МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Векторная алгебра

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и на самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

Тема. Понятие вектора. Равенство векторов

План

1. *Разные подходы к понятию вектора.*
2. *Ориентация вектора, лежащего на оси.*
3. *Равенство векторов.*
4. *Свободные и закреплённые векторы.*

К понятию вектора существует два подхода: алгебраический (аксиоматический) и геометрический. В алгебре понятие вектора является основным (неопределяемым). Свойства векторов и операций над ними описываются известной системой аксиом векторного пространства.

В геометрии вектор определяется через понятие направленного отрезка.

<u>Определение.</u> Направленным отрезком называется отрезок, у которого указан порядок концов. Два направленных отрезка называются ***эквиполентными***, если их длины равны, они параллельны и одинаково направлены.

Вектором называется класс эквиполентных направленных отрезков.

Каждый отрезок, входящий в этот класс, называется ***представителем вектора***.

<u>Определение</u>. *Длиной* (или **модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

Модуль нулевого вектора равен нулю: $|\vec{0}| = 0$. Более того, нулевой вектор является нулевым элементом относительно сложения векторов.

<u>Определение.</u> Вектор $\vec{b}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$, если:

1) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, т.е. они имеют противоположные направления;

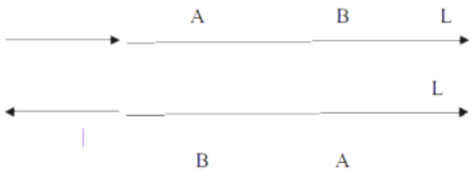
2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ – имеют равные модули.

Обозначение. Вектор противоположный вектору $\vec{a}$ обозначается $-\vec{a}$.

<u>Определение</u>. Два вектора называются ***равными***, если они могут быть совмещены (при совпадении направлений) путём параллельного переноса, т.е. если они параллельны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины.

Ориентация вектора, лежащего на оси. Сонаправленные и противоположно направленные векторы.

Пусть L произвольная ось и вектор $\overrightarrow{AB}$, лежит на оси L. Может быть два случая:



В первом случае начало вектора – точка A предшествует концу вектора, точке B, а во втором случае наоборот, начало вектора следует за его концом.

<u>Определение.</u> Вектор, лежащий на оси, называется *сонаправленным* с осью, если его начало предшествует его концу (конец вектора следует за его началом).

В противном случае говорят, что вектор и ось имеют противоположные направления.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с осью L, то этот факт мы будем обозначать так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow L$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось L имеют противоположные направления, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow L$.

<u>Определение.</u> Вектор $\overrightarrow{AB}$, лежащий на оси L, называется *правоориентированным*, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow L$ и называется *левоориентированным*, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow L$.

На первом рисунке вектор $\overrightarrow{AB}$ правоориентирован на оси L, а на втором рисунке – левоориентирован.

<u>Определение.</u> Два вектора, лежащие на одной прямой называются *сонаправленными*, если при любом выборе положительного направления на этой прямой оба вектора будут иметь одинаковую ориентацию. В противном случае векторы называются *противоположно направленными*.

Обозначение. $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$ – векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправленные, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$ – векторы и $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления (противоположно направлены).

Пусть теперь два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых. Тогда обе прямые лежат в одной плоскости. Проведем секущую AC (Через начала векторов). При этом возможны два случая. Секущая AC, проведенная через начала обоих векторов делит плоскость, в которой лежат обе параллельные прямые a и b, на две полуплоскости. В первом случае концы векторов лежат в одной полуплоскости, а во втором случае – в разных полуплоскостях.

<u>Определение</u>. Два вектора, лежащие на параллельных прямых, называются *сонаправленными*, если их концы лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проведенной через их начала.

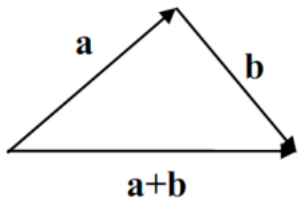
В противном случае говорят, что векторы имеют *противоположные направления* (*противоположно направлены*).

<u>Определение</u>. Пусть a и b две параллельные оси. На каждой оси возьмем по одному правоориентированному вектору. Если эти векторы сонаправленные, то данные оси называются *сонаправленными*. В противном случае говорят, что оси имеют *противоположные направления*.

Обозначения для сонаправленных и противоположно направленных осей такое же, как и для векторов.

В физике часто рассматриваются *закреплённые векторы*, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление в любую точку пространства. В этом случае вектор называется *свободным*. Мы договоримся рассматривать только ***свободные векторы***.

Сложение векторов определяется по правилу треугольника. Затем доказывается , что сумма не зависит от выбора представителей векторов.



Произведением вектора а на число λ называется вектор $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, такой что $|\mathbf{b}|=|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, если $\lambda>0$, и $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$, если $\lambda<0$. В школе геометрически доказываются теоремы (свойства операций):

1). $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

2). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

3). $(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$

4). $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$

5). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\alpha=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$

Тема. Векторное пространство. Подпространство. Сумма и прямая сумма подпространств

План

1. *Определение и свойства линейного (векторного) пространства.*
2. *Подпространства линейного пространства*
3. *Линейная оболочка системы векторов.*

4. Суммы линейных пространств.

5. Изоморфизм линейных пространств.

1. Определение и свойства линейного пространства

Определение. Пусть L есть некоторое непустое множество и P – числовое поле. В L определено действие, называемое *сложением*, согласно которому каждой паре элементов u, $v \in L$ сопоставляется третий элемент из L, обозначаемый через u + v. Также определено действие *умножения элементов из L на числа из P*, согласно которому каждой паре, состоящей из элемента $u \in L$ и числа $\lambda \in P$, сопоставлен элемент из L, обозначаемый через λu.

Если при этом выполнены следующие семь аксиом, то множество L, рассматриваемое вместе с указанными двумя операциями, называется линейным пространством над полем P.

Коммутативность сложения:

$\forall$ u, $v \in L$ u + v = v + u.

2) Ассоциативность сложения:

$\forall$ u, v, $w \in L$ (u + v) + w = u + (v + w).

Обратимость сложения:

$\forall$ u, $v \in L$ всегда найдется такой $x \in L$, что u + x = v

(при этом элемент x называется разностью между v и u и обозначается: x = v - u).

Ассоциативность умножения на числа из P:

$\forall u \in L$ $\forall \lambda, \mu \in P$ $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.

Свойство дистрибутивности относительно сложения чисел из P:

$\forall u \in L$ $\forall \lambda, \mu \in P$ $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

Свойство дистрибутивности относительно сложения элементов из L:

$\forall$ u, $v \in L$ $\forall \lambda \in P$ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Свойство единичного множителя:

для числа $1 \in P$ и $\forall u \in L$ выполнено 1u = u.

Элементы любого линейного пространства будем называть *векторами.*

Примеры.

1. Координатное векторное пространство.

Рассмотрим декартово произведение множества вещественных чисел $V^{(n)} = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n\ раз}$, на котором введены действия сложения и умножения на элемент из R по следующим правилам:

$\forall$ x , $y \in V(n)$ если x = (x1, x2, …, xn) и y = (y1, y2, …, yn), то

1) x + y = (x1 + y1, x2 + y2, …, xn + yn),

2) $\forall \alpha \in R$ $\alpha x = (\alpha x1, \alpha x2, …, \alpha xn)$.

Напомним, что множество V(n) называют n-мерным координатным векторным пространством, а его элементы называют n-мерными векторами или n-векторами.

2. Множество Mm×n всех матриц размерности m×n над полем R.

Введем на множестве Mm×n действия сложения и умножения на элемент из R по следующим правилам:

$\forall$ A, $B \in$ Mm×n если A = (aij)m×n и B = (bij)m×n, то

1) A + B = (aij + bij)m×n,

2) $\forall \alpha \in R$ $\alpha A = (\alpha aij)m×n$.

3. Множество FR всех многочленов произвольной степени от одной переменной над полем R.

Введем на множестве FR действия сложения и умножения на элемент из R по следующим правилам: $\forall$ f(x), $g(x) \in FR$ $\forall \alpha \in R$

1) $\forall x \in C$ (f + g)(x) = f(x) + g(x) ,

2) $\forall\, x \in C \quad (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$.

Следствия из аксиом линейного пространства

Свойство 1.

В произвольном линейном пространстве L существует единственный элемент θ, такой, что $u + \theta = u$ при любом $u \in L$. Элемент θ называется нулевым элементом в L. При необходимости в записи нулевого элемента указывается линейное пространство, относительно которого проводятся рассуждения: $\theta = \theta L$.

Доказательство: Покажем существование нулевого элемента θ. Для произвольного элемента $u\in L$ по аксиоме 3) линейного пространства (для случая $v = u$) существует элемент $y\in L$, такой, что $u + y = u$. Рассмотрим произвольный элемент $w\in L$. По той же аксиоме 3) имеем: $u + t = w$ для некоторого $t\in L$. Тогда, используя аксиомы 1) и 2) из определения линейного пространства, получаем:

$w + y = (u + t) + y = (t + u) + y = t + (u + y) = t + u = u + t = w$.

Таким образом, существует элемент $y\in L$, такой, что $u + y = u$ при любом $u \in L$. Обозначим $\theta = y$.

Проверим единственность θ. Пусть в пространстве L существуют два нулевых элемента $\theta 1$ и $\theta 2$, тогда сумма $\theta 1 + \theta 2$ равна, с одной стороны, элементу $\theta 1$ (если в качестве нулевого считать $\theta 2$), а, с другой стороны, равна $\theta 2$ (если в качестве нулевого считать $\theta 1$), т.е. $\theta 1 = \theta 2$.

Свойство 2.

Для всякого $u \in L$ существует в L единственный элемент, называемый противоположным к u и обозначаемый $-u$, такой что $u + (-u) = \theta$. По отношению к $-u$ элемент u является противоположным, т.е. $u = -(-u)$.

Доказательство: существование такого элемента $-u$ следует из аксиомы 3) линейного пространства (для случая $v = \theta$). Проверим единственность $-u$. Пусть для $u \in L$ существуют два противоположных элемента w1 и w2, тогда $u + w1 = u + w2 = \theta$ и, следовательно, $w1 = w1+\theta = w1+(u+w2) = (w1+u)+w2 = (u+w1)+w2 = \theta+w2 = w2$. Т.е. противоположный элемент для элемента u существует единственный.

Свойство 3.

$0u = \theta$ для любого $u \in L$.

Доказательство: заметим, что для произвольного u выполнено $0u+0u = (0+0)u = 0u$. Тогда $\theta = 0u+(-(0u)) = (0u+0u)+(-(0u)) = 0u+(0u+(-(0u)) = 0u+\theta = 0u$.

Свойство 4.

$\lambda\theta = \theta$ для любого $\lambda \in P$.

Доказательство: рассмотрим произвольный элемент $u \in L$. По свойству 3) имеем $0u = \theta$, тогда для любого $\lambda \in P$ $\lambda\theta = \lambda(0u) = (\lambda 0)u = 0u = \theta$.

Свойство 5.

Если $\lambda u = \theta$ ($u \in L, \lambda \in P$), то $\lambda = 0$ или $u = \theta$.

Доказательство: если $\lambda = 0$, то заключение выполнено. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}\theta$, откуда по аксиоме 4 и свойству 4) получаем $(\frac{1}{\lambda}\lambda)u = \theta$, а значит, $u = \theta$.

Свойство 6.

$(-1)u = -u$ при любом $u \in L$.

Доказательство: Нужно показать, что элемент $(-1)u$ является противоположным к элементу u. Действительно, $(-1)u + u = ((-1) + 1)u = 0u = \theta$, что и требовалось доказать.

Свойство 7.

$-(\alpha x) = (-\alpha)\, x = \alpha(-x)$ при любых $u \in L$, $\alpha \in P$.

2. Подпространства линейного пространства

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P. Непустое подмножество L' пространства L называется *подпространством пространства L*, если выполнены следующие условия:

$\forall$ u, v $\in$ L' u + v $\in$ L',

$\forall$ u $\in$ L' $\forall$ λ $\in$ P λu $\in$ L',

т.е. L' замкнуто относительно сложения и относительно умножения на число.

Свойства подпространств

Свойство 1.

Непустое подмножество N линейного пространства L над полем P является подпространством пространства L тогда и только тогда, когда N является линейным пространством над полем P.

Доказательство: Достаточность следует из определения линейного пространства.

Необходимость. Пусть N – подпространство пространства L; значит, на N определены сложение и умножение на число из поля P. Нужно проверить выполнение на N семи аксиом линейного пространства. Аксиомы 1), 2), 4), 5), 6), 7) очевидно выполняются вследствие включения N$\subset$L. Кроме того, для любых u, v$\in$ N найдется такой x$\in$ N, что u + x = v (в качестве x рассмотрим x = v + (-1)u. Из замкнутости N относительно умножения на число из поля P и относительно сложения получаем, что, действительно, x$\in$ N).

Свойство 2.

Пересечение любой совокупности подпространств линейного пространства L является подпространством L.

Примеры.

1) В любом линейном пространстве L само пространство L является своим подпространством, и подмножество, состоящее из одного нулевого элемента {θ}, также является подпространством L. Эти два подпространства называются тривиальными, или несобственными. Подпространства линейного пространства L, отличные от самого L и от {θ}, называются собственными.

2) В координатном векторном пространстве V(3) = {(a1, a2, a3)| ai $\in$ R, i = 1 $\div$ 3} над полем R множество L' = {(a1, a2, 0) | ai $\in$ R, i = 1 $\div$ 2} является подпространством. Действительно, $\forall$ x , y $\in$ L' если x = (x1, x2, 0) и y = (y1, y2, 0), то x + y = (x1+y1, x2+y2, 0)$\in$ L' и $\forall\alpha$ $\in$ R αx = (αx1, αx2, 0)$\in$ L'.

3) В пространстве Mn×n всех матриц размерности n×n над полем R множество всех верхних треугольных матриц размерности n×n над полем R является подпространством. (Проверьте!)

4) В пространстве FR всех полиномов произвольной степени от одной переменной над полем R множества Lk' = {f(x) $\in$ FR | deg f(x)$\le$k, где k$\in$N} являются подпространствами FR. (Проверьте!)

3. Линейная оболочка

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и M – непустое подмножество L. *Линейной оболочкой множества M*, или подпространством, натянутым на множество M, называется множество, обозначаемое [M], являющееся пересечением всех подпространств пространства L, содержащих M.

Замечание. [M] является наименьшим по включению подпространством пространства L, содержащим M, т.е. любое подпространство пространства L, содержащее M, содержит и [M]. Действительно, по второму свойству подпространств [M] является подпространством пространства L, и M $\subset$ [M] по определению линейной оболочки. Кроме того, если какое-либо подпространство L' пространства L содержит множество M, то L' – это одно из подпространств, пересечением которых является [M], а значит, по определению пересечения $[M] \subset L'$.

Теорема (***о строении линейной оболочки***)

Пусть M – непустое подмножество линейного пространства L над полем P. Тогда $[M] = \{\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_ku_k \mid \lambda_i\in P,\ u_i\in M,\ k\in N\}$.

4. Суммы линейных пространств

Определение. Пусть L_1, L_2 – подпространства линейного пространства L над полем P. *Суммой подпространств* L_1 и L_2 называется множество $L_1+L_2 = \{z = x+y \mid x\in L_1,\ y\in L_2\}$. Если пересечение подпространств L_1 и L_2 состоит только из нулевого элемента θ, то сумма L_1 и L_2 называется прямой и обозначается $L_1 \oplus L_2$.

Предложение 1. Сумма подпространств линейного пространства L над полем P является линейным подпространством L.

Теорема 1. Пусть L – конечномерное линейное пространство над полем P и L_1, L_2 – подпространства L. Тогда

$$\dim (L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim (L_1\cap L_2).$$

Доказательство: Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_d$ – базис $L_1\cap L_2$, дополним $z_1, z_2, \ldots, z_d$ до базиса L_1: $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p$ и до базиса L_2: $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ (это можно сделать согласно теореме 1.1.9). Докажем, что элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ образуют базис L_1+L_2.

1) Покажем, что любой элемент из L_1+L_2 линейно выражается через $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$. Пусть $w \in L_1+L_2$, тогда $w = x+y$, где $x\in L_1$, $y\in L_2$. Но элемент x линейно выражается через базис $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p$ подпространства L_1:

$x = \gamma_1z_1+\gamma_2z_2+\ldots+\gamma_dz_d+\gamma_{d+1}u_1+\ldots+\gamma_{d+p}u_p$ $(\gamma_i\in P,\ i=1\div(d+p))$, а элемент y линейно выражается через базис $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ подпространства L_2:

$y = \mu_1z_1+\mu_2z_2+\ldots+\mu_dz_d+\mu_{d+1}v_1+\ldots+\mu_{d+q}v_q$ $(\mu_i\in P,\ i=1\div(d+q))$.

Тогда получаем, что w линейно выражается через $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$.

2) Покажем, что элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ линейно независимые. Предположим противное, пусть существуют такие числа $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что выполняется равенство

$$\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\ldots+\alpha_dz_d+\beta_1u_1+\ldots+\beta_pu_p+\gamma_1v_1+\ldots+\gamma_qv_q = \theta$$

$(i=1\div d,\ j=1\div p,\ k=1\div q)$. Все β_j $(j=1\div p)$ не могут одновременно равняться нулю, т.к. тогда бы элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ были линейно зависимыми, что невозможно, поскольку они образуют базис подпространства L_2. Аналогично все γ_k $(k=1\div q)$ не могут одновременно равняться нулю. Значит, существует $\beta_{j'} \neq 0$ и существует $\gamma_{k'} \neq 0$.

Тогда получаем

$\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\ldots+\alpha_dz_d+\beta_1u_1+\ldots+\beta_pu_p = (-\gamma_1)v_1 +\ldots+(-\gamma_q)v_q$.

Но элемент $\alpha_1z_1+\alpha_2z_2+\ldots+\alpha_dz_d+\beta_1u_1+\ldots+\beta_pu_p$ принадлежит подпространству L_1, а элемент $(-\gamma_1)v_1+\ldots+(-\gamma_q)v_q$ принадлежит подпространству L_2. Таким образом, мы имеем элемент, принадлежащий одновременно L_1 и L_2, т.е. принадлежащий пересечению $L_1\cap L_2$. Значит, этот элемент линейно выражается через базис $L_1\cap L_2$:

$(-\gamma_1)v_1+ \ldots+(-\gamma_q)v_q = \delta_1z_1+\delta_2z_2+ \ldots+\delta_dz_d$

для некоторых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_d \in P$. Откуда получаем

$\delta_1z_1+\delta_2z_2+\ldots+\delta_dz_d+\gamma_1v_1+\ldots+\gamma_qv_q = \theta$ $(\gamma_{k'} \neq 0)$,

т.е. элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ линейно зависимые, что невозможно. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ являются линейно независимыми.

Следствие. Размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей этих подпространств.

Пример. Рассмотрим в пространстве V(3) подпространства $L1 = \{(a1, a2, 0) \mid ai \in R, \quad i = 1, 2\}$ и $L2 = \{(0, b2, b3) \mid bi \in R, \quad i = 2, 3\}$ (см. пример 1.2.2). $L1 \cap L2 = \{(0, d, 0) \mid d \in R\}$. $\dim L1 = 2$, $\dim L2 = 2$, $\dim (L1 \cap L2) = 1$. Тогда $\dim (L1+L2) = 3$.

Замечание. Если $\{e1, e2, \ldots, en\}$ – базис линейного пространства L над полем P, то L можно рассматривать как прямую сумму подпространств $[ei] = \{\lambda ei \mid \forall \lambda \in P\}$, т.е. $L = [e1] \oplus [e2] \oplus \ldots \oplus [en]$.

Теорема 2. Пусть L1, L2 – подпространства линейного пространства L над полем P. Тогда L представимо в виде прямой суммы подпространств L1 и L2 тогда и только тогда, когда любой вектор $w \in L$ представим в виде $w = v1+v2$ (где $vi \in Li$, $i=1, 2$) единственным образом.

Доказательство: *Необходимость*. Пусть $L = L1 \oplus L2$, тогда $L1 \cap L2 = \{\theta\}$. Предположим, что существует элемент $w \in L$, который представим в виде суммы элементов из L1 и L2 двумя способами: $w = x1+y1$ и $w = x2+y2$ (где $xi \in L1$, $yi \in L2$, $i=1, 2$). Тогда $x1+y1 = x2+y2$ и $x1-x2 = y2-y1$, левая часть полученного равенства принадлежит подпространству L1, а правая – подпространству L2. Но $L1 \cap L2 = \{\theta\}$, следовательно, $x1-x2 = \theta$ и $y2-y1 = \theta$, а значит, $x1=x2$ и $y2=y1$.

Достаточность. Пусть любой элемент $w \in L$ представим в виде $w = v1+v2$ (где $vi \in Li$, $i=1, 2$) единственным образом, и $L1 \cap L2 \neq \{\theta\}$. Тогда существует элемент $v \in L1 \cap L2$, $v \neq \theta$. Но тогда получаем два различных представления v: $v = v + \theta$ ($v \in L1$, $\theta \in L2$) и $v = \theta + v$ ($\theta \in L1$, $v \in L2$), что противоречит условию.

Изоморфизм линейных пространств

Определение1. Пусть L1, L2 – линейные пространства над полем P. Отображение $\varphi: L1 \to L2$ называется *изоморфизмом линейных пространств*, если выполняются следующие условия:

1) φ – биекция,
2) $\forall\, u, v \in L1 \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,
3) $\forall\, u \in L1\ \forall\, \lambda \in P \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Определение. Пусть L1, L2 – линейные пространства над полем P. L1 и L2 называются изоморфными пространствами, если существует изоморфизм из L1 в L2. Обозначается: $L1 \approx L2$ или $L1 \cong L2$.

Свойства изоморфизма

Свойство 1.

Отношение $\approx$ “быть изоморфными” на множестве линейных пространств над полем P есть отношение эквивалентности.

Замечание. Из свойства 1 следует, что множество всех линейных пространств над некоторым полем P разбивается на классы изоморфных линейных пространств.

Свойство 2.

Изоморфизм линейных пространств L1 и L2 отображает нулевой элемент $\theta 1$ линейного пространства L1 в нулевой элемент $\theta 2$ пространства L2.

Свойство 3.

При изоморфизме линейных пространств образы линейно независимых элементов являются линейно независимыми элементами.

Свойство 4.

Если элементы $u1, \ldots, un$ образуют базис линейного пространства L1 и $\varphi: L1 \to L2$ – изоморфизм, то элементы $\varphi(u1), \ldots, \varphi(un)$ образуют базис линейного пространства L2.

Тема. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Базис и размерность

План

1. *Линейная зависимость и независимость систем векторов.*
2. *Свойства линейной зависимости.*
3. *Базис множества векторов линейного пространства.*
4. *Теорема о базисе. Координаты вектора в заданном базисе.*

1. Линейная зависимость и независимость систем векторов

Определение. Говорят, что вектор v линейного пространства L над полем P ***линейно выражается*** через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in P$, что

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m.$$

Выражение, стоящее в правой части, называют *линейной комбинацией* векторов u1, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta.$$

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ не являются линейно зависимыми между собой, то они называются ***линейно независимыми***. Это означает, что соотношение

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta$$

выполняется **только** при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Теорема 1. Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in$ L (m $\geq$ 2) линейно зависимы, то хотя бы один из них выражается линейно через другие. Если же эти элементы линейно независимы, то ни один из них не может быть выражен линейно через другие.

Доказательство.

1. Предположим, что $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно зависимы. Это означает, что найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta.$

Пусть α_k отличен от нуля. Тогда

$$u_k = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right)u_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)u_{k-1} + \left(-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)u_{k+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_k}\right)u_m.$$

2. Теперь предположим, что $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно независимы. Линейное выражение одного из них через другие в этом случае невозможно, так как из равенства

$$u_k = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{k-1}u_{k-1} + \beta_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \beta_m u_m,$$

очевидно, получилась бы линейная зависимость:

$$\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{k-1}u_{k-1} + (-1)u_k + \beta_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \beta_m u_m = \theta$$

(коэффициент при u_k отличен от нуля).

2. Свойства линейной зависимости

Свойство 1. Система, состоящая из одного элемента u, будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда u является нулевым элементом: $u = \theta$.

Свойство 2. Если вектор v линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m,$$

то, добавляя произвольные векторы $w_1, w_2, \ldots, w_k$ к исходной совокупности элементов, получаем совокупность векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $w_1, w_2, \ldots, w_k$, через которые v тоже линейно выражается.

Свойство 3. Пусть каждый из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно выражается через элементы $v_1, v_2, \ldots, v_k$, а каждый из них в свою очередь линейно выражается через элементы $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Тогда каждый из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно выражается через $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Свойство 4. Пусть элементы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно независимы. Если для какого-нибудь элемента v векторы $v, u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы, то v линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Теорема *(четыре достаточных условия линейной зависимости).*

1) Если среди векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ есть нулевой вектор, то векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы.

2) Если часть векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ линейно зависима, то и все векторы системы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно зависимы.

3) Если каждый из векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ может быть выражен линейно через векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k \in L$, число которых k меньше m, то $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы.

4) Если каждый из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ может быть выражен линейно через элементы $v_1, v_2, \ldots, v_m$, которые между собой линейно зависимы, то и $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

Пусть $m > k$ и

$$\begin{gathered} u_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \ldots + \alpha_{1k}v_k, \\ u_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{2k}v_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = \alpha_{m1}v_1 + \alpha_{m2}v_2 + \ldots + \alpha_{mk}v_k. \end{gathered}$$

Умножим эти равенства соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и сложим их. При этом в качестве $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ возьмем ненулевое решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{m1}\lambda_m = 0, \\ \alpha_{12}\lambda_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{m2}\lambda_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1k}\lambda_1 + \alpha_{2k}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{mk}\lambda_m = 0 \end{gathered}$$

(так как $m > k$, то ненулевое решение существует согласно следствию 3.3.).

При таком выборе чисел λ_i ($i=1\div m$) мы получаем равенство:

$$\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \ldots + \lambda_mu_m = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k = \theta.$$

4. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ линейно зависимы, то по теореме 5.3 один из них, пусть для определенности v_m, выражается линейно через остальные

$$v_m = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_{m-1}v_{m-1}.$$

В линейное выражение векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ через $v_1, v_2, \ldots, v_m$ подставим вместо v_m сумму $\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_{m-1}v_{m-1}$. Сгруппировав слагаемые с одинаковыми v_i, получим систему линейных выражений векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ через $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$. Так как $m > m-1$, то согласно предыдущему пункту отсюда вытекает линейная зависимость $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

3. Базис множества векторов линейного пространства

Определение. Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_r$ из подмножества M линейного пространства L называются *базисом* множества M, если выполняются следующие условия:

1) Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_r$ линейно независимы между собой.

2) Всякий вектор из M может быть линейно выражен через $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

Пример. Покажем, что в координатном векторном пространстве $V^{(n)}$, рассмотренном нами в примере 4.3, один из базисов образуют векторы $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, \ldots, 0)$, …, $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$. Этот базис называется *главным*.

Действительно, пусть $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n=\theta$. Согласно правилам действий с векторами в пространстве $V^{(n)}$ это означает $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)=(0, 0, \ldots, 0)$, т.е. $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Далее, пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in V^{(n)}$. Тогда для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n\in \boldsymbol{R}$ имеет место $x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n=x$.

В частности, в векторном пространстве $V^{(2)}$ (вектора на плоскости) базис образуют вектора $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. В векторном пространстве $V^{(3)}$ (вектора в пространстве) базис образует вектора $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$.

Следует иметь в виду, что в произвольном линейном пространстве не каждое множество имеет базис.

Пример. Покажем, что в линейном пространстве всех бесконечных последовательностей чисел из поля P (множество с бесконечными последовательностями чисел также является линейным пространством аналогично n-мерному координатному пространству) не существует базиса.

Действительно, предположим, что элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ этого линейного пространства образуют базис. Тогда (n + 1) элементов

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0,...),\\ v_2 &= (0,1,0,...),\\ &...\\ v_n &= (\underbrace{0,0,...,0,1}_{n},0,...),\\ v_{n+1} &= (\underbrace{0,0,...,0,1}_{n+1},0,...) \end{aligned},$$

выражающихся линейно через $u_1, u_2, \ldots, u_n$, должны были бы быть согласно 3-ому условию линейной зависимости линейно зависимыми между собой. Однако, если хотя бы одно из чисел $\alpha_i \in P$ отлично от нуля, то

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots +\alpha_{n+1}v_{n+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n+1}, 0, 0,\ldots) \neq$$
$$\neq (0, 0, \ldots, 0, \ldots) = \theta.$$

Заметим, что если в линейном пространстве L базис существует, то их может быть бесконечно много. Вышесказанное иллюстрирует следующая теорема.

Теорема о базисе. Координаты вектора в заданном базисе

Теорема (*о базисах*). Если подмножество M линейного пространства L имеет базисы, то они обладают следующими свойствами:

1. Все базисы M состоят из одного и того же количества векторов.
2. Всякие линейно независимые между собой векторы из M могут быть включены в некоторый базис совокупности M.
3. Всякие линейно независимые между собой элементы из M в количестве, равном числу элементов в базисе, сами образуют базис M.

Доказательство.

1. Пусть системы векторов $u_1, u_2, \ldots, u_r$ и $v_1, v_2, \ldots, v_s$ являются базисами совокупности M. Соотношение $r<s$ невозможно, так как в противном случае по третьему достаточному условию линейной зависимости векторы $v_1, v_2, \ldots, v_s$ должны быть линейно зависимы, как выражающиеся через r (где $r<s$) векторов. Аналогично невозможно $s<r$. Значит, $r=s$.

2. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ – произвольные линейно независимые векторы из M. (Такие совокупности существуют, например: совокупность, состоящая из одного ненулевого вектора.) Будем добавлять векторы $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_m$ так, чтобы векторы совокупности $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_m$ оставались линейно независимыми. Длина такой последовательности ограничена (она не может превышать количества элементов в базисе M). Поэтому среди таких последовательностей

найдутся имеющие максимальную длину, т.е. максимальные линейно независимые системы или базисы.

3. Пусть каждый базис совокупности M состоит из r векторов и $v_1, v_2, \ldots, v_r$ –линейно независимые элементы из M. Из второго условия теоремы следует, что систему $v_1, v_2, \ldots, v_r$ можно дополнить до базиса: $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_m$. Но по первому условию случай $m>r$ невозможен, т.е. $m=r$. А значит, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ – базис M.

Определение. Если подмножество M линейного пространства L обладает базисом, то количество элементов в базисе называется *рангом* M и обозначается rang M.

Если M содержит единственный элемент θ, то ранг M считается равным нулю.

Определение. Если линейное пространство L само обладает рангом (т.е. существуют базисы всего линейного пространства L), то L называется *конечномерным*, а его ранг – *размерностью* L. В соответствии с термином «размерность» употребляют обозначение: dim L = rang L.

Если линейное пространство не имеет ранга, то его называют *бесконечномерным* и говорят, что его размерность бесконечна.

Замечание. Если элемент подмножества линейного пространства линейно выражается через линейно независимые элементы этого подмножества, то такое выражение единственное.

Действительно, предположим противное. Пусть в подмножестве M линейного пространства L над полем P векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно независимы и некоторый вектор $v \in M$ линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_m$ двумя разными способами:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m, \quad (1)$$

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_m u_m, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in P$ и существует $i \in \{1,2,\ldots,m\}$: $\alpha_i \neq \beta_i$. Тогда, рассмотрев разность равенств (1) и (2), получаем

$$(\alpha_1-\beta_1)u_1 + (\alpha_2-\beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha_m-\beta_m)u_m = \theta,$$

причем коэффициент $(\alpha_i-\beta_i)$ отличен от нуля. Следовательно, элементы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются линейно зависимыми, что противоречит условию.

Следствие. Элемент подмножества линейного пространства линейно выражается через базис этого подмножества единственным образом.

Определение. Пусть элементы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ образуют базис подмножества M линейного пространства L над полем P. *Координатами элемента* $v \in M$ *в базисе* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ называются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, с помощью которых v линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_m$, т.е. для которых выполняется равенство

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m.$$

Тема. Линейный оператор. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

План

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора в заданном базисе.

2. Матрицы линейного оператора в разных базисах.

3. Действия с линейными операторами.

4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

5. Ранг и дефект линейного оператора.

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора в заданном базисе

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P. ***Линейным оператором***, или ***линейным преобразованием***, пространства L называется отображение $\varphi: L \to L$, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall u, v \in L \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,

2) $\forall u \in L\ \forall \lambda \in P \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Пример. В координатном векторном пространстве V^2 над полем R преобразование симметрии относительно прямой $y=x$ является линейным оператором. Действительно, симметрия φ относительно прямой $y=x$ в пространстве V^2 действует по правилу: $\varphi((x, y)) = (y, x)$. Тогда для $\forall (x, y), (x', y') \in V^2$ $\varphi((x, y)+(x', y')) = \varphi((x+x', y+y')) = (y+y', x+x') = (y, x)+(y', x') = \varphi((x, y))+\varphi((x', y'))$ и $\varphi(\lambda(x, y)) = \varphi((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda y, \lambda x)) = \lambda(y, x) = \lambda\varphi((x, y))$ для $\forall \lambda \in R$.

Предложение 1. Если в линейном пространстве L над полем P отображение $\varphi: L \to L$ является линейным оператором, то $\varphi(\theta) = \theta$, где θ – нейтральный элемент по сложению в L.

Доказательство: Используем свойство линейных пространств: $0u = \theta$ для любого $u \in L$ (см. §1). Имеем $\varphi(\theta) = \varphi(0u) = 0\varphi(u) = \theta$.

Теорема 1. Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Для произвольных элементов $v_1, \ldots, v_n \in L$ существует и единственный линейный оператор $\varphi: L \to L$, такой, что $v_1=\varphi(u_1), \ldots, v_n=\varphi(u_n)$.

Доказательство: Рассмотрим произвольный элемент $w \in L$, пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$, где $b_i \in P$, $i=1\div n$, тогда положим по определению $\varphi(w) = b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n$.

Проверим, что φ – линейный оператор. Пусть $w, v \in L$ и пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$, $v = c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$, где $b_i, c_i \in P$, $i=1\div n$. Тогда L
$\varphi(w+v) = \varphi((b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n)+(c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n)) =$
$\varphi((b_1+c_1)u_1+(b_2+c_2)u_2+\ldots+(b_n+c_n)u_n) = (b_1+c_1)v_1+(b_2+c_2)v_2+\ldots+(b_n+c_n)v_n =$
$(b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n)+(c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n) = \varphi(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n)+$
$\varphi(c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n) = \varphi(w)+\varphi(v)$. Равенство $\varphi(\lambda w) = \lambda\varphi(w)$ для $\forall \lambda \in P$ проверьте самостоятельно.

Покажем, что $v_i=\varphi(u_i)$ $(i=1\div n)$. Действительно, $u_1 = 1u_1+0u_2+\ldots+0u_n$, тогда $\varphi(u_1) = 1v_1+0v_2+\ldots+0v_n = v_1$ и аналогично для $u_2, \ldots, u_n$.

Таким образом, мы построили линейный оператор, описанный в условии теоремы. Докажем, что такой оператор единственный.

Предположим, что существует ещё линейный оператор $\psi: L \to L$, такой, что $v_1=\psi(u_1), \ldots, v_n=\psi(u_n)$. Покажем, что $\varphi = \psi$, т.е. $\forall w \in L \quad \varphi(w) = \psi(w)$.
$\psi(w) = \psi(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n) = \psi(b_1u_1)+\psi(b_2u_2)+\ldots+\psi(b_nu_n) =$
$b_1\psi(u_1)+b_2\psi(u_2)+\ldots+b_n\psi(u_n) = b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n = \varphi(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n) = \varphi(w)$.

Матрица линейного оператора

Определение. Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис U следующим образом:

$$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n,$$
$$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n,$$

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1\div n$, $j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** φ в базисе U.

Найдем связь между координатами элемента линейного пространства и координатами его образа при преобразовании φ.

<u>Теорема 2.</u> Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и пусть $A_U(\varphi)$ – матрица линейного оператора φ: $L \to L$ в базисе U. Тогда если $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – координаты некоторого элемента $w \in L$ в базисе U, а $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – координаты $\varphi(w)$ в базисе U, то выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_U(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Пусть матрица $A_U(\varphi)$ имеет вид $A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда для $w = c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$ (где $c_i \in P$, $i=1 \div n$) выполнено:
$\varphi(w) = \varphi(c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n) = c_1\varphi(u_1)+c_2\varphi(u_2)+\ldots+c_n\varphi(u_n) =$
$c_1(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n)+c_2(\alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n)+\ldots$
$+c_n(\alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n) = (c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{21}+\ldots+c_n\alpha_{n1})u_1 +$
$(c_1\alpha_{12}+c_2\alpha_{22}+\ldots+c_n\alpha_{n2})u_2 + \ldots +(c_1\alpha_{1n}+c_2\alpha_{2n}+\ldots+c_n\alpha_{nn})u_n$. Поскольку через базис элемент пространства выражается единственным способом, мы имеем следующие равенства:

$$c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{21}+\ldots+c_n\alpha_{n1}=b_1,$$
$$c_1\alpha_{12}+c_2\alpha_{22}+\ldots+c_n\alpha_{n2}=b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_1\alpha_{1n}+c_2\alpha_{2n}+\ldots+c_n\alpha_{nn}=b_n.$$

Полученная система равенств эквивалентна матричному равенству $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_U(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, что и требовалось доказать.

<u>Лемма 1.</u> Пусть A, B – матрицы размерности $n \times n$ над полем P. Если для всех элементов $w=(c_1, c_2, \ldots c_n)$ ($c_i \in P$, $i=1 \div n$) линейного пространства L над полем P выполняется равенство $A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, то $A=B$.

Доказательство: Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ и $B = (b_{ij})_{n\times n}$, тогда, рассмотрев в качестве w элемент $(1,0,0,\ldots,0)$, получаем равенство $A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, откуда имеем $a_{i1} = b_{i1}$ для всех $i=1\div n$. Аналогично, рассматривая в качестве w элементы $(0,1,0,\ldots,0)$, …, $(0,0,0,\ldots,1)$, получим $a_{i2} = b_{i2}$, …, $a_{in} = b_{in}$ для всех $i=1\div n$, т.е. $A=B$.

2. Матрицы линейного оператора в разных базисах

<u>Теорема 3</u>. Пусть в линейном пространстве L над полем P заданы два базиса $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, и пусть S – матрица перехода от базиса U к базису V. Пусть линейный оператор φ: $L \rightarrow L$ в базисе U имеет матрицу $A_U(\varphi)$, а в базисе V – матрицу $A_V(\varphi)$. Тогда

$$A_V(\varphi) = S^{-1}A_U(\varphi)S.$$

Доказательство: Рассмотрим произвольный элемент $w\in L$. Пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$ и $w = c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n$ $(b_i, c_i\in P,\ i=1\div n)$, и пусть $\varphi(w) = \beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_nu_n$ и $\varphi(w) = \gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\ldots+\gamma_nv_n$ $(\beta_i, \gamma_i\in P,\ i=1\div n)$.

Тогда по теореме 1.5.4 получаем:

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=S\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix},$$

а по следствию 1.5.5 получаем:

$$S^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}.$$

По теореме 1.6.7 имеем:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}=A_V(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Далее:

$$S^{-1}A_U(\varphi)\cdot S\cdot\begin{pmatrix}c_1\\\tilde{n}_2\\\vdots\\\tilde{n}_n\end{pmatrix} = S^{-1}A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$S^{-1}A_U(\varphi)\cdot S\cdot\begin{pmatrix}c_1\\\tilde{n}_2\\\vdots\\\tilde{n}_n\end{pmatrix} = A_V(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}.$$

Поскольку полученное равенство выполняется для произвольного $w \in L$, т.е. для произвольной матрицы $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, то по лемме 1.6.8 имеем равенство

$$S^{-1}A_U(\varphi)S = A_V(\varphi),$$

что и требовалось доказать.

3. Действия с линейными операторами

Определим на множестве всех линейных операторов пространства L над полем P действия сложение, умножение на число из поля P и композицию. Пусть φ, ψ – линейные операторы пространства L и $\lambda \in P$, тогда

1) $\boldsymbol{\varphi+\psi}$: $L \to L$ по правилу $\forall u \in L$ $(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u)+\psi(u)$,

2) $\boldsymbol{\lambda\varphi}$: $L \to L$ по правилу $\forall u \in L$ $(\lambda\varphi)(u) = \lambda\varphi(u)$,

3) $\boldsymbol{\varphi\circ\psi}$: $L \to L$ по правилу $\forall u \in L$ $(\varphi\circ\psi)(u) = \varphi(\psi(u))$.

Проверим, что $\varphi+\psi$ является линейным оператором пространства L. Действительно, $\forall u, v \in L$ $(\varphi+\psi)(u+v) = \varphi(u+v)+\psi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)+\psi(u)+\psi(v) = \varphi(u)+\psi(u)+\varphi(v)+\psi(v) = (\varphi+\psi)(u)+(\varphi+\psi)(v)$ и $\forall u \in L$ $\forall \lambda \in P$ $(\varphi+\psi)(\lambda u) = \varphi(\lambda u)+\psi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)+\lambda\psi(u) = \lambda(\varphi(u)+\psi(u)) = \lambda(\varphi+\psi)(u)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, и пусть линейные операторы φ: $L \to L$ и ψ: $L \to L$ в базисе U имеют матрицы $A_U(\varphi)$ и $A_U(\psi)$ соответственно. Тогда имеют место соотношения:

1. $A_U(\varphi+\psi) = A_U(\varphi)+A_U(\psi)$,
2. $A_U(\lambda\varphi) = \lambda A_U(\varphi)$ $(\lambda \in P)$,
3. $A_U(\varphi\circ\psi) = A_U(\varphi)\cdot A_U(\psi)$.

4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Заметим, что если $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица над полем P, то определитель $|A - \lambda E|$ (где E – единичная матрица размерности $n\times n$) является многочленом над полем P относительно переменной λ, принимающей значения из P.

<u>Опрееление</u>. Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица над полем P и $\lambda \in P$. Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а корни данного многочлена называются ***характеристическими числами*** матрицы A.

<u>Предложение 2.</u> Если для матриц A и B выполняется равенство $B = Q^{-1}AQ$, где Q – некоторая матрица, то A и B обладают одинаковыми характеристическими числами.

<u>Доказательство</u>: Составим характеристический многочлен матрицы B:
$|B - \lambda E| = |Q^{-1}AQ - \lambda E| = |Q^{-1}AQ - \lambda EQ^{-1}Q| = |Q^{-1}AQ - \lambda Q^{-1}EQ| =$
$|Q^{-1}AQ - Q^{-1}\lambda EQ| = |Q^{-1}(A - \lambda E)Q| = |Q^{-1}||A - \lambda E||Q| = |A - \lambda E||Q^{-1}||Q| =$
$|A - \lambda E||E| = |A - \lambda E|$.

<u>Замечание</u>. Т.к. для матриц произвольного линейного оператора φ в различных базисах выполняется равенство $A_V(\varphi) = S^{-1}A_U(\varphi)S$ (теорема 1.6.9.), то из предложения 1.7.2. получаем, что все матрицы линейного оператора имеют один и тот же характеристический многочлен и один и тот же набор характеристических чисел. Поэтому характеристический многочлен матрицы линейного оператора можно назвать ***характеристическим многочленом линейного оператора***, а характеристические числа матрицы линейного оператора можно назвать ***характеристическими числами линейного оператора***.

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и φ: $L \to L$ – линейный оператор. Элемент $w \in L$ называется ***собственным вектором*** оператора φ, если $w \neq \theta$ и существует $\lambda \in P$, такое, что $\varphi(w) = \lambda w$. При этом λ называется ***собственным значением*** оператора φ, соответствующим вектору w.

Предложение 3. Пусть L – линейное пространство над полем P и φ: $L \to L$ – линейный оператор. Если w – собственный вектор оператора φ и λ – собственное значение φ, соответствующее вектору w, то для любого $\mu \in P$ $(\mu \neq 0)$ вектор μw является собственным вектором оператора φ, и соответствующее ему собственное значение равно λ.

Доказательство: Пусть $\varphi(w) = \lambda w$. Рассмотрим $\varphi(\mu w) = \mu\varphi(w) = \mu(\lambda w) = (\mu\lambda)w = (\lambda\mu)w = \lambda(\mu w)$.

Теорема 5. Собственными значениями линейного оператора являются его характеристически числа, и только они.

Доказательство: Пусть L – линейное пространство над полем P и пусть линейный оператор φ: $L \to L$ в базисе $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ имеет матрицу $A_U(\varphi) = (a_{ij})_{n\times n}$.

Пусть w – собственный вектор φ и λ – собственное значение φ, т.е. $\varphi(w) = \lambda w$ $(\lambda \in P)$ и $w \neq \theta$. Пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$, $(b_i \in P,\ i=1\div n)$. По теореме 1.6.7. $\varphi(w) = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, значит, $\lambda\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Запишем последнее равенство в виде системы равенств $\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n = \lambda b_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n = \lambda b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + a_{nn}b_n = \lambda b_n \end{cases}$, откуда получаем $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n = 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22}-\lambda)b_2 + \ldots + a_{2n}b_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)b_n = 0 \end{cases}$. Тогда вектор $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ является решением однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$ (*).

Поскольку $w \neq \theta$, то существует $b_i \neq 0$ $(i=1\div n)$, а значит, система (*) имеет ненулевое решение, тогда определитель матрицы системы (*) равен нулю (в противном случае по теореме Крамера существовало бы только одно решение (нулевое)). Таким образом, $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \left|A_{U(\varphi)} - \lambda E\right| = 0$, т.е. λ – характеристическое число φ.

Пусть теперь λ – характеристическое число оператора φ, значит, $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Тогда система линейных уравнений $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$ имеет ненулевое решение, пусть этим решением является вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Тогда $\begin{cases} a_{11}\tilde{n}_1 + a_{12}\tilde{n}_2 + \ldots + a_{1n}\tilde{n}_n = \lambda\tilde{n}_1 \\ a_{21}\tilde{n}_1 + a_{22}\tilde{n}_2 + \ldots + a_{2n}\tilde{n}_n = \lambda\tilde{n}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\tilde{n}_1 + a_{n2}\tilde{n}_2 + \ldots + a_{nn}\tilde{n}_n = \lambda\tilde{n}_n \end{cases}$, т.е.

$A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \tilde{n}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\tilde{n}_1 \\ \lambda\tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \lambda\tilde{n}_n \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \tilde{n}_n \end{pmatrix}$, откуда получаем $\varphi((c_1, c_2, \ldots, c_n)) = \lambda(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Значит, вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – собственный вектор линейного оператора φ, а λ – собственное значение оператора φ.

<u>Замечание</u>. Из теоремы 1.7.6 следует, что для нахождения собственных векторов $w = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ линейного оператора нужно найти характеристические числа λ этого оператора, а затем найти w, решив уравнение $A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \vdots \\ \lambda b_n \end{pmatrix}$, где $A_U(\varphi)$ – матрица оператора в некотором базисе U.

<u>Теорема 6.</u> Собственные векторы линейного оператора, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

<u>Теорема 7.</u> Если матрица линейного оператора φ является диагональной в некотором базисе V, то все элементы базиса V являются собственными векторами оператора φ, а диагональ матрицы составлена из соответствующих этим векторам собственных значений оператора.

Доказательство: Пусть L – линейное пространство над полем P и $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – базис L, в котором матрица линейного оператора $\varphi: L \to L$ диагональная: $A_V(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $\alpha_{ii} \in P$, $i = 1 \div n$. Поскольку в базисе $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ мы имеем $v_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $v_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$, то, учитывая определение 1.6.5 матрицы линейного оператора, получаем:

$$\varphi(v_1) = \alpha_{11} v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n,$$
$$\varphi(v_2) = 0v_1 + \alpha_{22} v_2 + \ldots + 0v_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(v_n) = 0v_1+0v_2+\ldots+\alpha_{nn}v_n.$$

То есть $\varphi(v_1)=\alpha_{11}v_1$, $\varphi(v_2)=\alpha_{22}v_2$, …, $\varphi(v_n)=\alpha_{nn}v_n$. А значит, элементы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются собственными векторами линейного оператора φ, и они соответствуют собственным значениям $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ этого оператора.

5. Ранг и дефект линейного оператора

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. ***Ядром линейного оператора*** φ называется множество (обозначаемое ***Ker φ***) элементов пространства L, образом которых является нулевой элемент θ, *т.е.*

$$Ker\,\varphi = \{u \in L \mid \varphi(u) = \theta\}.$$

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. ***Образом линейного оператора*** φ называется множество (обозначаемое ***Im φ***) элементов пространства L, имеющих прообразы при преобразовании φ, т.е.

$$Im\,\varphi = \{u \in L \mid \exists\, v\in L\ \varphi(v) = u\}.$$

Предложение 4. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Множества $Ker\,\varphi$ и $Im\,\varphi$ являются подпространствами пространства L.

Предложение5. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор.

1) φ является инъективным отображением тогда и только тогда, когда $Ker\,\varphi = \{\theta\}$.

2) φ является сюръективным отображением тогда и только тогда, когда $Im\,\varphi = L$.

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Размерность подпространства $Ker\,\varphi$ (обозначается ***dim Ker φ***) называется ***дефектом оператора*** φ. Размерность подпространства $Im\,\varphi$ (обозначается ***dim Im φ***) называется ***рангом оператора*** φ.

Теорема 8. Ранг линейного оператора равен рангу матрицы этого оператора.

Доказательство: Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ – базис пространства L.

Покажем сначала, что $Im\,\varphi = [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$.

Рассмотрим произвольный элемент $w \in Im\,\varphi$, тогда $w = \varphi(u)$, $u \in L$. Пусть $u = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$ $(b_i \in P,\ i=1\div n)$, тогда $w = \varphi(u) = b_1\varphi(u_1)+b_2\varphi(u_2)+\ldots+b_n\varphi(u_n) \in [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$ (см. теорему 1.2.5). Значит, $Im\,\varphi \subset [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$. С другой стороны, согласно предложению 1.8.4, $Im\,\varphi$ является подпространством пространства L, тогда, поскольку $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n) \in Im\,\varphi$, то $[\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)] \subset Im\,\varphi$. Итак, $Im\,\varphi = [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$.

Следовательно, по теореме 1.2.7 получаем: $dim\,Im\,\varphi = rang\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\}$.

Пусть

$$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n,$$
$$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n,$$

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1 \div n$, $j=1 \div n$. Тогда $rang\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\} =$ $rang\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, но $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = A_U(\varphi)$. Значит, $\dim Im\, \varphi = rang A_U(\varphi)$.

Теорема 9. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Тогда

$$\dim Ker\, \varphi + \dim Im\, \varphi = \dim L.$$

Доказательство: Обозначим $\dim Ker\, \varphi = d$, $\dim Im\, \varphi = r$, $\dim L = n$ и докажем, что $n = d+r$. Рассмотрим базис подпространства $Im\, \varphi$: $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Тогда по определению $Im\, \varphi$ существуют элементы $u_1, u_2, \ldots, u_r \in L$, такие, что $v_i = \varphi(u_i)$ $(i=1 \div r)$. Покажем, что $u_1, u_2, \ldots, u_r$ линейно независимы. Действительно, рассмотрим равенство $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r = \theta$ $(\alpha_i \in P,\ i=1 \div r)$, тогда $\varphi(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r) = \varphi(\theta) = \theta$, а значит, $\alpha_1\varphi(u_1)+\alpha_2\varphi(u_2)+\ldots+\alpha_r\varphi(u_r) = \theta$, т.е. $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r = \theta$. Но $v_1, v_2, \ldots, v_r$ линейно независимы (как базис $Im\, \varphi$), следовательно, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0$, т.е. $u_1, u_2, \ldots, u_r$ линейно независимы.

Далее, рассмотрим $N = [u_1, u_2, \ldots, u_r]$, заметим, что $\dim N = r$ (см. замечание 1.2.8). Докажем, что $L = N \oplus Ker\, \varphi$ (см. определение 1.3.1).

1) Проверим, что $N \cap Ker\, \varphi = \{\theta\}$. Пусть $w \in N \cap Ker\, \varphi$, тогда (поскольку $w \in N$) $w = \beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_ru_r$. Из того, что $w \in Ker\, \varphi$, получаем $\varphi(w) = \theta$. Значит, $\varphi(\beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_ru_r) = \varphi(\theta)$, тогда, как было показано выше, имеем $\beta_1v_1+\beta_2v_2+\ldots+\beta_rv_r = \theta$ и $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_r=0$. Отсюда $w = 0u_1+0u_2+\ldots+0u_r = \theta$.

2) Проверим, что каждый элемент w пространства L может быть представлен в виде $w = w_1+w_2$, где $w_1 \in N$, $w_2 \in Ker\, \varphi$.

Рассмотрим $\varphi(w) \in Im\, \varphi$, тогда $\varphi(w) = \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r$ $(\alpha_i \in P,\ i=1 \div r)$. Обозначим $w_1 = \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r$, очевидно $w_1 \in N$. Обозначим $w_2 = w - w_1$. Покажем, что $w_2 \in Ker\, \varphi$. Действительно, $\varphi(w_2) = \varphi(w - w_1) = \varphi(w) - \varphi(w_1) =$ $(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) - \varphi(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r) =$ $(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) -$ $(\alpha_1\varphi(u_1)+\alpha_2\varphi(u_2)+\ldots+\alpha_r\varphi(u_r)) = (\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) - (\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) = \theta$, значит, $w_2 \in Ker\, \varphi$. А тогда $w = w_1+w_2$, где $w_1 \in N$, $w_2 \in Ker\, \varphi$.

Итак, $L = N \oplus Ker\, \varphi$. Тогда по следствию 1.3.4 имеем $n = r+d$, что и требовалось доказать.

Определение. Линейный оператор φ линейного пространства L над полем P называется ***невырожденным оператором***, если φ – биективное отображение. В противном случае φ называется ***вырожденным оператором***.

Теорема 10. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:

1) φ – невырожденный оператор,
2) $Ker\, \varphi = \{\theta\}$,
3) $\dim Im\, \varphi = \dim L$,
4) $rang\, A_U(\varphi) = \dim L$, где U – некоторый базис L.
5) $|A_U(\varphi)| \neq 0$.

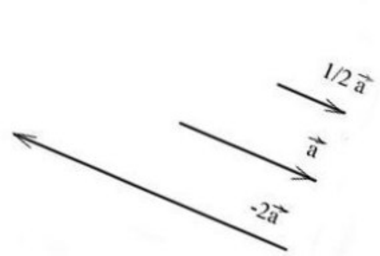
Тема. Операции над векторами

План

1. *Линейные операции над геометрическими векторами.*
2. *Проекция вектора на ось.*
3. *Векторы в пространстве.*

4. *Теорема о разложении вектора по ортам координатных осей.*
5. *Условие коллинеарности векторов в координатах.*
6. *Операции над векторами, заданными в координатной форме.*

Рис. 2



Произведение вектора на число

Определение. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda|>1$) или сжатием (при $|\lambda|>1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda>0$, и меняется на противоположное, если $\lambda<0$. (Рис. 2)

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. (Можно говорить также, что эти векторы параллельны, однако в векторной алгебре принято говорить "коллинеарны".) Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны отношением

$\vec{b}=\lambda\vec{a}$. (1)

Следовательно, равенство (1) выражает условие коллинеарности двух векторов.

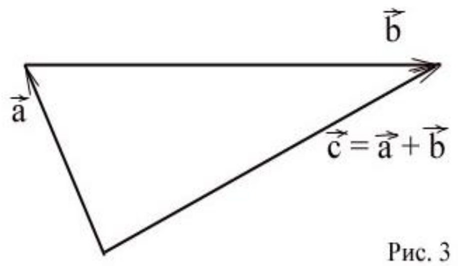


Рис. 3

Сумма векторов

Определение. *Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 3):

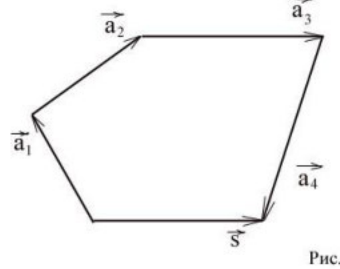


Рис. 4

Это определение может быть распределено на любое конечное число векторов. Пусть в пространстве даны *n* свободных векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$. Если к концу вектора $\vec{a}_1$ приложить начало вектора $\vec{a}_2$, а к концу вектора $\vec{a}_2$- начало вектора $\vec{a}_3$ и т.д. и, наконец, к концу вектора $\vec{a}_{n-1}$ – начало вектора $\vec{a}_n$, то суммой этих векторов служит замыкающий вектор $\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}_1$, а конец - с концом последнего вектора $\vec{a}_n$. (Рис. 4)

Определение. Слагаемые $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называются составляющими вектора $\vec{s}$, а сформулированное правило – *правилом многоугольника*. Этот многоугольник может и не быть плоским.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число -1 получается противоположный вектор $-\vec{a}$. Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ имеют одинаковые длины и противоположные направления. Их сумма $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$ даёт *нулевой вектор*, длина которого равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

Проекция вектора на ось

Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi$$

Как известно, проекцией точки *A* на прямую (плоскость) служит основание A_1 перпендикуляра AA_1, опущенного из этой точки на прямую (плоскость).

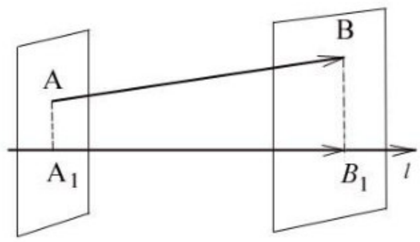


Рис. 5

Пусть $\overrightarrow{AB}$ - произвольный вектор (Рис. 5), а A_1 и B_1- проекции его начала (точки *A*) и конца (точки *B*) на ось *l*. (Для построения проекции точки *A*) на прямую проводим через точку *A* плоскость, перпендикулярную прямой. Пересечение прямой и плоскости определит искомую проекцию.

Определение. *Составляющей вектора* $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ *на оси l* называется такой вектор $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}_l$, лежащий на этой оси, начало которого совпадает с проекцией начала, а конец - с проекцией конца вектора $\overrightarrow{AB}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *l* называется число

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB}=\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|=\pm\left|\vec{a}_l\right|,$$

равное длине составляющего вектора на этой оси, взятое со знаком плюс, если направление составляющей совпадает с направлением оси *l*, и со знаком минус, если эти направления противоположны.

Основные свойства проекций вектора на ось:

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.
2. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число.

3. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций на эту же ось слагаемых векторов.

4. Проекция вектора на ось равна произведению длины проектируемого вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi$$

Векторы в пространстве

Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Определение. Упорядоченная система трёх взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчёта (началом координат) и общей единицей длины называется *прямоугольной декартовой системой координат в пространстве*.

В этой упорядоченной системе координатных осей *0xyz* ось *Ox* называется *осью абсцисс*, ось *0y* – *осью ординат*, и ось *0z* – *осью аппликат*.

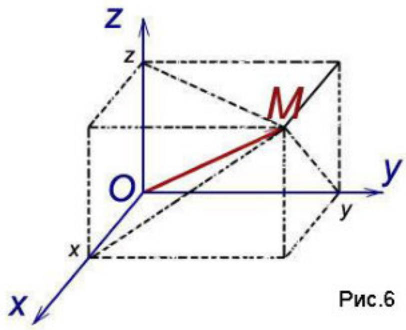


Рис.6

С произвольной точкой *M* пространства свяжем вектор

$\overline{OM}$,

называемый *радиус-вектором* точки *M* и спроецируем его на каждую из координатных осей. Обозначим величины соответствующих проекций:

$$\text{пр}_x\overrightarrow{OM} = x,$$
$$\text{пр}_y\overrightarrow{OM} = y,$$
$$\text{пр}_z\overrightarrow{OM} = z.$$

Числа *x, y, z* называются *координатами точки M* , соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*, и записываются в виде упорядоченной точки чисел: *M (x; y; z)* (рис.6).

Определение. Вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением оси, называют *единичным вектором* (или *ортом*) оси. Обозначим через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Соответственно орты координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*

$(\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1).$

Теорема. Всякий вектор может быть разложен по ортам координатных осей:

$\vec{a} = \overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yi} + \overrightarrow{zk}.$ (2)

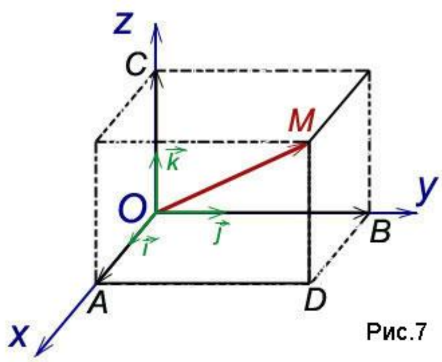


Рис.7

Равенство (2) называется разложением вектора по координатным осям. Коэффициентами этого разложения являются проекции вектора на координатные оси. Таким образом, коэффициентами разложения (2) вектора по координатным осям являются координаты вектора.

После выбора в пространстве определённой системы координат вектор и тройка его координат однозначно определяют друг друга, поэтому вектор может быть записан в форме

$$\vec{a} = (x; y; z). \qquad (3)$$

Представления вектора в виде (2) и (3) тождественны.

Условие коллинеарности векторов в координатах

Как мы уже отмечали, векторы называются коллинеарными, если они связаны отношением

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Пусть даны векторы $\vec{a}\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right),\ \vec{b}\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$. Эти векторы коллинеарны, если координаты векторов связаны отношением

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda,$$

то есть, координаты векторов пропорциональны.

Вследствие взаимной перпендикулярности координатных осей длина вектора

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} = (x; y; z)$$

равна длине диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах

$$x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k},$$

и выражается равенством

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (4)$$

Вектор полностью определяется заданием двух точек (начала и конца), поэтому координаты вектора можно выразить через координаты этих точек.

Пусть в заданной системе координат начало вектора $\vec{a}$ находится в точке

$$A(x_1; y_1; z_1),$$

а конец – в точке

$B(x_2; y_2; z_2)$. **(рис.8).**

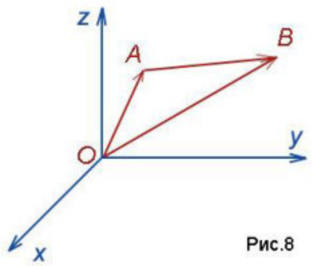


Рис.8

Тогда

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{i} + z_1\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{i} + z_2\vec{k}.$$

Из равенства

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

следует, что

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$$

$$=\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)-\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right).$$

Отсюда

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k},$$

или в координатной форме

$$\vec{a}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1). \quad (5)$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям одноимённых координат конца и начала вектора*. Формула (4) в этом случае примет вид

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (6)$$

Операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданные своими проекциями:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$

или

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),$$

$$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

или

$$\vec{b}=(x_2;y_2;z_2).$$

Укажем действия над этими векторами.

1.Сложение:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1+x_2;\ \ y_1+y_2;\ \ z_1+z_2\right),$$

т.е. при сложении двух векторов одноимённые координаты складываются.

2.Вычитание:

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k},$$

или, что то же

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(x_1-x_2;\ \ y_1-y_2;\ \ z_1-z_2\right),$$

т.е. при вычитании двух векторов одноимённые координаты вычитаются.

3.Умножение вектора на число:

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}+(\lambda z_1)\vec{k},$$

или, что то же

$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda x_1;\ \ \lambda y_1;\ \ \lambda z_1\right),$$

т.е. при умножении вектора на число все координаты умножаются на это число.

Тема. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их свойства

План

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.
2. Векторное произведение векторов и его свойства.
3. Смешанное произведение векторов и его свойства.

<u>Определение.</u> *Скалярным произведением* векторов **a** и **b** называется число $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$.

В декартовой прямоугольной системе координат имеем:
$\mathbf{ab} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Свойства скалярного произведения:
1). $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$
2). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$
3). $(\alpha\mathbf{b})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{ba})$
4). $\mathbf{aa} \geq 0$

Скалярное умножение векторов используется в школьной геометрии при доказательстве теорем и решении задач.

<u>Определение.</u> *Векторным произведением* векторов **a** и **b** называется вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$, удовлетворяющий условиям:
1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$
2. $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$
3. **a,b,c** – правая тройка векторов.

В декартовых прямоугольных координатах:

$$\mathbf{c} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} \qquad (1)$$

(условия 1,2,3 проверяются непосредственными вычислениями).

Свойства:
1). $[\mathbf{ba}] = -[\mathbf{ab}]$
2). $[(k\mathbf{a})\mathbf{b}] = k[\mathbf{ab}]$
3). $[\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})] = [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}]$ - свойства следуют из (1) и свойств определителей.

Геометрический смысл модуля векторного произведения:
$|[\mathbf{ab}]| = 2\,S_\Delta$, где Δ - треугольник, построенный на векторах **a**, **b** (очевидно, из условия 1.)

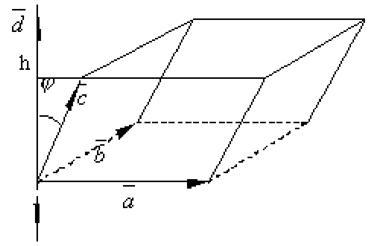
<u>Определение.</u> *Смешанным произведением* трех векторов **a**, **b, c** называется число

<u>Определение</u>. *Смешанным произведением* трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называют число, равное $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Обозначается $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Здесь первые два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ умножается скалярно на третий вектор $\bar{c}$. Очевидно, такое произведение есть некоторое число.

Рассмотрим свойства смешанного произведения.

1. *Геометрический смысл* смешанного произведения. Смешанное произведение 3-х векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах, т.е. $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \pm V_{пар}$.

Таким образом, $V = |(\bar{a}\bar{b}\bar{c})|$ и $V_{пир} = \dfrac{1}{6}|(\bar{a}\bar{b}\bar{c})|$.



<u>Доказательство</u>. Отложим векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ от общего начала и построим на них параллелепипед. Обозначим $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ и заметим, что $|\bar{a} \times \bar{b}| = S_{\bar{a},\bar{b}}$. По определению скалярного произведения

$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cos(\bar{d} \hat{,} \bar{c}) = S_{\bar{a},\bar{b}} |\bar{c}| \cos\varphi$. Предполагая, что $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и обозначив через *h* высоту параллелепипеда, находим $h = |\bar{c}| \cos\varphi$.

Таким образом, при $\varphi < \frac{\pi}{2}$ $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = S_{\bar{a},\bar{b}} h = V.$

Если же $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi < 0, \ h = |\bar{c}| \cos(\pi - \varphi) = -|\bar{c}| \cos\varphi$ и $|\bar{c}| \cos\varphi = -h$. Следовательно, $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = -V$.

Объединяя оба эти случая, получаем $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \pm V$ или $V = |(\bar{a}\bar{b}\bar{c})|$.

Из доказательства этого свойства в частности следует, что если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая, то смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) > 0$, а если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая, то $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) < 0$.

2. Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо равенство $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Доказательство этого свойства следует из свойства 1. Действительно, легко показать, что $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$ и $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \pm V$. Причём знаки "+" и "–" берутся одновременно, т.к. углы между векторами $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}$ и $\bar{a}$ и $\bar{b} \times \bar{c}$ одновременно острые или тупые.

3. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.

Действительно, если рассмотрим смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, то, например, $(\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{a}) \cdot \bar{c} = -(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = -(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ или

$(\bar{c}\bar{b}\bar{a}) = (\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a} = -(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = -\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = (\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = -(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

4. Смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю или векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны.

<u>Доказательство</u>.

1. Предположим, что $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$, т.е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$, тогда $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ или $\bar{c} = 0$ или $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{c}$.

Если $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то $\bar{a} = \bar{0}$ или $\bar{b} = \bar{0}$ или $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Поэтому $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны.

Если $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\bar{c}$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - компланарны.

2. Пусть векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарны и α – плоскость, которой они параллельны , т. е. $\bar{a}\parallel\alpha,\ \bar{b}\parallel\alpha$ и $\bar{c}\parallel\alpha$. Тогда $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\alpha$, а значит $(\bar{a}\times\bar{b})\perp\bar{c}$, поэтому $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=0$ или $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=0$.

Т.о., необходимым и достаточным условием компланарности 3-х векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Кроме того, отсюда следует, что три вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис в пространстве, если $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\neq 0$.

Если векторы заданы в координатной форме $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ \bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},\ \bar{c}=x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k}$, то можно показать, что их смешанное произведение находится по формуле:

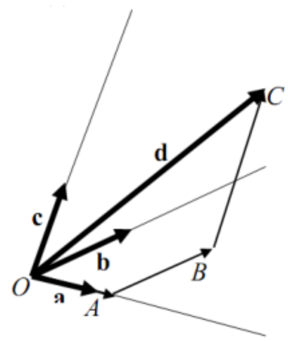
$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Т. о., смешанное произведение $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят координаты первого вектора, во второй строке – координаты второго вектора и в третьей строке – третьего вектора.

***<u>Теорема</u>*.**

В пространстве существуют три линейно независимых вектора, любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Доказательство. Легко видеть, что три некомпланарных вектора линейно независимы. Если даны 4 вектора **a, b, c, d** из которых **a, b, c** линейно независимы (некомпланарны), то вектор **d** можно геометрически разложить по трем данным (см. чертеж).



OA$\parallel$**a** , *AB*$\parallel$**b** , *BC*$\parallel$**c**

d=$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$=α**a**+β**b**+γ**c**

Тема. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии

План

1. Задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскостей.

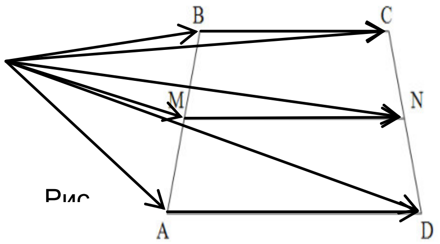
2. Задачи на доказательство деления некоторого отрезка в заданном отношении или на нахождение отношения, в котором точка делит отрезок.

3. Задачи на доказательство или использование принадлежности трёх точек прямой.

Задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскостей

При решении этих задач наиболее часто используется признак коллинеарности двух векторов и единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

Задача 1. Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон, равен половине векторной суммы двух других противолежащих (соотношение 8)



Дано:
ABCD– четырехугольник
M– середина AB
N– середина CD

Доказать:
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Решение.

Пусть *O* – произвольная точка. Согласно соотношению 3
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$
имеем
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

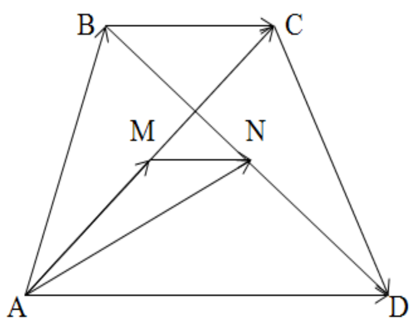


Рис.1

Задача 2. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям.

Дано:
ABCD– трапеция
AC, BD – диагонали
M– середина AC
N– середина BD
Доказать: MN || AD.

Анализ. Покажем, что $MN \parallel AD$. Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$

Решение. Так как *M* и *N* – середины отрезков *AC* и *BD*, то(соотношение 3)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right),$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right).$$

Но $\overrightarrow{BC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$, поэтому $\lambda\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ Тогда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \lambda\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \lambda\right)\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AD},$$

Тогда $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$, что и требовалось доказать.

*Задача 3.*Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и длина ее равна полусумме длин оснований.

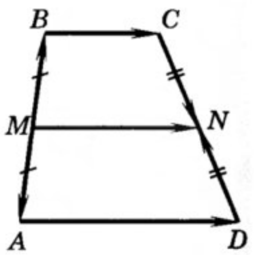


Рис.15.

Дано:

ABCD– трапеция

M– середина AB

N– середина CD

Доказать: $MN \parallel AD$. $MN = \frac{AD + BC}{2}$

Анализ. Для доказательства параллельности достаточно показать, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны

Решение.

1) Согласно рассмотренной задаче 1

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

2) Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ и, значит, $MN \parallel AD$.

3) Так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right| = AD + BC$, поэтому

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

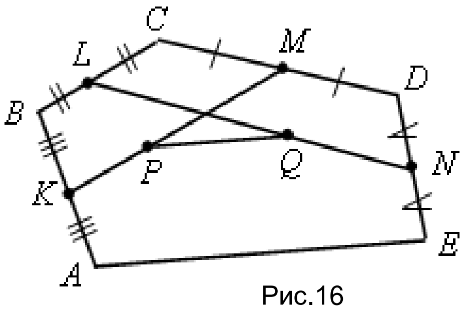


Рис.16

Задача 4. Точки *K*, *L*, *M*, *N* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DE* пятиугольника *ABCDE*, а точки *P* и *Q* – середины отрезков *KM* и *LN*. Докажите, что *PQ* || *AE* и *PQ* = 1/4 *AE*.

Дано:

ABCDE– пятиугольник

K, *L*, *M*, *N* – середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DE*

P и *Q* – середины отрезков *KM* и *LN*

Доказать *PQ* || *AE* и *PQ* = 1/4 *AE*.

Решение.

Пусть *O* – произвольная точка. Согласно соотношению 3

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}).$$

Из этих равенств следует, что

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Отсюда следует, что *PQ* || *AE* и *PQ* = $\frac{1}{4}$ *AE*.

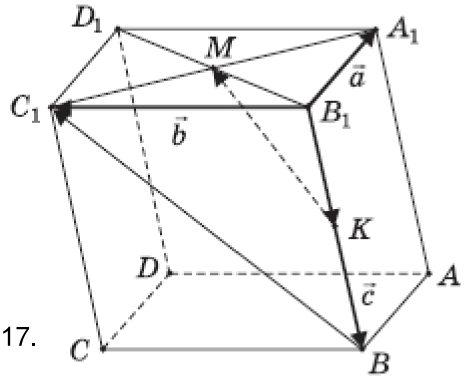


Рис.17.

Задача 5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина диагонали A_1C_1 грани $A_1B_1C_1D_1$, точка K— середина ребра BB_1. Докажите, что прямые A_1B_1, KM и BC_1 параллельны некоторой плоскости.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$– параллелепипед

M— середина диагонали A_1C_1

K— середина ребра BB_1

Доказать A_1B_1, KM и $BC_1 \parallel \gamma$

Решение.

Введем векторы: $\overline{B_1A_1} = \vec{a}, \ \overline{B_1C_1} = \vec{b}, \ \overline{B_1B} = \vec{c}$

Тройку $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ некомпланарных векторов примем в качестве базиса. Разложим векторы $\overline{BC_1}$ и $\overline{KM}$ по векторам этого базиса.

Имеем: $\overline{BC_1} = \overline{B_1C_1} - \overline{B_1B} = \vec{b} - \vec{c};$

$$\overline{KM} = \overline{B_1M} - \overline{B_1K} = 0,5\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - 0,5\vec{c} = 0,5\vec{a} + 0,5b - 0,5\vec{c};$$

$$\overline{B_1A_1} + \overline{BC_1} = \vec{a} + \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow 0,5\left(\overline{B_1A_1} + \overline{BC_1}\right) = 0,5\vec{a} + 0,5\vec{b} - 0,5\vec{c}.$$

$$\overline{KM} = 0,5\left(\overline{B_1A_1} + \overline{BC_1}\right) = 0,5\overline{B_1A_1} + 0,5\overline{BC_1}.$$

Это означает, что векторы $\overline{B_1A_1}, \ \overline{BC_1}$ и $\overline{KM}$ компланарны, следовательно, они параллельны некоторой плоскости γ, тогда этой плоскости параллельны и прямые A_1B_1, KM и BC_1, для которых векторы являются направляющими.

Задачи на доказательство деления некоторого отрезка в заданном отношении или на нахождение отношения, в котором точка делит отрезок

Для того чтобы точка С делила отрезок АВ так, что $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{CB}| = m : n$,

необходимо и достаточно, чтобы для произвольной точки О выполнялось равенство: $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$

Доказательство.

По условию $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{CB}| = m : n$, следовательно $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$. Но

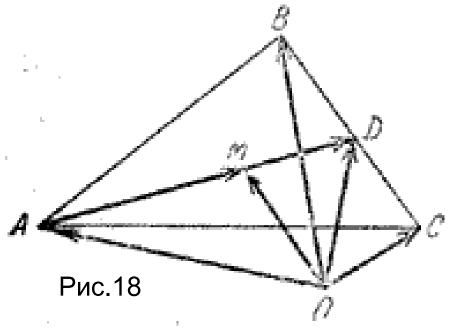


Рис.18

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},$$

$$n(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Задача 6. Доказать, что медианы произвольного треугольника АВС пересекаются в одной точке М такой, что точка М делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Решение.

Пусть точка М делит медиану AD треугольника АВС в отношении 2:1.Тогда по соотношению 2 получаем (m = 2, n = 1)

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OD}$ где О — произвольная точка пространства. Точка D — середина стороны ВС, поэтому, согласно соотношению 3 : $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Тот же результат получится для любой другой медианы треугольника АВС. Это говорит о том, что М — общая точка всех трех медиан.

Практика решения более сложных задач такого типа показала, что работу нужно вести в следующем направлении: постараться разложить один из векторов (чаще всего конец такого вектора – точка, которая делит данный отрезок в заданном отношении) по двум основным векторам (они неколлинеарны) двумя различными способами. Используя единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, установить зависимость между коэффициентами в разложении вектора, что потом дает возможность найти искомое соотношение.

Задача 7. На стороне АС треугольника АВС взята точка М так, что $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$, а на продолжении стороны ВС такая точка N что $|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$. В каком отношении точка Р пересечения АВ и *MN* делит каждый из этих отрезков.

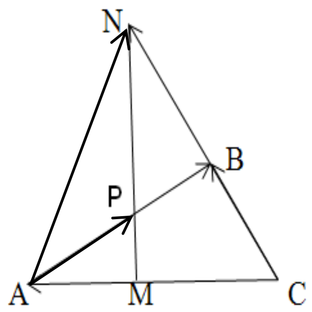


Рис.19.

Дано:

АВС– треугольник

$|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$ $|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$

$N \in BC$

$MN \cap AB = P$

Найти: $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|}, \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$

Решение:

Пусть $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = x$ и $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ =y

Выберем базисные векторы $\overline{CB} = \vec{a}, \overline{CA} = \vec{b}.$

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами

а) $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ =y, тогда $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ *и* $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1} \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \cdot \vec{a} - \frac{y}{y+1} \cdot \vec{b}$$

б) $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{PN}|} = x,\ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{AN}$

Но $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1}\cdot\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{2x}{x+1}\cdot a - \frac{1+4x}{4(x+1)}\cdot b$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам(соотношение 7) , получим систему

$$\begin{cases} y/(y+1) = 2x/(x+1), \\ y/(y+1) = (1+4x)/(4(x+1)), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/4, \\ y = 2/3. \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{\overline{|MP|}}{\overline{|PN|}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{\overline{|AP|}}{\overline{|PB|}} = \frac{2}{3}$

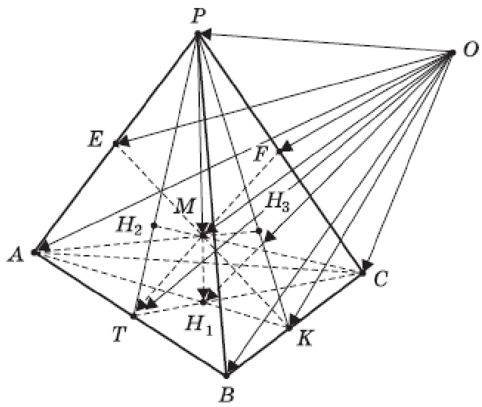


Рис.20.

Задача 8. Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противолежащей грани, называется медианой этого тетраэдра. Докажите что все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и эта точка делит каждую из медиан в отношении 3:1, считая от вершины.

Доказательство.

Пусть H_1, H_2, H_3, H_4 — центроиды граней соответственно ABC, ABP, BCP, ACP; M — точка, делящая медиану PH_1 тетраэдра PABC в отношении $PM:MH_1$ = 3:1.

Тогда $PM : PH_1 = 3 : 4$, откуда $PM = \frac{3}{4}PH_1$. Для любой точки O пространства и центроида H_1 грани ABC выполняется:

$$\overrightarrow{OH_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$ (соотношение 4)

Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PH_1} =$$

$$= \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OH_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Аналогично доказывается, что для точек M_1, M_2 и M_3, делящих медианы соответственно CH_2, AH_3, BH_4 тетраэдра в отношении 3 : 1, считая соответственно от вершин C, A и B, выполняется то же равенство, то есть

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}\right).$$

Это означает, что точки M, M_1, M_2 и M_3 совпадают, то есть все четыре медианы PH_1, CH_2, AH_3 и BH_4 тетраэдра пересекаются в одной точке M и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от соответствующей вершины, что и требовалось доказать.

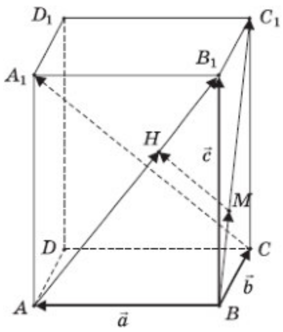


Рис.21.

Задача 9. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

Решение.

Введем векторы: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \ \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \ \overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$

Тройку $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ примем в качестве базиса и разложим векторы $\overrightarrow{AB_1}, \ \overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ по векторам этого базиса. Имеем: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA} = \vec{c} - \vec{a}; \ \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + \vec{c};$

$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

Так как точка H лежит на диагонали AB_1, то векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ коллинеарны, поэтому (соотношение 7) существует такое число x, что $\overrightarrow{AH} = x \cdot \overrightarrow{AB_1} = x(\vec{c} - \vec{a})$. Аналогично, в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ существует такое число y, что $\overrightarrow{BM} = y \cdot \overrightarrow{BC_1} = y(\vec{b} + \vec{c})$.

По правилу ломаной находим:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} =$$

$$= -y(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + x(\vec{c} - \vec{a}) =$$

$$= (1 - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - y)\vec{c}.$$

По условию MH ‖ A_1C, значит, существует такое число t, что $\overrightarrow{MH} = t \cdot \overrightarrow{CA_1}$, то есть выполняется равенство:

$$(1 - x)\vec{a} - y\vec{b} + (x - y)\vec{c} = t(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - x - t)\vec{a} + (t - y)\vec{b} + (x - y - t)\vec{c} = \vec{0}.$$

Вследствие некомпланарности векторов $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$ и единственности разложения вектора по базису, приходим к выводу: 1– x–t =0, t–y=0, x–y–t = 0. Решением этой системы уравнений является: $y = t = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{2}{3}.$ Тогда значит, $MH{:}CA_1 = 1 : 3$.

Задачи на доказательство или использование принадлежности трёх точек прямой

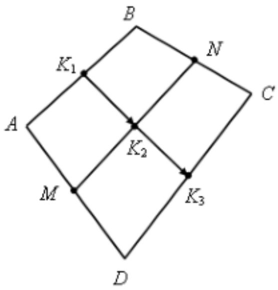


Рис.22.

Задача 10. Точки *M* и *N* лежат соответственно на сторонах *AD* и *BC* четырехугольника *ABCD*, причем *AM*:*MD*=*BN*:*NC*== 3:4.

Докажите, что середины отрезков *AB*, *MN* и *CD* лежат на одной прямой.

Доказательство.

Пусть K_1 – середина *AB*, K_2 – середина *MN*, K_3 – середина *CD*. Согласно соотношению 8 имеем

$$\overrightarrow{K_1K_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}),\ \overrightarrow{K_1K_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

Из условия следует, что $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$,

поэтому $\overrightarrow{K_1K_2}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}$.

Таким образом, векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

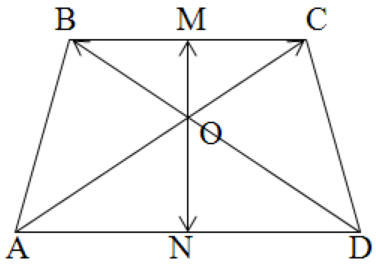


Рис.23.

Задача 11. В трапеции ABCD точки M и N середины оснований BC и AD соответственно. Докажите, что точка O пересечения диагоналей AC и BD лежит на прямой MN.

Доказательство.

Для того, чтобы доказать, что $O \in MN$ достаточно доказать, что $\overrightarrow{OM}$ и

$\overrightarrow{ON}$ коллинеарны.

Для этого нужно разложить векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ по базисным векторам.

В качестве базисных векторов возьмём $\overrightarrow{OB}=\vec{a}$ $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$. По соотношению 3 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{OD}\ \uparrow\downarrow \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}, k<0$

$\overrightarrow{OA}\ \uparrow\downarrow \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}=n\overrightarrow{OC}, n<0$

Из подобия треугольников BOC и AOD: $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$

Значит k=n, т.е. $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(k\vec{a}+k\vec{b})=\frac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})=k\cdot\overrightarrow{OM}$, значит $O \in MN$.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

Тема. Понятие вектора. Равенство векторов
Операции над векторами

Примеры решения задач

Направленным отрезком называется отрезок, у которого указан порядок концов. Два направленных отрезка называются ***эквиполентными***, если их длины равны, они параллельны и одинаково направлены.

Вектором называется класс эквиполентных направленных отрезков.

Каждый отрезок, входящий в этот класс, называется ***представителем вектора***.

Длиной (или **модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$

Модуль нулевого вектора равен нулю: $|\vec{0}| = 0$. Более того, нулевой вектор является нулевым элементом относительно сложения векторов.

Вектор, лежащий на оси, называется *сонаправленным* с осью, если его начало предшествует его концу (конец вектора следует за его началом).

В противном случае говорят, что вектор и ось имеют противоположные направления.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с осью L, то этот факт мы будем обозначать так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow L$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось L имеют противоположные направления, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow L$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda| > 1$) или сжатием (при $|\lambda| > 1$) в $|\lambda|$ раз, причём направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$

Задача 1. Найти длину вектора $\overline{\mathrm{AB}}$, если A(1;2;3); B(2;-5;4).

Решение:

Найдем координаты вектора $\overline{\mathrm{AB}}$: $\overline{\mathrm{AB}}${2-1;-5-2;4-3}; AB{1;-7;1}.

Найдем длину вектора $\overline{\mathrm{AB}}$:

$$|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + (-7^2) + 1^2} = \sqrt{1 + 49 + 1} = \sqrt{51}.$$

Ответ: $|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{51}$.

Задача 2. Найти длину радиус-вектора точки A(2;3;-1).

Решение:

Координаты радиус-вектора точки A совпадают с координатами самой точки: $\overline{\mathrm{OA}}${2;3;-1}.

Найдем длину радиус-вектора $\overline{\mathrm{OA}}$:

$$|\overline{\mathrm{OA}}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

Ответ: $|\overline{\mathrm{OA}}| = \sqrt{14}$.

Задача 3. Найти длину вектора $\bar{c} = \bar{a} + 3\bar{b}$, если $\bar{a}$\{1;-1;0\}, $\bar{b}$\{3;-1;4\}.

Решение.

Найдем координаты вектора $\bar{c}$: $\bar{c}$\{1+3·3;-1+3(-1);0+3·4\}; $\bar{c}$\{10;-4;12\}.

Найдем длину вектора $\bar{c}$:

$$|\bar{c}| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{100 + 16 + 144} = \sqrt{260}.$$

Ответ: $\bar{c}=\sqrt{260}$.

Задача 4. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{\mathrm{AB}}$, если A(1;-1;3), B(2;-3;4).

Решение.

Найдем координаты вектора $\overline{\mathrm{AB}}$: $\overline{\mathrm{AB}}$\{2-1;-3-(-1);4-3\}, $\overline{\mathrm{AB}}$\{1;-2;1\}.

Найдем длину вектора $\overline{\mathrm{AB}}$:

$$|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + (-2^2) + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Итак, $cos\alpha = \frac{2-1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$;$cos\beta = \frac{-3-(-1)}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$; $cos\gamma = \frac{4-3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 5. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

$\vec{a}$=\{1;-2;4\}, $\vec{b}$=\{7;3;5\}, $\vec{c}_1$=6$\vec{a}$-3$\vec{b}$, $\vec{c}_2$=$\vec{b}$-2$\vec{a}$.

Решение.

Координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ в декартовой прямоугольной системе координат:

$\vec{c}_1\{6-21;-12-9;24-15\}$ или $\vec{c}_1\{-15;-21;9\}$

$\vec{c}_2\{7-2;3+4;5-8\}$ или $\vec{c}_2\{5;7;-3\}$

Если векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ коллинеарны, то отношения их соответствующих координат равны.

$\frac{-15}{5} = \frac{-21}{7} = \frac{9}{-3} = -3 \Rightarrow$ векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарны.

Задача 6. Найти длину вектора $\bar{p} + 2\bar{q}$, если

$$\bar{p} = \bar{a} - \bar{b};\ \bar{q} = \bar{a} + 2\bar{b};\ |\bar{a}| = 1;\ |\bar{b}| = 3;\ (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{2}{3}\pi.$$

Решение.

Имеем

$$2\bar{q} = 2\cdot\left(\bar{a} + 2\bar{b}\right) = 2\bar{a} + 4\bar{b};$$

$$\bar{p} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + \left(-\bar{b}\right);$$

$$\bar{p} + 2\bar{q} = 2\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{a} + \left(-\bar{b}\right) = 3\bar{a} + 3\bar{b};$$

$$\left|\bar{p} + 2\bar{q}\right|^2 = \left(3\bar{a} + 3\bar{b}\right)\cdot\left(3\bar{a} + 3\bar{b}\right) = 9\cdot\left(\bar{a} + \bar{b}\right)^2 = 9\cdot\left(\bar{a}^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}^2\right) =$$

$$= 9\cdot\left(1 + 2\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\frac{2}{3}\pi + 9\right) = 9\cdot\left(1 + 2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 9\right) = 9\cdot\left(1 - 3 + 9\right) = 63;$$

$$\left|\bar{p} + 2\bar{q}\right| = \sqrt{63}.$$

Задача 7. Найти вектор $\bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{x} = \{2,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию: скалярное произведение векторов $\bar{x}\cdot\bar{a} = 27$.

Решение.

Запишем условие коллинеарности двух векторов $\bar{a} = \lambda\,\bar{x}$ и полученный вектор $\bar{a}$ подставим в условие

$$\bar{x}\cdot\bar{a} = 27;$$

$$\bar{x}\cdot\lambda = 27,\ \lambda\cdot\left|\bar{x}\right|^2 = 27,\ \lambda\cdot\left|2^2 + 1^2 + \left(-2\right)^2\right| = 27,\ 9\lambda = 27,\ \lambda = 3.$$

Следовательно $\bar{a} = 3\cdot\bar{x} = \{6,3,-6\}$.

Задания

1. Найти длину вектора $\overline{CD}$, если: C(c_1;c_2;c_3), D(d_1;d_2;d_3).

a_1	a_2	a_3	d_1	d_2	d_3
1	1	2	-1	-2	-3
2	2	2	1	1	1
-5	0	2	2	0	-5
4	3	7	7	4	3
5	0	2	-5	0	-2
11	1	1	1	0	11

2. Найти длину радиус-вектора точки M(2;-3;6).

3. Найти длину вектора $\bar{b} = 3\bar{a} + 2\bar{c}$, если $\bar{a}$\{a_1;a_2;a_3\}, $\bar{c}$\{c_1;c_2;c_3\}.

a_1	a_2	a_3	c_1	c_2	c_3
1	1	2	-1	-2	-3
2	2	2	1	1	1
-5	0	2	2	0	-5
4	3	7	7	4	3
5	0	2	-5	0	-2
11	1	1	1	0	11

4.Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AD}$, если A(a_1;a_2;a_3); D(c_1;c_2;c_3)

a_1	a_2	a_3	c_1	c_2	c_3
1	1	2	-1	-2	-3
2	2	2	1	1	1
-5	0	2	2	0	-5

4	3	7	7	4	3
5	0	2	-5	0	-2
11	1	1	1	0	11

5. Даны векторы $\bar{a}=2\bar{\imath}-5\bar{\jmath}+\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{\imath}-\bar{\jmath}-\bar{k}$.
Найти: а) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; б) $\cos(\widehat{a,b})$; в) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

6. Найти угол между векторами $\bar{a}=2\bar{m}+4\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ – единичные векторы и угол между ними равен 120˚.

7. Проверить компланарность векторов

$$\bar{a}=\bar{\imath}+\bar{\jmath}+4\bar{k},\ \bar{b}=\bar{\imath}-2\bar{\jmath},\ \bar{c}=3\bar{\imath}-3\bar{\jmath}+4\bar{k}.$$

Тема. Подпространство. Линейная зависимость и независимость систем векторов

Примеры решения задач

Пусть L есть некоторое непустое множество и P – числовое поле. В L определено действие, называемое *сложением*, согласно которому каждой паре элементов u, v ∈ L сопоставляется третий элемент из L, обозначаемый через u + v. Также определено действие *умножения элементов из L на числа из P*, согласно которому каждой паре, состоящей из элемента u ∈ L и числа λ ∈ P, сопоставлен элемент из L, обозначаемый через λu.

Если при этом выполнены следующие семь аксиом, то множество L, рассматриваемое вместе с указанными двумя операциями, называется линейным пространством над полем P.

Коммутативность сложения:

∀ u, v ∈ L u + v = v + u.

2) Ассоциативность сложения:

∀ u, v, w ∈ L (u + v) + w = u + (v + w).

Обратимость сложения:

∀ u, v ∈ L всегда найдется такой x ∈ L, что u + x = v
(при этом элемент x называется разностью между v и u и обозначается: x = v - u).

Ассоциативность умножения на числа из P:

∀ u ∈ L ∀ λ, μ ∈ P   λ(μu) = (λμ)u.

Свойство дистрибутивности относительно сложения чисел из P:

∀ u ∈ L ∀ λ, μ ∈ P   (λ + μ)u = λu + μu.

Свойство дистрибутивности относительно сложения элементов из L:

∀ u, v ∈ L ∀ λ ∈ P   λ(u + v) = λu + λv.

Свойство единичного множителя:

для числа 1 ∈ P и ∀ u ∈ L выполнено 1u = u.

Элементы любого линейного пространства будем называть *векторами*

Пусть L – линейное пространство над полем P. Непустое подмножество L’ пространства L называется *подпространством пространства L*, если выполнены следующие условия:

∀ u, v ∈ L’   u + v ∈ L’,

∀ u ∈ L’ ∀ λ ∈ P   λu ∈ L’,

т.е. L’ замкнуто относительно сложения и относительно умножения на число.

Говорят, что вектор v линейного пространства L над полем P ***линейно выражается*** через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in P$, что

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m.$$

Выражение, стоящее в правой части, называют *линейной комбинацией* векторов u1, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta.$$

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ не являются линейно зависимыми между собой, то они называются ***линейно независимыми***. Это означает, что соотношение

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta$$

выполняется **только** при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Задача 1. Найти линейную комбинацию

$$3A_1 - 2A_2 + 8A_3$$

следующих векторов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$3A_1 - 2A_2 + 8A_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, + (-2)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Выяснить, является ли заданная система векторов линейно зависимой.

$$a_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим линейную комбинацию векторов и приравняем её к нулю:

$$\lambda a_1 + \mu a_2 = 0; \quad \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \quad \mu\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} -3\lambda + 6\mu \\ \lambda - 2\mu \\ 5\lambda + 15\mu \end{pmatrix} = \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 6\mu = 0, \\ \lambda - 2\mu = 0, \\ 5\lambda + 15\mu = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$\begin{cases} -3\lambda + 6\mu = 0, \\ \lambda - 2\mu = 0, \\ 5\lambda + 15\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2\mu, \\ \lambda = -3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Получили, сто равенство нулю линейной комбинации возможно только, если коэффициенты при векторах равны нулю. Следовательно, заданная система векторов линейно независима.

Задания

1. Решить векторное уравнение:

а) $A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4X = \Theta$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

б) $3(A_1 - X) + 2(A_2 + X) = 5(A_3 + X)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

в) $2A_1 + 3A_2 - A_3 - 7X = A_4$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Выяснить, является ли заданная система векторов линейно зависимой:

$$a) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -49 \end{pmatrix}.$$

$$б). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$в). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что в координатном векторном пространстве V(3) = {(a1, a2, a3)| ai $\in$ R, i = 1 $\div$ 3} над полем R множество всех векторов, у которых:

а) первая координата равна нулю;

б) вторая координата равна нулю;

в) третья координата равна нулю;

является подпространством.

4. Построить линейную оболочку системы векторов:

$$a).\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix};$$

$$б).\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$в).\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}.$$

5. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ базис. Если образуют, то разложите вектор $\vec{x}$ по этому базису.

1. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}.$

2. $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}13\\2\\7\end{pmatrix}.$

3. $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\5\\5\end{pmatrix}.$

4. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}.$

5. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\8\end{pmatrix}.$

Тема. Линейный оператор и его простейшие свойства. Матрица линейного оператора

Примеры решения задач

Пусть L – линейное пространство над полем P. Линейным оператором, или линейным преобразованием, пространства L называется отображение φ: L → L, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall$ u, v $\in$ L φ(u+v) = φ(u)+φ(v),

2) $\forall$ u $\in$ L $\forall$ λ $\in$ P φ(λu) = λφ(u).

Пусть в линейном пространстве *L* над полем *P* задан базис $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис *U* следующим образом:

$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n$,
$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n$,
…………………………………………
$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n$,

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1\div n$, $j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, …, $\varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис u_1, u_2, …, u_n

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** φ в базисе U.

Задача 1. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y–z=0$.

Если $\mathbf{x} = \{x_1;\quad x_2;\quad x_3\}$, то

$$A\mathbf{x} = \left\{x_1;\quad \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3;\quad \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right\}.$$

Оператор является линейным, если
$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x}+A\mathbf{y}$ и $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$.

Проверяем

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \left(x_1+y_1;\quad \frac{1}{2}(x_2+y_2)+\frac{1}{2}(x_3+y_3);\quad \frac{1}{2}(x_2+y_2)+\frac{1}{2}(x_3+y_3)\right) =$$
$$= \left(x_1+y_1;\quad \frac{1}{2}(x_2+x_3)+\frac{1}{2}(y_2+y_3);\quad \frac{1}{2}(x_2+x_3)+\frac{1}{2}(y_2+y_3)\right) =$$
$$= A\mathbf{x}+A\mathbf{y}.$$

$$A(\lambda\mathbf{x}) = \left\{\lambda x_1;\quad \frac{1}{2}\lambda x_2+\frac{1}{2}\lambda x_3;\quad \frac{1}{2}\lambda x_2+\frac{1}{2}\lambda x_3\right\}.$$

$$\lambda(A\mathbf{x}) = \left\{\lambda x_1;\quad \lambda\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right);\quad \lambda\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)\right\} =$$
$$= \left\{\lambda x_1;\quad \frac{1}{2}\lambda x_2+\frac{1}{2}\lambda x_3;\quad \frac{1}{2}\lambda x_2+\frac{1}{2}\lambda x_3\right\} = A(\lambda\mathbf{x}).$$

Т.е. оператор А является линейным.
Его матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Область значений оператора – это множество всех векторов

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \left\{x_1;\quad \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3;\quad \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right\}.$$

Ядро линейного оператора – это множество всех векторов, которые А отображает в нуль-вектор:

$$\operatorname{Ker} A = \{0;\quad x_2;\quad -x_2\}.$$

Задания

Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро операторов A, B и C:

1.	$Ax=\left(6x_1-5x_2-4x_3,\quad -3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2x_3\right),$ $Bx=\left(6-5x_2-4x_3,\quad 3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2\right),$ $Cx=\left(x_3^4,\quad 3x_1-2x_2-x_3,\quad x_2+2x_3\right).$
2.	$Ax=\left(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 2x_1-x_2,\quad x_2+2\right),$ $Bx=\left(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 0,\quad x_2^4+2x_3\right),$ $Cx=\left(5x_1-4x_2-3x_3,\quad 2x_1-x_2,\quad x_2+2x_3\right).$
3.	$Ax=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2^4+3x_3\right),$ $Bx=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3x_3\right),$ $Cx=\left(4x_1-3x_2-2x_3,\quad x_1,\quad x_1+2x_2+3\right).$
.4.	$Ax=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1-3x_2-4x_3\right),$ $Bx=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad 1,\quad 2x_1-3x_2-4\right),$ $Cx=\left(3x_1+2x_2+x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4-3x_2-4x_3\right).$
5.	$Ax=\left(x_1,\quad x_1-2x_2-3,\quad 4x_1-5x_2-6\right),$ $Bx=\left(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1^4-5x_2-6x_3\right),$ $Cx=\left(x_1,\quad x_1-2x_2-3x_3,\quad 4x_1-5x_2-6x_3\right).$

Тема. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Ранг и дефект линейного оператора

Примеры решения задач

Пусть L – линейное пространство над полем P. Линейным оператором, или линейным преобразованием, пространства L называется отображение φ: L → L, для которого выполняются следующие условия:

1) ∀ u, v ∈ L φ(u+v) = φ(u)+φ(v),

2) ∀ u ∈ L ∀ λ ∈ P φ(λu) = λφ(u).

Пусть в линейном пространстве *L* над полем *P* задан базис $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L\to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис *U* следующим образом:

$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n,$

$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n,$

…………………………………………

$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n,$

где $\alpha_{ij}\in P,\ i=1\div n,\ j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi)=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** *φ* в базисе *U*.

Общая постановка задачи

Найти матрицу некоторого оператора А в базисе $(\mathbf{e}_1'; \quad \mathbf{e}_2'; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n')$, где

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + ... + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_2' = t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + ... + t_{n2}\mathbf{e}_n, \\ .... \\ \mathbf{e}_n' = t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + ... + t_{nn}\mathbf{e}_n. \end{cases}$$

если в базисе его $(\mathbf{e}_1'; \quad \mathbf{e}_2'; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n')$ матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>План решения.</u>

При переходе от базиса $(\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n)$ к базису $(\mathbf{e}_1'; \quad \mathbf{e}_2'; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n')$ матрица оператора преобразуется по формуле $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, где Т – матрица перехода от базиса $(\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n)$ к базису $(\mathbf{e}_1'; \quad \mathbf{e}_2'; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n')$.

1. Выписываем матрицу перехода:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Находим обратную матрицу $\mathbf{T}^{-1}$.

3. Находим матрицу оператора А в базисе $(\mathbf{e}_1'; \quad \mathbf{e}_2'; \quad ...; \quad \mathbf{e}_n')$ по формуле $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Задача. 1. Найти матрицу в базисе $(e_1', \quad e_2', \quad e_3')$, где

$$e_1' = e_1 - e_2 + e_3, \; e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, \; e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3,$$

если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг и дефект оператора А.

Решение.

Матрица в базисе $(e_1', \quad e_2', \quad e_3')$ находится по формуле $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.
где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу $\mathbf{T}^{-1}$.
Определитель:

$$|\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 1 + 4 - 1 = 1.$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=5;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Обратная матрица:

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу в новом базисе:

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10+0+1 & 5+3-1 & 0-3-1\\ 6+0+1 & 3+2-1 & 0-2-1\\ 2+0+0 & 1+1+0 & 0-1+0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11 & 7 & -4\\ 7 & 4 & -3\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11-7-4 & -11+7+8 & -11+14-4\\ 7-4-3 & -7+4+6 & -7+8-3\\ 2-2-1 & -2+2+2 & -2+4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Т.е. матрица А в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$ имеет вид:

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Так как det A=$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$=111≠0, то rang A=3=rangR^3 , то оператор А – невырожденный и его дефект равен нулю.

Задания

1. Найти матрицу оператора в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где

$$e_1'=e_1-e_2+e_3,\ e_2'=-e_1+e_2-2e_3,\ e_3'=-e_1+2e_2+e_3,$$

если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3).

2. Найти ранг и дефект оператора.

1. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Примеры решения задач

Пусть L – линейное пространство над полем P. Линейным оператором, или линейным преобразованием, пространства L называется отображение $\varphi: L \to L$, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall\ u, v \in L \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,

2) $\forall\ u \in L\ \forall\ \lambda \in P \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис U следующим образом:

$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n$,

$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n$,

…………………………………………

$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n$,

где $\alpha_{ij} \in P,\ i=1 \div n,\ j=1 \div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** φ в базисе U.

Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Элемент $w \in L$ называется ***собственным вектором*** оператора φ, если $w \neq \theta$ и существует $\lambda \in P$, такое, что $\varphi(w) = \lambda w$. При этом λ называется ***собственным значением*** оператора φ, соответствующим вектору w.

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица над полем P и $\lambda \in P$. Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а корни данного многочлена называются ***характеристическими числами*** матрицы A.

Общая постановка задачи.

Найти собственные значения и собственные векторы оператора A, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

План решения.

Собственные значения оператора A являются корнями его характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

1. Составляем характеристическое уравнение и находим все его вещественные корни λ (среди которых могут быть и кратные).

2. Для каждого собственного значения λ находим собственные вектора. Для этого записываем однородную систему уравнений $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})X=0$ и находим ее общее решение.

3. Исходя из общих решений каждой из однородных систем, выписываем собственные векторы.

Задача. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его решение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=3$.

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_{1,2}=1:\quad \begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_1-x_3=0, \\ -x_1+x_3=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=c_1, \\ x_2=c_2, \\ x_3=c_1. \end{cases}$$

$$\lambda_3=3:\quad \begin{cases} -x_1-x_3=0, \\ x_1-2x_2-x_3=0, \\ -x_1-x_3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=c_1, \\ x_2=c_1, \\ x_3=-c_1. \end{cases}$$

Собственные векторы:

$$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задания

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного в некотором базисе матрицей

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 4. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}.$ 6. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2. Определить, является ли данный оператор вырожденным или невырожденным.

Тема. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их свойства

Примеры решения задач

Скалярным произведением векторов **a** и **b** называется число

ab = |**a**| |**b**| cos(**a^b**).

В декартовой прямоугольной системе координат имеем:

ab = $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Свойства скалярного произведения:

1). **ab** =**ba**

2).(**a+b**)**c=ac +bc**

3).(α**b**)**a**=α(**ba**)

4).**aa**$\geq$ 0

Скалярное умножение векторов используется в школьной геометрии при доказательстве теорем и решении задач.

Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c=**[**ab**], удовлетворяющий условиям:

1.|**c**|=|**a**| |**b**|sin(**a**^**b**)

2.**c** $\perp$ **a**, **c** $\perp$ **b**

3.**a,b,c** – правая тройка векторов.

В декартовых прямоугольных координатах:

$$\mathbf{c}=\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\} \qquad (1)$$

(условия 1,2,3 проверяются непосредственными вычислениями).

Свойства:

1).[**ba**]**= -** [**ab**]

2).[(k**a**)**b**]=k[**ab**]

3).[**a**(**b+c**)]=[**ab**]+[**ac**] - свойства следуют из (1) и свойств определителей.

Геометрический смысл модуля векторного произведения:

|[**ab**]|= 2 S_Δ , где Δ - треугольник, построенный на векторах **a**, **b** (очевидно, из условия 1.)

Смешанным произведением трёх векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называют число, равное $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Обозначается $(\overline{a}\overline{b}\overline{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Здесь первые два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ умножается скалярно на третий вектор $\bar{c}$. Очевидно, такое произведение есть некоторое число.

Геометрический смысл смешанного произведения. Смешанное произведение 3-х векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах, т.е. $(\overline{a}\overline{b}\overline{c})=\pm V_{пар}$.

Таким образом, $V = \left|\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)\right|$ и $V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)\right|$.

Задача 1. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}+\overline{c}$, если $\overline{a}=\{1,-3,4\}$, $\overline{b}=\{3,-4,2\}$, $\overline{c}=\{-1,1,4\}$.

Решение.

Обозначим $\overline{b}+\overline{c}=\overline{d}$, тогда $\overline{d}=\{2,-3,6\}$

$\overline{a}\cdot\overline{d}=|\overline{a}|\cdot|\overline{d}|\cos\left(\overline{a}\wedge\overline{d}\right)=|\overline{d}|\cdot np_{\overline{d}}\overline{a}$, отсюда

$$np_{\overline{d}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{d}}{|\overline{d}|};\ np_{\overline{d}}\overline{a}=\frac{1\cdot2+(-3)\sqrt{(-3)+4\cdot6}}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{35}{7}=5.$$

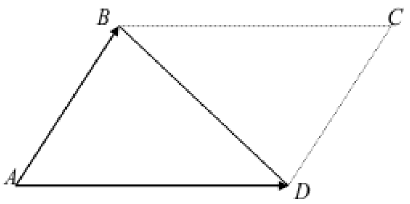
Ответ: 5.

Задача 2.

Найти площадь треугольника ABD, если $A(1,1,1)$; $B(2,0,1)$; $D(1,2,\text{-}1)$.

Решение.

Построим параллелограмм $ABCD$ на векторах AB и AD:



$\overline{AB}=\{1,-1,0\}$;

$\overline{AC}=\{0,1,-2\}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$$

$S_{ABCD}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{4+4+1}=3$ (кв.ед.)

$S_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}=\frac{3}{2}$ (кв.ед.)

Задача 3. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a}=\{1,1,1\}$ и $\overline{b}=\{2,0,3\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|x|=\sqrt{6}$.

Решение.

Если $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$, тогда вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Найдем вектор $\overline{c}$: $\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$.

Так как $\overline{x}$ тоже перпендикулярен $\overline{a}$ и $\overline{b}$, следовательно вектора $\overline{x}$ и $\overline{c}$ - коллинеарны. Запишем условие коллинеарности векторов: $\overline{x} = \lambda \overline{c}$, $\overline{x} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

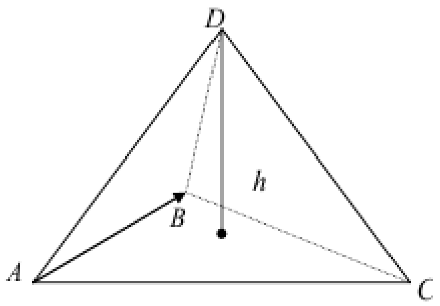
По условию $|\overline{x}| = \sqrt{6}$, то есть $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6};\ |\lambda| = 1,$ отсюда $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1.$

Так как вектор $\overline{x}$ образует с осью OX тупой угол, то его проекция на ось OX должна быть отрицательной.

Отсюда $\lambda = -1,$ а $\overline{x} = \{-1, -1, 2\}.$

Задача 4. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D, если ее вершины $A(2,3,1),\ B(4,1,-2),\ C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8).$

Решение.



Найдем векторы:

$\overline{AB} = \{2, -2, -3\};$

$\overline{AC} = \{4, 0, 6\};$

$\overline{AD} = \{-7, -7, 7\}.$

Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой модуля смешанного произведения этих векторов:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right| \text{ или } V = \frac{1}{3} \cdot S_{\_ABC} \cdot h,$$

где h – высота пирамиды, а площадь прямоугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ равна одной второй векторного произведения $S_{\_ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$

Вычислим смешанное произведение векторов

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308$$

Отсюда V пирамиды $= \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}.$

Вычислим векторное произведение векторов:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\overline{i}+24\overline{j}+8\overline{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{28}{2}=14;$$

Найдем высоту пирамиды: $h=\dfrac{3\cdot V}{S_{\_ABC}}=\dfrac{3\cdot 154}{3\cdot 14}=11;$ $\underline{h=11}$.

Задача 5. Даны векторы $\vec{a}\{3;-1;-2\}$ и $\vec{b}\{1;2;-1\}$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]$; 2) $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

Решение.

Воспользуемся свойствами векторного произведения:

1) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]=\left[2\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}=\left\{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{5;1;7\}.$$

Следовательно, $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]=\{10;2;14\}$.

2)

$$\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=\left[2\vec{a},2\vec{a}+\vec{b}\right]+\left[-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},2\vec{a}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},2\vec{a}\right]-\left[\vec{b},\vec{b}\right]=$$

$$=4\left[\vec{a},\vec{a}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]+2\left[\vec{a},\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\vec{b}\right]=4\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Следовательно, $\left[\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$ = $\{20;4;28\}$.

Задания

1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№ п/п	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	$\lvert\overline{p}\hat{}\,\overline{q}\rvert$
1	$\overline{p}+2\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
2	$3\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\frac{\pi}{4}$
3	$\overline{p}-3\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	$1/5$	1	$\frac{\pi}{2}$
4	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	4	$1/2$	$\frac{5\pi}{6}$
5	$\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}+\overline{q}$	2	3	$\frac{3\pi}{4}$

6	$\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\dfrac{\pi}{3}$
7	$2\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	3	2	$\dfrac{\pi}{2}$
8	$4\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\dfrac{\pi}{4}$
9	$\overline{p}-4\overline{q}$	$3\overline{p}+\overline{q}$	1	2	$\dfrac{\pi}{6}$
10	$\overline{p}+4\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\dfrac{\pi}{3}$

2. Определить компланарны ли векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$.

№ п/п	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$
1	(2, 3,1)	(-1, 0, -1)	(2, 2, 2)
2	(3, 2, 1)	(2, 3, 4)	(3, 1, -1)
3	(1, 5, 2)	(-1, 1, -1)	(1, 1, 1)
4	(1, -1, -3)	(3, 2, 1)	(2, 3, 4)
5	(3, 3, 1)	(1, -2, 1)	(1, 1, 1)
6	(3, 1, -1)	(-2, -1, 0)	(5, 2, -1)
7	(4, 3, 1)	(1, -2, 1)	(2, 2, 2)
8	(4, 3, 1)	(6, 7, 4)	(2, 0, -1)
9	(3, 2, 1)	(1, -3, -7)	(1, 2, 3)
10	(3, 7, 2)	(-2, 0, -1)	(2, 2, 1)

3. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A , B , C и D и ее высоту, опущенную из вершины D на грань ABC .

№ п/п	A	B	C	D
1	(0, 1, 2)	(2, 1, 7)	(2, 7, 4)	(0, 0, 4)
2	(1, 2, 3)	(2, 8, -4)	(0, 5, 4)	(2, 9, 4)
3	(1, 1, 1)	(2, 4, -2)	(2, 0, 2)	(0, 1, -1)
4	(1, -1, 1)	(0, 2, 3)	(1, -1, 0)	(0, 2, 2)
5	(2, 1, 3)	(4, -2, 0)	(1, 3, -3)	(7, 5, 2)
6	(-2, 0, 4)	(1, 3, -1)	(4, -1, 3)	(2, 7, 3)
7	(1, 2, 3)	(0, 0, 0)	(1, 4, 3)	(1, 8, -1)
8	(-1, 2, 0)	(1, 0, 3)	(0, 2, 2)	(1, 8, 3)
9	(2, -1, 1)	(3, 3, 2)	(2, 1, 0)	(4, 1, -3)
10	(2, 1, -1)	(-3, 1, 2)	(0, 1, 2)	(-1, 8, 3)

4. Выполнить задания.

1. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $A\vec{B}, A\vec{C}, A\vec{D}$, если $A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4), D(-1;1;1)$.

2. Проверьте, лежат ли точки $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(7;5;-3)$ в одной плоскости.

3. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{6;3;4\}, \vec{b} = \{-1;-2;-1\}, \vec{c} = \{2;1;2\}$.

4. Найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}=\{1;2;2\}, \vec{b}=\{2;1;2\}, \vec{c}=\{4;8;9\}$.

5. Вычислите объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1;3;6), B(2;2;1), C(-1;0;1), D(-4;6;-3)$.

6. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, если $A(1;2;-2), B(-1;4;0), C(4;1;1), D(5;5;-3)$.

7. Проверьте, лежат ли точки $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ в одной плоскости.

8. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{-1;-2;-1\}, \vec{b}=\{4;3;6\}, \vec{c}=\{2;1;2\}$.

9. Найдите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3), D(3;7;2)$.

10. При каком значении *к* точки лежат в одной плоскости $A(1;0;3), B(-1;3;4), C(1;2;1), D(\kappa;2;5)$.

Тема. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии

1. Стороны АВ и ВС параллелограмма заданы уравнениями 2x - y + 5 = 0 и x - 2y + 4 = 0, диагонали его пересекаются в точке M(1, 4). Найти длины его высот

2. Через начало координат проведена прямая на одинаковом расстоянии от точек A(2, 2) и B(1, 0). Найти это расстояние

3. Стороны АВ и ВС параллелограмма заданы уравнениями y = x - 2 и 5y = x + 6, диагонали его пересекаются в точке M(1, 4). Найти длины его высот

4. Даны точки A(-4, 0) и B(0, 6). Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy

5. Найти площадь параллелограмма ABCD, если его вершины A(3;-2;4), B(0;-1;6), C(1;-3;6), D(1;-1;0).

6. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Оу отрезок *b*=-3 и составляющей с осью Ох угол 60˚.

7. Даны вершины треугольника ABC. Вычислить координаты центра тяжести этого треугольника. Найти длину медианы *AM*.

а) $A(2, -5)$, $B(1, -2)$, $C(4, 7)$;

б) $A(-1, -1)$, $B(3, 5)$, $C(-4, 1)$;

в) $A(3, -1)$, $B(1, 1)$, $C(2, 3)$

8. Решить задачи,

а). Точка $C(-2,1)$ делит отрезок *AB* в отношении $AC:CB=2:3$. Найти координаты точки *B*, если $A(-10,5)$.

б). Точка $C(3,5)$ делит отрезок AB в отношении $AC:CB=3:4$. Найти координаты точки A, если $B(-1,1)$.

в). Точка $C(-2,3)$ делит отрезок *AB* в отношении $AC:CB=2:1$. Найти координаты точки *B*, если $A(-7,4)$.

г). Отрезок *AB* двумя точками разделен на три равные части. Определить координаты точек деления, если $A(-3,7)$, $B(5,11)$.

9. Одной из вершин прямоугольника является точка $A(-4,3)$, а противоположный угол образован осями координат. Составить уравнения сторон и диагоналей этого прямоугольника.

Найти расстояние от точки $A(-3,2)$ до прямой $4x+3y+14=0$. Найти расстояние от начала координат до каждой из прямых:

$а)\ 3x-4y+15=0;$

$б)\ x+7y-5=0;$

$в)\ x-2y+3=0.$

10. Дан треугольник с вершинами $A(-1,2)$, $B(5,7)$, $C(1,-3)$. Вычислить угол между медианой и высотой, проведенными из вершины B.

Найти уравнение перпендикуляра, восставленного к прямой в точке C, делящей отрезок этой прямой между точками $A(2,-3)$ и $B(0,5)$ в отношении $\lambda=1:3$.