


**МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
прикладной математики, информатики,
физики и методики их преподавания

 Е. А. Позднова

06.09.2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.ДВ.03.02 Элементы интегрального исчисления**

1. Код и наименование направления подготовки:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

2. Профили подготовки:

Математика. Информатика и информационные технологии в образовании

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма образования: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

6. Составитель программы:

Б.У. Шарипов, доктор техн. наук, доцент, Е.С. Мещерякова, преподаватель

7. Рекомендована:

научно-методическим советом факультета физико-математического и естественно-научного образования (протокол № 1 от 31.08.2017)

8. Учебный год: 2018-2019 **Семестр:** 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью дисциплины является обеспечение фундаментальной математической подготовки как основы будущей профессиональной деятельности; формирование мировоззрения и развитие личности будущего педагога.

Задачи дисциплины:

- дать представление о месте и роли интегрального исчисления в системе математических наук;
- ознакомление с понятиями и методами интегрального исчисления;
- ознакомление с математическими методами решения прикладных задач;
- воспитание математической культуры;
- формирование у студентов навыков работы с учебной, научной и научно-методической литературой.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина Элементы интегрального исчисления относится к Блоку 1 «Дисциплины (модули)» и является дисциплиной по выбору вариативной части ООП.

Для освоения дисциплины «Элементы интегрального исчисления» студенты используют знания, умения, навыки, сформированные в ходе изучения дисциплины «Математика» и цикла математических дисциплин в школе, и является необходимой основой для последующего изучения дисциплин: «Математический анализ», «Теория функций действительного переменного», «Методика обучения математике», «Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальные уравнения».

11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

Профессиональные (ПК): ПК-1.

В результате изучения дисциплины студент должен

Знать:

- основные понятия теории интегрального исчисления;
- основные свойства интегралов и методы их вычисления;
- формулы и теоремы, способы решения задач разных разделов дисциплины;
- геометрические и механические приложения интегралов;

Уметь:

- доказывать основные теоремы интегрального исчисления;
- выбирать метод решения для конкретной задачи;
- уметь решать задачу различными методами и выбирать наиболее рациональный.
- самостоятельно пополнять знания путем работы с учебной, научно-популярной и научной литературой.

Владеть:

- математической терминологией, используемой при решении задач;
- навыками решения задач.

12. Структура и содержание учебной дисциплины:

12.1 Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 5/ 180.

12.2 Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)		
	Всего	В том числе в интерактивной форме	По семестрам
			2
Аудиторные занятия, в том числе:	80	20	80
лекции	40	8	40
практические	40	12	40
Самостоятельная работа	64		64
Контроль	36		36
Итого:	180	20	180
Форма промежуточной аттестации			Экзамен

12.3. Содержание разделов дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Геометрические и механические приложения определённого интеграла	<p>Геометрические приложения определённого интеграла</p> <p>1. Вычисление площади плоской фигуры: – в прямоугольной системе координат XOY; – при параметрической форме задания линий, ограничивающих фигуру; – в полярной системе координат.</p> <p>2. Вычисление длины дуги плоской кривой: – в прямоугольной системе координат XOY; – в параметрической форме; – в полярной системе координат.</p> <p>3. Вычисление объёмов некоторых видов тел.</p> <p>4. Вычисление поверхностей тел вращения.</p> <p>Механические приложения определённого интеграла</p> <p>1. Вычисление работы силы.</p> <p>2. Вычисление статических моментов и центра масс дуги плоской кривой</p> <p>3. Вычисление давления жидкости на погружённую в неё пластину.</p>
2	Понятие двойного интеграла	<p>Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.</p> <p>Определение и простейшие свойства двойного интеграла.</p> <p>Некоторые приложения двойного интеграла.</p> <p>1. Вычисление площади плоской фигуры.</p> <p>2. Вычисление центра тяжести плоской пластины.</p> <p>3. Вычисление центра масс плоской пластины.</p>
3	Понятие тройного интеграла	<p>Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.</p> <p>Определение и простейшие свойства тройного интеграла.</p> <p>Некоторые приложения тройного интеграла</p> <p>1. Вычисление массы тела заданной плотности</p> <p>2. Вычисление координат центра тяжести объемного тела.</p>

12.4 Междисциплинарные связи

№ п/п	Наименование дисциплин учебного плана, с которыми организована взаимосвязь дисциплины рабочей программы	№ разделов дисциплины рабочей программы, связанных с указанными дисциплинами
1	Математический анализ	1-3
2	Алгебра и теория чисел	1-3
3	Избранные вопросы оптики и квантовой физики	2

4	Методика обучения математике	2
---	------------------------------	---

12.5. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Геометрические и механические приложения определённого интеграла	14	14		24	52
2.	Понятие двойного интеграла	16	16		22	54
3.	Понятие тройного интеграла	10	10		18	38
	Экзамен					36
	Итого:	40	40		64	180

13. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	Тиняков Г.П. Дополнительные главы математического анализа: учеб. пос.- М.: МГИУ, 2008
02	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.1: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008
03	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.2: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
04	Баврин И.И. Математический анализ: учеб. для вузов.- М.: Высшая школа, 2006
05	Виноградова И.А. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч.1: Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пос. для ун-тов, педвузов.- М.: Дрофа, 2001
06	Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2: Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. для вузов.- М.: Дрофа, 2003-2004

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
08	Кутузов, А.С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебное пособие / А.С. Кутузов. - 2-е изд. стер. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2017. - 127 с. - ISBN 978-5-4475-2976-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166 (30.08.2017)
09	Махова, Н.Б. Неопределенные и определенные интегралы : курс лекций / Н.Б. Махова, Ф.К. Мацур ; Министерство транспорта Российской Федерации, Московская государственная академия водного транспорта. - М. : Альтаир : МГАВТ, 2015. - 67 с. : ил., граф. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=429687 (30.08.2017)
10	Мельников, Р.А. Математический анализ (практическое руководство для решения индивидуальных заданий) : учебное пособие / Р.А. Мельников, С.А. Силкин, В.А. Филин ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», Министерство образования и науки Российской Федерации. - Елец : Елецкий государственный университет им И.А. Бунина, 2011. - 325 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-94809-520-2; [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272211 (30.08.2017)
11	Полькина, Е.А. Сборник заданий по высшей математике с образцами решений (математический анализ) : учебно-методическое пособие / Е.А. Полькина, Н.С. Стакун. - М. : Прометей, 2013. - 199 с. - ISBN 978-5-7042-2490-7 ; То же [Электронный ресурс]. -

14. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**Программное обеспечение:**

- Win10 (или WinXP, Win7), OfficeProPlus 2010
- браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer
- STDU Viewer version 1.6.2.0
- 7-Zip
- GIMP GNU Image Manipulation Program
- Paint.NET
- Tux Paint
- Adobe Flash Player

Набор демонстрационного оборудования (компьютер, экран настенный, проектор, колонки).

15. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю):

При реализации дисциплины используются **информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:**

- Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru>
- Единая коллекция Цифровых Образовательных Ресурсов – <http://school-collection.edu.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>

16. Формы организации самостоятельной работы:

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств научной информации;
- подготовка к практическим занятиям, коллоквиумам;
- подготовка докладов и рефератов;
- выполнение заданий из фонда оценочных средств для организации текущего контроля успеваемости обучающихся.

17. Перечень учебно-методического обеспечения для организации самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю):

- Алексеева Т.И. Основные понятия и теоремы математического анализа: учебно-метод. пособие. Ч. 2.- Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2010
- Далингер В.А. Избранные главы математического анализа в задачах: учеб. пос.- Омск: ООО «Амфора». 2010
- Дежин В.В. Введение в математический анализ: учеб. пос.- Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет», 2010
- Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пос. для вузов. - М.: Аст: Астрель, 2010
- Рязанова Е.А., Шарипов Б.У. Тестовый контроль знаний по математическому анализу (Часть 1): учебное пособие по организации самостоятельной работы студентов по направлению подготовки «Педагогическое образование», профиль

«Математическое образование» - Борисоглебск: ФГБОУ ВПО «Борисоглебский государственный педагогический институт», 2012.

- индивидуальные задания из фонда оценочных средств.

18. Критерии аттестации по итогам освоения дисциплины:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если студент свободно ориентируется в теоретическом материале; умеет изложить и корректно оценить различные подходы к излагаемому материалу, способен сформулировать и доказать собственную точку зрения; обнаруживает свободное владение понятийным аппаратом; демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и полное освоение показателей формируемых компетенций;

- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если студент хорошо ориентируется в теоретическом материале; имеет представление об основных подходах к излагаемому материалу; знает определения основных теоретических понятий излагаемой темы, в основном демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение большинства показателей формируемых компетенций;

- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент может ориентироваться в теоретическом материале; в целом имеет представление об основных понятиях излагаемой темы, частично демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение некоторых показателей формируемых компетенций;

- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не ориентируется в теоретическом материале; не сформировано представление об основных понятиях излагаемой темы, не демонстрирует готовность применять теоретические знания в практической деятельности и освоение показателей формируемых компетенций.

19. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля):

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Вводная лекция содержит информацию об основных разделах рабочей программы дисциплины; электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Обучающиеся должны иметь четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на аудиторские занятия и на самостоятельную работу;
- формах аудиторных занятий и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

В ходе лекционных занятий следует не только слушать излагаемый материал и кратко его конспектировать, но очень важно участвовать в анализе

примеров, предлагаемых преподавателем, в рассмотрении и решении проблемных вопросов, выносимых на обсуждение.

Основные определения важнейших понятий, особенно при отсутствии единства в трактовке тех или иных понятий среди ученых, лучше записать. Не следует пренебрегать примерами, зачастую именно записанные примеры помогают наполнить опорный конспект живым содержанием и облегчают его понимание.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения основную литературу, просмотреть и дополнить конспекты лекции, ознакомиться с дополнительной литературой – это поможет усвоить и закрепить полученные знания. Кроме того, к каждой теме в планах практических занятий даются практические задания, которые также необходимо выполнить самостоятельно во время подготовки к занятию.

Обязательно следует познакомиться с критериями оценивания каждой формы контроля (реферата, теста и т.д.) – это поможет избежать недочетов, снижающих оценку за работу.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Направление подготовки: 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)

Профили подготовки: Математика. Информатика и информационные
технологии в образовании

Квалификация выпускника: бакалавр

**Паспорт
фонда оценочных средств
по учебной дисциплине**

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. В результате изучения учебной дисциплины «Элементы интегрального исчисления» обучающийся должен:

1.1 Знать:

- основные понятия теории интегрального исчисления;
- основные свойства интегралов и методы их вычисления;
- формулы и теоремы, способы решения задач разных разделов дисциплины;
- геометрические и механические приложения интегралов;

1.2 Уметь:

- доказывать основные теоремы интегрального исчисления;
- выбирать метод решения для конкретной задачи;
- уметь решать задачу различными методами и выбирать наиболее рациональный.
- самостоятельно пополнять знания путем работы с учебной, научно-популярной и научной литературой.

1.3 Владеть:

- математической терминологией, используемой при решении задач;
- навыками решения задач.

2. Программа оценивания контролируемой компетенции

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы, (темы) дисциплины, их наименование	Код контролируемой компетенции (или её части)	Наименование оценочного средства
1	Геометрические и механические приложения определённого интеграла	ПК-1	индивидуальное задание
2	Понятие двойного интеграла	ПК-1	индивидуальное задание, реферат
3	Понятие тройного интеграла	ПК-1	индивидуальное задание
Промежуточная аттестация – экзамен		ПК-1	КИМ, вопросы к экзамену

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Кафедра прикладной математики,
информатики, физики и
методики преподавания

Вопросы к экзамену по дисциплине «Элементы интегрального исчисления»

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Определение определенного интеграла.
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
6. Вычисление определенного интеграла.
7. Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла.
8. Замена переменной в определенном интеграле.
9. Интегрирование по частям.
10. Методы приближенного вычисления определенного интеграла.
11. Геометрические приложения определенного интеграла.
12. Механические приложения определенного интеграла.
13. Двойные интегралы, определения, их основные свойства.
14. Тройные интегралы, определения, их основные свойства.
15. Приложения двойного интеграла.
16. Приложения тройного интеграла.

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если студент отлично ориентируется в теоретическом материале; умеет изложить и корректно оценить различные подходы к излагаемому материалу, способен сформулировать и доказать собственную точку зрения; обнаруживает свободное владение понятийным аппаратом, умеет применять теоретические знания к решению задач;

- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если студент хорошо ориентируется в теоретическом материале; имеет представление об основных подходах к излагаемому материалу; знает определения основных теоретических понятий излагаемой темы, умеет применять теоретические знания к решению задач;

- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент может ориентироваться в теоретическом материале; в целом имеет представление об основных понятиях излагаемой темы, в целом умеет применять теоретические знания к решению задач;

- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не ориентируется в теоретическом материале; не сформировано представление об основных понятиях излагаемой темы.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Кафедра прикладной математики,
информатики, физики и
методики их преподавания

**Примеры типовые задания для организации индивидуальной работы
(индивидуальные задания) по дисциплине «Элементы интегрального
исчисления»**

**Индивидуальные задания к разделу
Геометрические и механические приложения определённого интеграла**

1. Вычислить интегралы

$$1. \int_0^2 (3x^2 - 1) dx; \quad 2. \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx; \quad 3. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx; \quad 6. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx;$$

$$7. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx; \quad 8. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad 9. \int_0^2 x(3-x) dx;$$

$$10. \int_0^{\pi} \sin 2x dx; \quad 11. \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx; \quad 12. \int_0^e \ln x dx;$$

$$13. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad 14. \int_1^0 \ln^2 x dx; \quad 15. \int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx;$$

$$16. \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx; \quad 17. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad 18. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x};$$

$$19. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; \quad 20. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx; \quad 21. \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$$

$$22. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}; \quad 23. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx; \quad 24. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx;$$

$$25. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

$$1. y = 4 - x^2, y = 0; \quad 2. y^2 = 2\rho x, x = h; \quad 3. y = \ln x, x = e, y = 0;$$

$$4. y = x^2, y = 2 - x^2; \quad 5. y = x^2, y = 1; \quad 6. y = \cos^2 x - \sin^2 x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4};$$

7. $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$; 8. $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$;
 9. $y = \arcsin 2x$, $x = 0$, $y = -\frac{\pi}{2}$; 10. $y = \sin 2x$, $y = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
 11. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$; 12. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$;
 13. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; 14. $y = |x^2 - 1|$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;
 15. $y = x^2 - 2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$ и отрезком $[-1, 2]$ оси ox ;
 16. $y = -x^2 + 4$, $y = 0$; 17. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
 18. $y = 2\sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$; 19. $x - y - 1 = 0$, $x = -4$, $x = -2$, $y = 0$;
 20. $y = -x^2 - 1$, $x = 1$, $x = 4$, $x = 0$; 21. $y = x^2 - 6x$, $x = 0$;
 22. $y = x^2$, $y = 4$, $y = 9$, $x = 0$; 23. $y = x^2$, $y = 2x$;
 24. $y = \sin x$, $y = 0$, если $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$; 25. $y = 8 + 2x - x^2$, $y = x + 6$

3. Вычислить длину дуги кривой

- $y = x^{\frac{3}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 4$;
- $y = x^2 - 1$, отсеченной осью Ox ;
- $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ от $x = 0$ до $x = a$;
- $y = \ln \cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;
- $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$;
- $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ от $x = 1$ до $x = e$;
- $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x = -1$ до $x = 2$;
- $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$;
- $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
- $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$;
- $y = \left(\frac{2}{5}\right)x^4\sqrt{x} - \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox .
- $y = \frac{x^2}{2}$ от $x = 0$ до $x = 1$;
- $y = 1 - \ln \cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;
- $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ от $t = 0$ до $t = 3$;
- $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = \ln \pi$;

16. $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$;

17. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$;

18. $y = x^{\frac{3}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 4$;

19. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ от $x = 0$ до $x = a$;

20. $y = \ln \cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;

21. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ от $x = 1$ до $x = e$;

22. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x = -1$ до $x = 2$;

23. $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$;

24. $x = e^t \cdot \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

25. $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой

1. $y^2 = 2\rho x$, $x = h$ вокруг оси Ox ;

2. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг оси Ox ;

3. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг оси Oy ;

4. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ вокруг оси Ox ;

5. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Ox ;

6. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oy ;

7. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг оси Ox ;

8. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг оси Oy ;

9. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг оси Ox ;

10. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oy ;

11. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $y = 0$;

12. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $x = 0$;

13. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $x = 2$;

14. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $x = -2$;

15. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $y = -1$;

16. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг прямой $y = 2$;

17. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $y = 0$;

18. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $x = 0$;

19. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $y = -1$;

20. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $x = 1$;
 21. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $x = -1$;
 22. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг прямой $y = 1$;
 23. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ вокруг прямой $y = 0$;
 24. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ вокруг прямой $x = 0$;
 25. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ вокруг прямой $x = 2\pi$.

Индивидуальные задания к разделу
Понятие двойного интеграла

Пример. Вычислить двойной интеграл

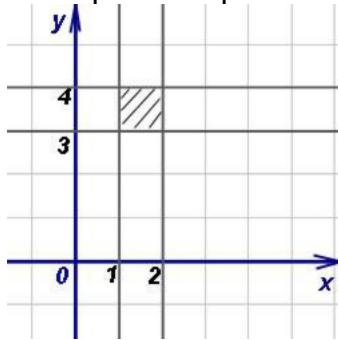
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^2} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2; 3 \leq y \leq 4\}.$$

Решение.

Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2}.$$

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая x константой.

Получаем.

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2} &= \int_3^4 (x-y)^{-2} dy = \frac{1}{x-1} \Big|_3^4 = \\ &= \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}. \end{aligned}$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x-4} - \int_1^2 \frac{dx}{x-3} = \\
& = \left[\ln(x-4) - \ln(x-3) \right]_1^2 = \\
& = \left[\ln(2-4) - \ln(2-3) \right] - \\
& - \left[\ln(1-4) - \ln(1-3) \right] = \\
& = \left[\ln(-2) - \ln(-1) \right] - \left[\ln(-3) - \ln(-2) \right] = \\
& = \ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}\right) = \\
& = \ln\left(\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

Результат и будет решением данного двойного интеграла.

1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy,$$

если область D ограничена прямыми

$$x=0, x=1, y=0, y=\frac{3}{2}.$$

2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds$$

, если область D ограничена прямыми $y=x, y=0, x=1$.

3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (x^2 + xy + 2y^2) dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x-1\}$$

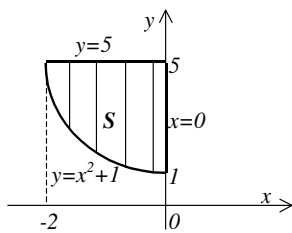
4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D dx dy,$$

где $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; -4+x^2 \leq y \leq 4-x^2\}$.

5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $x=0, y=5, y=x^2+1$.

Пример решения

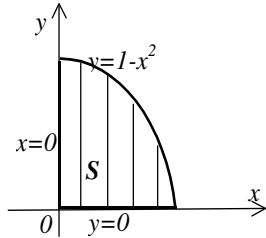


$$\begin{aligned}
S &= \iint_S dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_{x^2+1}^5 dy = \left| \int_{x^2+1}^5 dy = y \Big|_{x^2+1}^5 = 5 - (x^2+1) = 4 - x^2 \right| = \\
&= \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0 = 0 - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \frac{16}{3};
\end{aligned}$$

6. Вычислить массу плоской пластины ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=1-x^2$, если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки, $\mu=x$.

7. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=1-x^2$, $\mu=\text{const}$.

Пример решения



$$\iint_S \mu dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy = \left| \int_0^{1-x^2} dy = y \Big|_0^{1-x^2} = 1-x^2 \right| =$$

$$\mu \int_0^1 (1-x^2) dx = \mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \mu ;$$

$$\iint_S x \mu dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} x dy = \left| \int_0^{1-x^2} x dy = xy \Big|_0^{1-x^2} = x(1-x^2) \right| = \mu \int_0^1 (x-x^3) dx = \mu \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \mu ;$$

$$\iint_S \mu dx dy = \mu \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} y dy = \left[\int_0^{1-x^2} y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} = \frac{(1-x^2)^2}{2} = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right] = \mu \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \mu \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15} \mu$$

$$x_c = \frac{\iint_S x \mu(x; y) dx dy}{\iint_S \mu(x; y) dx dy} = \frac{\frac{1}{4} \mu}{\frac{2}{3} \mu} = \frac{3}{8} ;$$

$$y_c = \frac{\iint_S y \mu(x; y) dx dy}{\iint_S \mu(x; y) dx dy} = \frac{\frac{4}{15} \mu}{\frac{2}{3} \mu} = \frac{2}{5} ;$$

4. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $x - 4 = 0$.

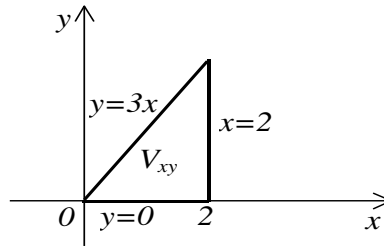
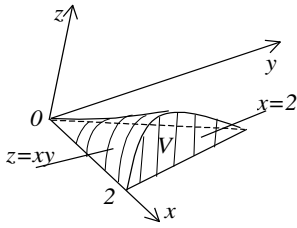
Индивидуальные задания к разделу Понятие тройного интеграла

1. Вычислить $\iiint_V x^2 z dx dy dz$, где V ограничена поверхностями: $x=0$, $y=0$, $y=3x$,

$z=0$, $z=xy$.

Пример решения

Первые четыре уравнения в пространстве задают плоскости, пятое – гиперболический параболоид.



Расставляем пределы интегрирования:

$$\iiint_V x^2 z dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{3x} dy \int_0^{xy} x^2 z dz$$

Последовательно вычисляем три определенных интеграла:

$$\int_0^{xy} x^2 z dz = x^2 \int_0^{xy} z dz = x^2 \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{xy} = x^2 \left(\frac{(xy)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{x^4 y^2}{2};$$

$$\int_0^{3x} \frac{x^4 y^2}{2} dy = \frac{x^4}{2} \int_0^{3x} y^2 dy = \frac{x^4}{2} \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{3x} = \frac{x^4}{2} \frac{27x^3}{3} = \frac{9x^7}{2};$$

$$\int_0^2 \frac{9x^7}{2} dx = \frac{9}{2} \int_0^2 x^7 dx = \frac{9}{2} \left. \frac{x^8}{8} \right|_0^2 = \frac{9}{2} \frac{256}{8} = 144; \text{ Таким образом:}$$

$$\iiint_V x^2 z dx dy dz = 144.$$

2. Вычислить массу тела ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$, ($z \geq 0$), если его плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2z$, $z=0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, если известна функция его плотности $\rho(x, y, z) = 10x$.

4. Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $y \geq 0$, если известна функция его плотности $\rho(x, y, z) = 70yz$.

5. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a$ ($a > 0$), $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Выполнить чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY .

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;

- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Кафедра прикладной математики,
информатики, физики и
методики их преподавания

**Темы докладов и рефератов по дисциплине «Элементы интегрального
исчисления»**

Геометрические приложения определенного интеграла:

1. Вычисление площади плоской фигуры
2. Вычисление длины дуги плоской кривой
3. Вычисление площади криволинейного сектора
4. Вычисление объемов
5. Вычисление площади поверхности вращения

Физические приложения определенного интеграла:

6. Вычисление пройденного пути
7. Вычисление работы с помощью определённого интеграла
8. Координаты центра тяжести
9. Статические моменты относительно координатных осей
материальной кривой

Численное интегрирование:

10. Метод прямоугольников
11. Метод трапеций
12. Метод Симпсона
13. Метод Гаусса