

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ  
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
естественнонаучных и  
общеобразовательных дисциплин

 С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
Б1.В.ДВ.03.02 Элементы интегрального исчисления**

**1. Шифр и наименование направления подготовки:**

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

**2. Профили подготовки:**

Математика. Информатика и информационные технологии в образовании

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная, заочная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин

**6. Составители программы:** С.Е. Зюзин, кандидат физико-математических наук, доцент, Е.С. Мещерякова, ст. преподаватель

**7. Рекомендована:** научно-методическим советом Филиала (протокол № 1 от 31.08.2018 г.)

**8. Семестры:** 2 (офо), 4(зфо)

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

**Целью учебной дисциплины** «Элементы интегрального исчисления» является обеспечение фундаментальной математической подготовки как основы будущей профессиональной деятельности; формирование мировоззрения и развитие личности будущего педагога.

### Задачи учебной дисциплины:

- дать представление о месте и роли интегрального исчисления в системе математических наук;
- ознакомление с понятиями и методами интегрального исчисления;
- ознакомление с математическими методами решения прикладных задач;
- воспитание математической культуры;
- формирование у студентов навыков работы с учебной, научной и научно-методической литературой.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Элементы интегрального исчисления» входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является дисциплиной по выбору вариативной части образовательной программы. Для изучения дисциплины требуется освоение курсов «Математика» или «Элементы дифференциального исчисления», «Основы физики». Дисциплина является предшествующей для курсов «Математический анализ», «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дифференциальные уравнения», «Методика обучения математике» и др.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	<p><b>знает (имеет представление):</b> связь теоретических основ и технологических приёмов элементов интегрального исчисления с содержанием преподаваемых учебных предметов (<i>понятия первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла, несобственного интеграла, интеграла с переменной верхней границей; методы вычисления интегралов и т.д.</i>).</p> <p><b>умеет:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>– ставить познавательные цели учебной деятельности;</li><li>– осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений;</li><li>– применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения элементов интегрального исчисления;</li></ul> <p><b>владеет (имеет навыки):</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>– исследовательской и проектной деятельности;</li><li>– общепользовательской ИКТ-компетентности;</li><li>– общепедагогической ИКТ-компетентности;</li><li>– предметно-педагогической ИКТ-компетентности.</li></ul>

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 5/180.

## Форма промежуточной аттестации экзамен.

### 13. Виды учебной работы

#### Очная форма обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		2 сем.
Контактная работа, в том числе:	72	72
лекции	36	36
практические занятия	36	36
лабораторные работы	0	0
Самостоятельная работа	72	72
Форма промежуточной аттестации (экзамен –36 час.)	36	36
Итого:	180	180

#### Заочная форма обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		4 сем.
Контактная работа, в том числе:	16	16
лекции	8	8
практические занятия	8	8
лабораторные работы	0	0
Самостоятельная работа	155	155
Форма промежуточной аттестации (экзамен –9 час.)	9	9
Итого:	180	180

### 13.1. Содержание дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Геометрические и механические приложения определённого интеграла	<p><b>Геометрические приложения определённого интеграла</b></p> <p>1. Вычисление площади плоской фигуры: – в прямоугольной системе координат <math>XOY</math>; – при параметрической форме задания линий, ограничивающих фигуру; – в полярной системе координат.</p> <p>2. Вычисление длины дуги плоской кривой: – в прямоугольной системе координат <math>XOY</math>; – в параметрической форме; – в полярной системе координат.</p> <p>3. Вычисление объёмов некоторых видов тел.</p> <p>4. Вычисление поверхностей тел вращения.</p> <p><b>Механические приложения определённого интеграла</b></p> <p>1. Вычисление работы силы.</p> <p>2. Вычисление статических моментов и центра масс дуги плоской кривой</p> <p>3. Вычисление давления жидкости на погружённую в неё пластину.</p>
2	Понятие двойного интеграла	<p>Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение и простейшие свойства двойного интеграла.</p> <p><b>Некоторые приложения двойного интеграла.</b></p> <p>1. Вычисление площади плоской фигуры.</p> <p>2. Вычисление центра тяжести плоской пластины.</p> <p>3. Вычисление центра масс плоской пластины.</p>
3	Понятие тройного интеграла	<p>Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла. Определение и простейшие свойства тройного интеграла.</p>

		<b>Некоторые приложения тройного интеграла</b> 1. Вычисление массы тела заданной плотности 2. Вычисление координат центра тяжести объемного тела.
--	--	---

## 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Геометрические и механические приложения определённого интеграла	16	18	0	32	66
2.	Понятие двойного интеграла	10	9	0	20	39
3.	Понятие тройного интеграла	10	9	0	20	39
	Экзамен					36
	Итого:	36	36	0	72	180

### Заочная форма обучения

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Геометрические и механические приложения определённого интеграла	4	4	0	70	78
2.	Понятие двойного интеграла	2	2	0	45	49
3.	Понятие тройного интеграла	2	2	0	40	44
	Экзамен					9
	Итого:	8	8	0	155	180

## 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Для достижения планируемых результатов обучения используются интерактивные лекции, групповые дискуссии.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

### а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.1: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008
2	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.2: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008

### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Алексеева Т.И. Основные понятия и теоремы математического анализа: учебно-метод. пособие. Ч. 2.- Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2010
4	Тиняков Г.П. Дополнительные главы математического анализа: учеб. пос.- М.: МГИУ, 2008

### в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
5	Мельников, Р.А. Математический анализ (практическое руководство для решения индивидуальных заданий) : учебное пособие / Р.А. Мельников, С.А. Силкин, В.А. Филин ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». - Елец : Елецкий государственный университет им И.А. Бунина, 2011. - 325 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-94809-520-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=272211">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=272211</a> (21.06.2018).
6	Туганбаев, А.А. Математический анализ: интегралы : учебное пособие / А.А. Туганбаев. - 3-е изд., стереотип. - Москва : Издательство «Флинта», 2017. - 76 с. - ISBN 978-5-9765-1306-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=103835">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=103835</a> (21.06.2018).

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Методические материалы по дисциплине
2	Алексеева Т.И. Основные понятия и теоремы математического анализа: учебно-метод. пособие. Ч. 2.- Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2010

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

Microsoft Office 2007 (Word, Excel, PowerPoint)

Сетевые технологии:

- браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer.
- Научная электронная библиотека – <http://www.scholar.ru/>;
- Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>;
- Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – <https://www.lektorium.tv/>;
- Электронно-библиотечная система «Издательства Лань» – <http://e.lanbook.com/>;
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

## 19. Фонд оценочных средств:

### 19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1 готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Знать: связь теоретических основ и технологических приёмов элементов интегрального исчисления с содержанием преподаваемых учебных предметов ( <i>понятия первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла, несобственного интеграла, интеграла с переменной верхней границей; методы вычисления интегралов и т.д.</i> ).	Геометрические и механические приложения определённого интеграла Понятие двойного интеграла Понятие тройного интеграла	Практическое задание  Контрольная работа  Тест
	Уметь: – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения элементов интегрального исчисления;	Геометрические и механические приложения определённого интеграла Понятие двойного интеграла Понятие тройного интеграла	Комплекты индивидуальных заданий  Доклады, рефераты  Тест
	Иметь навыки: – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – общепедагогической ИКТ-компетентности; – предметно-педагогической ИКТ-компетентности.	Геометрические и механические приложения определённого интеграла Понятие двойного интеграла Понятие тройного интеграла	Доклады, рефераты  Комплекты индивидуальных заданий  Аннотированный каталог
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>			Вопросы к экзамену

### 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом интегрального исчисления;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
- 4) умение применять теоретические знания для решения практических задач в области интегрального исчисления, решать типовые расчётные задачи.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформирован	Шкала оценок
---------------------------------	---------------------	--------------

	НОСТИ компетенций	
<i>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом элементов интегрального исчисления, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения типовых расчётных задач и практических заданий более высокого уровня сложности в области интегрального исчисления.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Обучающийся владеет понятийным аппаратом элементов интегрального исчисления, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, допускает незначительные ошибки при решении практических заданий более высокого уровня сложности в области интегрального исчисления.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Обучающийся владеет частично теоретическими основами элементов интегрального исчисления, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, в ряде случаев затрудняется применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, не всегда способен решить практические задания более высокого уровня сложности в области интегрального исчисления.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при решении типовых расчётных задач либо не имеет представления о способе их решения.</i>	<i>–</i>	<i>Неудовлетворительно</i>

**19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

**19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:**

- 1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
- 2 Определение определенного интеграла.
- 3 Основные свойства определенного интеграла.
- 4 Теорема о среднем.
- 5 Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
- 6 Вычисление определенного интеграла.
- 7 Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла.
- 8 Замена переменной в определенном интеграле.
- 9 Интегрирование по частям.
- 10 Методы приближенного вычисления определенного интеграла.
- 11 Геометрические приложения определенного интеграла.
- 12 Механические приложения определенного интеграла.
- 13 Двойные интегралы, определения, их основные свойства.
- 14 Тройные интегралы, определения, их основные свойства.
- 15 Приложения двойного интеграла.
- 16 Приложения тройного интеграла.
- Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
- 17 Определение определенного интеграла.
- 18 Основные свойства определенного интеграла.
- 19 Теорема о среднем.
- 20 Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
- 21 Вычисление определенного интеграла.

- 22 Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла.
- 23 Замена переменной в определенном интеграле.
- 24 Интегрирование по частям.
- 25 Методы приближенного вычисления определенного интеграла.
- 26 Геометрические приложения определенного интеграла.
- 27 Механические приложения определенного интеграла.
- 28 Двойные интегралы, определения, их основные свойства.
- 29 Тройные интегралы, определения, их основные свойства.
- 30 Приложения двойного интеграла.
- 31 Приложения тройного интеграла.

### 19.3.2 Примеры типовые задания для организации индивидуальной работы (индивидуальные задания) по дисциплине «Элементы интегрального исчисления»

#### Индивидуальные задания к разделу Геометрические и механические приложения определённого интеграла

##### 1. Вычислить интегралы

1.  $\int_0^2 (3x^2 - 1) dx$ ;    2.  $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$ ;    3.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ;
4.  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ;    5.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$ ;    6.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx$ ;
7.  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$ ;    8.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ;    9.  $\int_0^2 x(3-x) dx$ ;
10.  $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$ ;    11.  $\int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx$ ;    12.  $\int_0^e \ln x dx$ ;
13.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ ;    14.  $\int_1^0 \ln^2 x dx$ ;    15.  $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$ ;
16.  $\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx$ ;    17.  $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ;    18.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$ ;
19.  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ ;    20.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$ ;    21.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ ;
22.  $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$ ;    23.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$ ;    24.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$ ;
25.  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

##### 2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

1.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ;    2.  $y^2 = 2\rho x$ ,  $x = h$ ;    3.  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$ ;
4.  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ ;    5.  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ;    6.  $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ;
7.  $y = |x| + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$ ;    8.  $y = \sin x$ ,  $y = x^2 - \pi x$ ;

9.  $y = \arcsin 2x$ ,  $x=0, y=-\frac{\pi}{2}$ ; 10.  $y = \sin 2x$ ,  $y=1, x=\frac{\pi}{2}$ , где  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;
11.  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x=2$ ; 12.  $xy=4$ ,  $x=4, y=4, x=0, y=0$ ;
13.  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ ; 14.  $y = |x^2 - 1|$ ,  $y=0, x=-2, x=2$ ;
15.  $y = x^2 - 2x + 2$ ,  $x=-1, x=2$  и отрезком  $[-1, 2]$  оси  $ox$ ;
16.  $y = -x^2 + 4$ ,  $y=0$ ; 17.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y=0, x=1, x=3$ ;
18.  $y = 2\sin x$ ,  $y=0$ ,  $x=0$  и  $x=\frac{\pi}{2}$ ; 19.  $x - y - 1 = 0$ ,  $x=-4, x=-2, y=0$ ;
20.  $y = -x^2 - 1$ ,  $x=1, x=4, x=0$ ; 21.  $y = x^2 - 6x$ ,  $x=0$ ;
22.  $y = x^2$ ,  $y=4, y=9, x=0$ ; 23.  $y = x^2$ ,  $y=2x$ ;
24.  $y = \sin x$ ,  $y=0$ , если  $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ; 25.  $y = 8 + 2x - x^2$ ,  $y = x + 6$

### 3. Вычислить длину дуги кривой

- $y = x^{\frac{3}{2}}$  от  $x=0$  до  $x=4$ ;
- $y = x^2 - 1$ , отсеченной осью  $Ox$ ;
- $y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$  от  $x=0$  до  $x=a$ ;
- $y = \ln \cos x$  от  $x=0$  до  $x=\frac{\pi}{6}$ ;
- $y = \ln \sin x$  от  $x=\frac{\pi}{3}$  до  $x=\frac{2\pi}{3}$ ;
- $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$  от  $x=1$  до  $x=e$ ;
- $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$  от  $x=-1$  до  $x=2$ ;
- $y = x^2$  от  $x=0$  до  $x=2$ ;
- $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ;
- $y = \ln \sin x$  от  $x=\frac{\pi}{3}$  до  $x=\frac{\pi}{2}$ ;
- $y = \left(\frac{2}{5}\right)x^4\sqrt{x} - \left(\frac{2}{3}\right)^4\sqrt{x^3}$  между точками пересечения с осью  $Ox$ .
- $y = \frac{x^2}{2}$  от  $x=0$  до  $x=1$ ;
- $y = 1 - \ln \cos x$  от  $x=0$  до  $x=\frac{\pi}{6}$ ;
- $x = \frac{t^3}{3} - t$ ,  $y = t^2 + 2$  от  $t=0$  до  $t=3$ ;
- $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  от  $t=0$  до  $t=\ln \pi$ ;
- $x = 8\sin t + 6\cos t$ ,  $y = 6\sin t - 8\cos t$  от  $t=0$  до  $t=\frac{\pi}{2}$ ;
- $x = 9(t - \sin t)$ ,  $y = 9(1 - \cos t)$ ;

18.  $y = x^{\frac{3}{2}}$  от  $x = 0$  до  $x = 4$ ;
19.  $y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$  от  $x = 0$  до  $x = a$ ;
20.  $y = \ln \cos x$  от  $x = 0$  до  $x = \frac{\pi}{6}$ ;
21.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$  от  $x = 1$  до  $x = e$ ;
22.  $y^2 = \frac{4}{9} (2-x)^3$  от  $x = -1$  до  $x = 2$ ;
23.  $y = x^2$  от  $x = 0$  до  $x = 2$ ;
24.  $x = e^t \cdot \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ;
25.  $y = \ln \sin x$  от  $x = \frac{\pi}{3}$  до  $x = \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой

1.  $y^2 = 2\rho x$ ,  $x = h$  вокруг оси  $Ox$ ;
2.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ , где  $x \geq 0$  вокруг оси  $Ox$ ;
3.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ , где  $x \geq 0$  вокруг оси  $Oy$ ;
4.  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$  вокруг оси  $Ox$ ;
5.  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $Ox$ ;
6.  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $Oy$ ;
7.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  вокруг оси  $Ox$ ;
8.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  вокруг оси  $Oy$ ;
9.  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  вокруг оси  $Ox$ ;
10.  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  вокруг оси  $Oy$ ;
11.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямой  $y = 0$ ;
12.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямой  $x = 0$ ;
13.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямой  $x = 2$ ;
14.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямой  $x = -2$ ;
15.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямой  $y = -1$ ;
16.  $y = x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг прямой  $y = 2$ ;
17.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг прямой  $y = 0$ ;
18.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг прямой  $x = 0$ ;
19.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг прямой  $y = -1$ ;
20.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг прямой  $x = 1$ ;
21.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг прямой  $x = -1$ ;
22.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг прямой  $y = 1$ ;
23.  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  вокруг прямой  $y = 0$ ;

24.  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  вокруг прямой  $x = 0$ ;  
 25.  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  вокруг прямой  $x = 2\pi$ .

**Критерии оценки:**

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

### Понятие двойного интеграла

**Пример. Вычислить двойной интеграл**

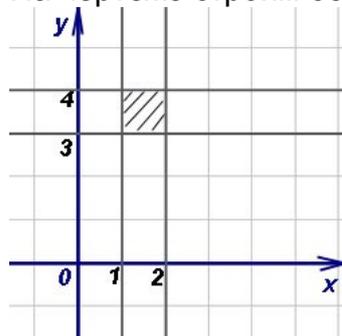
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^2} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2; 3 \leq y \leq 4\}.$$

**Решение.**

Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2}.$$

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая  $x$  константой. Получаем.

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2} &= \int_3^4 (x-y)^{-2} dy = \frac{1}{x-1} \Big|_3^4 = \\ &= \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}. \end{aligned}$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left( \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} \right) dx &= \int_1^2 \frac{dx}{x-4} - \int_1^2 \frac{dx}{x-3} = \\ &= [\ln(x-4) - \ln(x-3)] \Big|_1^2 = \\ &= [\ln(2-4) - \ln(2-3)] - \\ &= [\ln(1-4) - \ln(1-3)] = \\ &= [\ln(-2) - \ln(-1)] - [\ln(-3) - \ln(-2)] = \\ &= \ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Результат и будет решением данного двойного интеграла.

1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy, \text{ если область } D \text{ ограничена прямыми } x=0, x=1, y=0, y=\frac{3}{2}.$$

2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds, \text{ если область } D \text{ ограничена прямыми } y=x, y=0, x=1.$$

3. Вычислить двойной интеграл

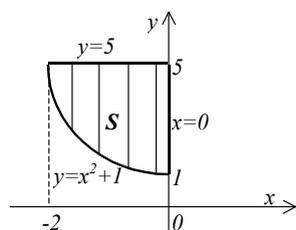
$$\iint_D (x^2 + xy + 2y^2) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x-1\}$$

4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; -4+x^2 \leq y \leq 4-x^2\}.$$

5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:  $x=0, y=5, y=x^2+1$ .

### Пример решения

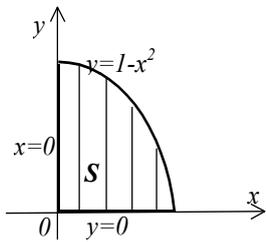


$$\begin{aligned} S &= \iint_S dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_{x^2+1}^5 dy = \left| \int_{x^2+1}^5 dy = y \Big|_{x^2+1}^5 = 5 - (x^2+1) = 4 - x^2 \right| = \\ &= \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx = \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0 = 0 - \left( 4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \frac{16}{3}; \end{aligned}$$

6. Вычислить массу плоской пластины ограниченной линиями  $x=0, y=0, y=1-x^2$ , если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки,  $\mu=x$ .

7. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=1-x^2$ ,  $\mu=\text{const}$ .

**Пример решения**



$$\iint_S \mu dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy = \left| \int_0^{1-x^2} dy = y \Big|_0^{1-x^2} = 1-x^2 \right| = \mu \int_0^1 (1-x^2) dx = \mu \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \mu ;$$

$$\iint_S x \mu dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} x dy = \left| \int_0^{1-x^2} x dy = xy \Big|_0^{1-x^2} = x(1-x^2) \right| = \mu \int_0^1 (x-x^3) dx = \mu \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \mu ;$$

$$\iint_S \mu dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} y dy = \left[ \int_0^{1-x^2} y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} = \frac{(1-x^2)^2}{2} = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right] = \mu \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \mu \left( \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15} \mu$$

$$x_c = \frac{\iint_S x \mu(x; y) dx dy}{\iint_S \mu(x; y) dx dy} = \frac{\frac{1}{4} \mu}{\frac{2}{3} \mu} = \frac{3}{8} ; \quad y_c = \frac{\iint_S y \mu(x; y) dx dy}{\iint_S \mu(x; y) dx dy} = \frac{\frac{4}{15} \mu}{\frac{2}{3} \mu} = \frac{2}{5} ;$$

4. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $x - 4 = 0$ .

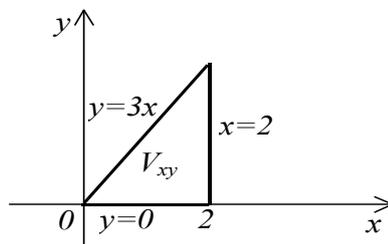
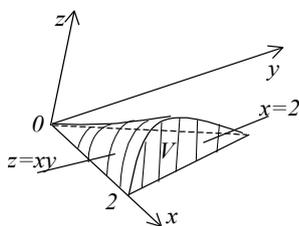
**Индивидуальные задания к разделу**  
**Понятие тройного интеграла**

1. Вычислить  $\iiint_V x^2 z dx dy dz$ , где V ограничена поверхностями:  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=3x$ ,  $z=0$ ,

$z=xy$ .

**Пример решения**

Первые четыре уравнения в пространстве задают плоскости, пятое – гиперболический параболоид.



Расставляем пределы интегрирования:

$$\iiint_V x^2 z dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{3x} dy \int_0^{xy} x^2 z dz$$

Последовательно вычисляем три определенных интеграла:

$$\int_0^{xy} x^2 z dz = x^2 \int_0^{xy} z dz = x^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} = x^2 \left( \frac{(xy)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{x^4 y^2}{2};$$

$$\int_0^{3x} \frac{x^4 y^2}{2} dy = \frac{x^4}{2} \int_0^{3x} y^2 dy = \frac{x^4}{2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{3x} = \frac{x^4}{2} \frac{27x^3}{3} = \frac{9x^7}{2};$$

$$\int_0^2 \frac{9x^7}{2} dx = \frac{9}{2} \int_0^2 x^7 dx = \frac{9}{2} \frac{x^8}{8} \Big|_0^2 = \frac{9}{2} \frac{256}{8} = 144; \text{ Таким образом:}$$

$$\iiint_V x^2 z dx dy dz = 144.$$

2. Вычислить массу тела ограниченного поверхностями  $x^2+y^2=z^2$ ,  $x^2+y^2=R^2$ ,  $z=0$ , ( $z \geq 0$ ), если его плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z = 0$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , если известна функция его плотности  $\rho(x, y, z) = 10x$ .

4. Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ;  $z^2 = x^2 + y^2$ ;  $y \geq 0$ , если известна функция его плотности  $\rho(x, y, z) = 70yz$ .

5. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями  $x + y + z = a$  ( $a > 0$ ),  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Выполнить чертежи данного тела и его проекции на плоскость  $XOY$ .

### 19.3.3 Темы рефератов и докладов

*Геометрические приложения определенного интеграла:*

1. Вычисление площади плоской фигуры
2. Вычисление длины дуги плоской кривой
3. Вычисление площади криволинейного сектора
4. Вычисление объемов
5. Вычисление площади поверхности вращения

*Физические приложения определенного интеграла:*

6. Вычисление пройденного пути
7. Вычисление работы с помощью определённого интеграла
8. Координаты центра тяжести
9. Статические моменты относительно координатных осей материальной кривой

*Численное интегрирование:*

10. Метод прямоугольников
11. Метод трапеций
12. Метод Симпсона
13. Метод Гаусса

### Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется за самостоятельно написанный реферат по теме; умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы;

- **оценка «хорошо»** ставится, если: реферат удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков: в изложении: допущены небольшие пробелы, не искажившие содержание реферата; допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию

преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя. В реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация;

- **оценка «удовлетворительно»** ставится, если: неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя; студент не может применить теорию в новой ситуации;

- **оценка «неудовлетворительно»** ставится, если: не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя; нарушена логика в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов; недостаточно сформированы навыки письменной речи; реферат является плагиатом других рефератов более чем на 90%.

### 19.3.8 Составление аннотированного каталога

Составить аннотированный каталог материалов информационно-образовательных ресурсов по одной из тем: курса (аннотация должна содержать не менее 3 предложений). Количество материалов – не менее 10.

Информационно-образовательные ресурсы:

– Научная электронная библиотека – <http://www.scholar.ru/>;

– Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>;

– Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;

– Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>;

– Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – <https://www.lektorium.tv/>;

– Электронно-библиотечная система «Издательства Лань» – <http://e.lanbook.com/>;

Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>.

№	Наименование материала	Информационно-образовательные ресурсы	Ссылка	Аннотация
1.				
2.				

### 19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах: *фронтальных опросов, контрольных работ, индивидуальных заданий, тестирование, рефератов, докладов.* Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.