к экзамену по дисциплине ТФДП

1. Взаимно-однозначное соответствие и равномощность конечных множеств. Понятие мощности множества. Конечные, бесконечные и счетные множества (опр.). Примеры. Представимость счетного множества в форме числовой последовательности.
2. Существование счетного подмножества у бесконечного множества. Счетность бесконечного подмножества счетного множества.

3. Мощность суммы счетного и конечного множеств. Мощность счетной суммы конечных множеств. Мощность счетной суммы счетных множеств.

4. Счетность множества рациональных чисел. Следствие. Мощности суммы бесконечного и не более чем счетного множества.

5. Несчетность множества [0,1]. Множество мощности континуум. Континуальность [a,b], (a,b], [a,b), (a,b).

6. Мощность конечной и счетной суммы попарно не пересекающихся континуальных множеств.

7. Мощность множества $\{a_{x,y,\dots,z} | x\in X, y\in Y, \dots, z\in Z\}$, где X, Y, … , Z – континуальные множества. Следствия.

8. Сравнение мощностей, сравнение мощности множества с мощностью всех его подмножеств. Мощность множества всех последовательностей натуральных чисел. Существование множеств сколь угодно высокой мощности.

9. Предельная точка множества. Изолированная точка множества. Примеры. Свойства предельной точки множества.

10. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки бесконечного ограниченного множества.

11. Определение производного множества, замкнутого множества, плотного в себе множества, совершенного множества, замыкания множества. Примеры.

12. Производное множество суммы множеств. Необходимое и достаточное условие замкнутости множества. Замкнутость суммы и пересечения замкнутых множеств.

13. Внутренняя, внешняя и граничная точки множества. Открытое множество. Примеры.

14. Сумма и пересечение открытых множеств.

15. Дополнение множества. Связь замкнутости и открытости дополнения множества с замкнутостью и открытостью самого множества. Дополнение открытого множества до отрезка и дополнение замкнутого множества до интервала.

16. Составляющий интервал. Свойства составляющих интервалов. Структура открытого множества. Структура замкнутого множества и совершенного множества. Канторовы множества.

17. Мера интервала, открытого ограниченного множества. Мера открытого ограниченного множества, как точная нижняя грань мер открытых множеств, его содержащих. Мера множества $G = \sum_k G_k$.

18. Мера ограниченного замкнутого множества, как точная верхняя грань мер замкнутых подмножеств. Определение меры интервала и меры ограниченного замкнутого множества. Мера канторовых множеств G_0, P_0.

19. Внешняя и внутренняя меры множества. Внешняя и внутренняя меры открытых и замкнутых множеств. Соотношение между внутренней и внешней мерами для произвольного множества.

20. Измеримые множества по Лебегу. Измеримость конечной или счетной суммы измеримых множеств. Измеримость пересечения конечного или счетного множества измеримых множеств.

21. Мера суммы $E_1+E_2+\dots+E_n+\dots$ измеримых множеств в случае $E_1\subseteq E_2\subseteq\dots\subseteq E_n\subseteq\dots$Мера пересечения измеримых множеств E_1, E_2, … , E_n, … в случае $E_1\supseteq E_2\supseteq\dots\supseteq E_n\supseteq\dots$

22. Измеримая функция. Измеримость функции на измеримом подмножестве измеримого множества. Измеримость функции, тождественно равной константе. Измеримость функции на множестве нулевой меры.

23. Измеримость эквивалентных функций. Измеримость ступенчатой функции. Измеримость множеств $\{x\in M \mid f(x)\geq a\}$, $\{x\in M \mid f(x)\leq a\}$, $\{x\in M \mid f(x)<a\}$ для

измеримой на множестве M функции f.Измеримость функции f(x)+к, к·f(x), |f(x)| и $(f(x))^2$ для измеримой функции f и константы к. Измеримость суммы, разности, произведения и частного двух измеримых функций. Измеримость предела последовательности измеримых функций.

24. Определение интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции.
25. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Интегрируемость по Лебегу и неинтегрируемость по Риману функции Дирихле.
26. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства.
27. Пространство L_2, его основные свойства.

Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве.

Готовиться к экзамену необходимо последовательно, с учетом контрольных вопросов, разработанных ведущим преподавателем кафедры. Сначала следует определить место каждого контрольного вопроса в соответствующем разделе темы учебной программы, а затем внимательно прочитать и осмыслить рекомендованные научные работы, соответствующие разделы рекомендованных учебников. При этом полезно делать хотя бы самые краткие выписки и заметки. Работу над темой можно считать завершенной, если вы сможете ответить на все контрольные вопросы и дать определение понятий по изучаемой теме.

Для обеспечения полноты ответа на контрольные вопросы и лучшего запоминания теоретического материала рекомендуется составлять план ответа на контрольный вопрос. Это позволит сэкономить время для подготовки непосредственно перед экзаменом за счет обращения не к литературе, а к своим записям.

При подготовке необходимо выявлять наиболее сложные вопросы, с тем, чтобы обсудить их с преподавателем на лекциях и консультациях.

Нельзя ограничивать подготовку к экзамену простым повторением изученного материала. Необходимо углубить и расширить ранее приобретенные знания за счет новых идей и положений.

Комплект идивидуальных заданий по дисциплине Теория функций действительного переменного

Индивидуальное задание выдается по блокам, номер варианта задания совпадает с номером задачи и порядковым номером студента в списке учебной группы.

№1

1. Записать символически: множество всех общих кратных натуральных чисел a,b; множество всех действительных чисел, квадрат которых меньше 2.
2. Записать следующие множества с помощью перечисления элементов или $\varnothing$: $M_1=\{x \in N | x < 6\}$, $M_2=\{x \in N | x < 0\}$, $M_3=\{x \in Z | |x| \le 2\}$, $M_4=\{x \in N | (x \vdots 2) \wedge (x \vdots 5) \wedge (x < 35)\}$, $M_5=\{x \in R | (x^2-5)(x^2+3)=0\}$, $M_6=\{x \in R | |x| \le 2\}$, $M_7=\{x \in Z | |x| > 3\}$.
3. Выяснить истинность следующих высказываний: $6 \in \{x \in N | x \vdots 5\}$, $6 \in \{x \in N | (36 \vdots x) \wedge (x > 5)\}$.
4. Установить вид отношения между множествами: $A=\{x | (x=2y) \wedge (y \in N)\}, B=\{x | (x=6y) \wedge (y \in N)\}$.
5. Пусть A-множество всех точек плоскости, у которых ордината положительна, B - множество всех точек плоскости, у которых абсцисса положительна. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \overline{A}, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$.

6. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | x = y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | |x| + |y| \le 1\}$.

7. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | x = -y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \le 1\}$.

8. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 = y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$.

9. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | 0 \le xy\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \ge 1\}$.

10. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | y = -x^2\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | (x+1)^2 + (y+1)^2 \ge 1\}$.

11. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | xy \le 0\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | |x| + |y| \ge 1\}$.

12. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | x \ge y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | 9x^2 + y^2 \le 36\}$.

13. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | x \le y\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | 4x^2 + 9y^2 \ge 36\}$.

14. Опишите множества: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$:
$A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{(x,y) \in R^2 | max\{|x|, |y|\} = 1\}$.

№2

1. Установить, существуют ли множества A,B,C, такие, что для них выполняются следующие условия: $A \cap B \ne \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) \setminus C = \emptyset$.
2. Доказать A$\setminus (A \setminus B) \subset (A \cap B)$
3. Доказать $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
4. Доказать: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. Доказать: $A \subset B \Leftrightarrow X \setminus B \subset X \setminus A$, где *X* – универсальное множество.
6. Доказать: $A \cup B = A \cup (A\Delta B)$
7. Доказать: $A \setminus B = A \cap (A\Delta B)$
8. Доказать или опровергнуть A$\setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
9. Доказать или опровергнуть A$\setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
10. Доказать что если $A\Delta B = A$, то $B = \emptyset$.
11. Установите взаимно-однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством: а) целых чисел; б) всех четных положительных чисел; в) всех четных чисел; г) всех рациональных чисел.
12. Найдите взаимно однозначное отображение: а) отрезка [1; 4] на отрезок [7; 9]; б) отрезка [0; 1] на отрезок [4; 5]; в) отрезка [0; 5] на отрезок [4; 8].
13. Найдите взаимно однозначное отображение: а) интервала (0; 1) на всю числовую прямую; б) интервала (- ∞ ; + ∞) на интервал (0; 1); в) всей числовой прямой на интервал (а; в).
14. Найти взаимно однозначное соответствие между: а) полусегментом [0;1) и полуосью [0; + ∞); б) полусегментом [0; + ∞) и полуосью [0;1); в) полусегментом [а; с) и полуосью [0; + ∞).
15. Построить взаимно однозначное отображение: а) отрезка [0; 1]на интервал (0; 1); б) отрезка [0; 1]на интервал (0; + ∞); в) отрезка [0; 1]на интервал (- ∞; + ∞); г) отрезка [0; 1]на полуинтервал [0; + ∞).
16. Построить взаимно однозначное соответствие окружности радиуса равного 1 на отрезок [0; 1].
17. Установить взаимно однозначное соответствие между окружностью и прямой.
18. Установить взаимно-однозначное соответствие между поверхностью сферы с одной “выколотой” точкой и плоскостью.

19. Построить взаимно однозначное соответствие между единичным кругом с центральной выколотой точкой и дополнением к открытому единичному кругу.

№ 3

1. Доказать, что множество всех окружностей на плоскости, радиусы которых рациональны и координаты центра которых – рациональные числа, есть множество счетное.
2. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества на прямой больше единицы, то это множество конечно или счетно.
3. Определите мощность следующих множеств:

а) множество точек непрерывной кривой $y = f(x), a \leq x \leq b$.

б) множество точек гиперболы;

в) множество точек окружности;

г) множество точек круга;

д) множество точек шара;

е) множество комплексных чисел;

ж) множество попарно неперекрывающихся отрезков прямой.

4. Определите мощность следующих множеств плоскости:

а) множество эллипсов на плоскости, оси которых совпадают с осями координат;

б) множество парабол на плоскости, оси которых параллельны оси координат;

в) множество всех треугольников на плоскости;

г) множество всех четырехугольников на плоскости;

д) множество всех многоугольников на плоскости;

е) множество точек плоскости с рациональными координатами;

ж) множество точек плоскости с иррациональными координатами

з) множество точек плоскости, у которых одна координата рациональная, а другая иррациональная;

и) множество точек плоскости, у которых хотя бы одна координата рациональная.

6. Пусть А и В – два эквивалентных бесконечных множества. Существует ли подмножество А (отличное от А), эквивалентное множеству В?

7. Доказать, что если $A \subset B$ *и* $A \sim A \cup C$, *то* $B \sim B \cup C$.

8. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$ *и* $C \supset A, C \supset B$, *то* $C \setminus A \sim C \setminus B$».

9. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$ *и* $C \subset A, C \subset B$, *то* $A \setminus C \sim B \setminus C$».

10. Верно ли утверждение: «Если $A \sim C$ *и* $B \sim D$ *и* $B \subset A, D \subset C$, *то* $A \setminus B \sim C \setminus D$».

11. Доказать что если $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A)$, *то* $\mu(A) = \mu(B)$.

№ 4

1. Определить: производное множество множества Е, граничное множество множества Е (δЕ), замыкание множества Е ($\bar{E}$), если:

а) Е – множество точек (x; y) таких, что $-1 < x \leq 1, -1 < y \leq 1$.

б) Е – множество точек с рациональными координатами.

в) Е = $A_1 \cap A_2$, где A_1 - окружность с центром в точке с координатами (1;2) и радиусом равным 3, A_2 - окружность с центром в точке с координатами (2;5) и радиусом равным 4.

2. Найдите производное множество, множество δЕ\Е для указанного в условии множества Е.

а) Множество точек прямой вида: $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $(n \in N)$;

б) Множество точек плоскости, которые соответствуют комплексным числам $z_n = (i)^n + \frac{1}{n}, (n \in N)$;

в) множество рациональных чисел отрезка [0;1];

г) множество точек окружностей $x^2 + y^2 = \frac{1}{n}, (n \in N)$;

д) множество точек окружностей $x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{n}, (n \in N)$

е) множество точек прямых x= $\frac{1}{n}, (n \in N)$.

3. Доказать что если множества А и В открыты и $A \cap B = \emptyset$, *то* $\bar{A} \cap B = \emptyset$ *и* $A \cap \bar{B} = \emptyset$ (хотя, возможно что $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$), $\bar{A}$ *и* $\bar{B}$ - замыкания множеств.

4. Доказать что множество внутренних точек множества А (*int* А) принадлежит $\bar{A}$ $(int\,\mathrm{A} \subset \bar{A})$. Привести пример когда эти множества различны.

5. Пусть f(x) – непрерывная функция. Доказать что для любого $a \in R$ *множество точек* $\{x | f(x) = a\}$ замкнуто на числовой прямой.

6. Доказать, что если функция y=f(x) непрерывна, то ее график *E* $= \{(x; y) | y = f(x)\}$ – замкнутое множество на плоскости.

7. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные функции. Доказать что *множество точек* $\{x | f(x) = g(x)\}$ замкнуто на числовой прямой.

8. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные функции. Доказать что *множество точек* $\{x | f(x) \geq g(x)\}$ замкнуто на числовой прямой.

9. Вычислить интеграл Лебега: $\int_0^1 f(x)dx$

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ -1, x \notin Q \end{cases} \text{ где } x \in [0,1]$$

Решение:

f(x) измерима на [0,1] *и ограничена. Действительно,* $|f(x)| < 1$ *при любом* $x \in [0,1]$.

$$X(f > a) = \begin{cases} [0,1], a < -1 \\ Q_{[0,1]}, -1 \leq a < 1 \\ \emptyset, a \geq 1 \end{cases} \text{– измеримо.}$$

Поэтому существует $\int_0^1 f(x)dx$. *f(x)~*(-1) *на [0,1]. Имеем:* $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (-1)dx = -x|_0^1$= *-1*

10. Вычислить интеграл Лебега: $\int_0^1 f(x)dx$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \notin Q \\ x^3, x \in Q \end{cases}$

11. Вычислить интеграл Лебега: $\int_X x^3 dx$; $X = \{1\}$.

12. Вычислить интеграл Лебега: $\int_{Q_0} \frac{sinx}{5^x} dx, Q_0$ – *множество рациональных чисел отрезка* $[2{,}56.7]$.

13. Вычислить интеграл Лебега: $\int_{N_0} \frac{sinx}{5^x} dx, N_0$ – *множество натуральных чисел отрезка* $[2{,}56.7]$.

14. На интервале (1,2) вычислить интеграл Лебега от функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

№ 5

1. Будет ли множество иметь меру Лебега, если его внешняя мера не более нуля?
2. Пусть дано множество состоящее из конечного множества точек. Имеет ли оно меру Лебега?

3. Найти меру Лебега множества а) целых чисел, б) всех четных чисел, в) рациональных чисел, г) множества, состоящего из счетного числа точек.
4. Найти меру Лебега множества иррациональных точек отрезка [0; 1].
5. Определите, измеримо ли множество натуральных чисел?
6. Измеримо ли множество, состоящее из изолированных точек?
7. Измеримы ли заданные множества $E = \bigcup_n E_n$, в случае положительного ответа найдите их меру Лебега: а) $E_n = \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right], n \in N;$ б) $E_n = [0; n], n \in N;$ в) $E_n = \left[n; n + \frac{1}{2^n}\right], n \in N;$ г) $E_n = \left[-\frac{1}{n}; \frac{n}{n+1}\right], n \in N.$
8. Около каждой точки канторова множества описан интервал длины: 0,1 с центром в этой точке. Чему равна мера множества, являющегося объединением всех этих интервалов?
9. Пусть множество E на отрезке [0; 1] имеет меру нуль. Является ли его замыкание также множеством меры нуль?
10. Может ли мера множества быть равной нулю, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку?
11. Функция – f^3 измеримая функция на множестве E, докажите, что функция f также измерима на E.
12. Докажите, что если f^2 - измеримая функция на E, то из этого не следует измеримость функции f на E.
13. Докажите, что если функция f имеет производную во всех точках отрезка [a;b], то эта производная является измеримой функцией на отрезке [a;b].
14. Докажите, что если функция f измерима на любом отрезке [α,β] (a<α<β<b), то она измерима и на всем отрезке [a;b]

Примерная тематика реферативных работ

Реферат - это самостоятельная научно-исследовательская работа студента, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы; приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее. Содержание материала должно быть логичным, изложение материала носит проблемно-поисковый характер. Следует отметить, что самостоятельный выбор студентом темы реферата или направления исследования только приветствуется. Прежде чем выбрать тему реферата, автору необходимо выяснить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить и получить консультацию преподавателя.

1. Точки конденсации. Мощность замкнутого множества.
2. Теорема Витали.
3. Принцип выбора Хелли.
4. Точки плотности аппроксимативная непрерывность.
5. Метризуемость топологических пространств.
6. Компактность в метрических пространствах, теорема Реано.
7. Выпуклые множества в векторных пространствах.
8. Геометрический смысл линейного функционала.
9. Счетно-нормированные пространства.
10. Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве.
11. Второе сопряженное пространство.
12. Ортогональные многочлены.
13. Ортогональные системы Хаара и Радемахера-Уолша.
14. Теорема Фейера.
15. Преобразование Лапласа.