МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

_________________Е.А. Позднова
04.02.2016г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки: Информатика и информационные технологии в образовании

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Паспорт
фонда оценочных средств

по учебной дисциплине
ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. В результате изучения Элементов абстрактной и компьютерной алгебры обучающийся должен:

1.1. Знать:

– определения и свойства бинарных отношений на множестве, их связь с разбиениями множества;
– определения и свойства основных алгебраических структур;
– строение конечных полей (полей Галуа) и простых алгебраических расширений;
– задачи теории кодирования;
– основные виды кодирования информации;
– основные алгоритмы кодирования и декодирования.

1.2. Уметь:

– описывать строение конечных расширений;
– представлять элементы полей Галуа конечными числовыми последовательностями и многочленами над двоичным полем;
– осуществлять кодирование и декодирование информации с помощью различных алгоритмов;
– устанавливать связи математических понятий с соответствующими понятиями информатики и определять характер этих связей.

1.3. Владеть:

– теоретическими основами абстрактной алгебры;
– математическим аппаратом абстрактной алгебры при постановке, анализе и решении задач теории кодирования;
– основными алгоритмами сжатия, кодирования и декодирования информации.

2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

Текущая аттестация	Контролируемые модули, разделы (темы) дисциплины и их наименование*	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства**
1	Раздел 1. Введение Раздел 2. Бинарные отношения и их свойства Раздел 3. Алгебры, алгебраические системы	ОК-3, ПК-4	Индивидуальные задания Разноуровневые задачи и задания
2	Раздел 4. Теория делимости в кольце целых чисел Раздел 5. Кольцо многочленов от одной переменной	ОК-3, ПК-4	Индивидуальные задания Разноуровневые задачи и задания
3	Раздел 6. Расширения полей Раздел 7. Конечные поля	ОК-3, ПК-4	Контрольная работа
4	Раздел 8. Первоначальные представления о теории кодирования Раздел 9. Представление символьных данных в компьютере	ОК-3, ПК-4	Индивидуальные задания Разноуровневые задачи и задания
Промежуточная аттестация		ОК-3, ПК-4	Комплект КИМ

Приложение 1

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

по дисциплине ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Тема Алгебры, алгебраические системы

Задание 1. Доказать, что множество А образует абелеву группу по операции обычного сложения, если:

$$A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}.$$

Тема Теория делимости в кольце целых чисел

Задание 2. Доказать, что числа $27x + 4$ и $18x + 3$ взаимно простые при любом натуральном x.

Темы Расширения полей. Конечные поля

Задание 3. Найти все элементы поля Галуа $GF(5)$.

Тема Расширения полей

Задание 4. Описать строение расширения поля рациональных чисел $Q(\alpha)$, если $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{5}}.$

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 5.(дополнительное). Определить λ так, чтобы один из корней уравнения $x^3 - 7x + \lambda = 0$ равнялся удвоенному другому.

Вариант 2

Тема Алгебры, алгебраические системы

Задание 1. Доказать, что множество А квадратных матриц второго порядка образует абелеву группу по операции сложения матриц, если:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z \right\}.$$

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 2. Построить многочлены наименьшей степени, который имеет двойной корень 1, простые корни 2 и $1+i$ над полями С и R.

Темы Расширения полей. Конечные поля

Задание 3. Найти все элементы поля Галуа $GF(6)$.

Тема Расширения полей

Задание 4. Описать строение расширения поля рациональных чисел $Q(\alpha)$, если $\alpha = \sqrt[3]{3}$

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 5.(дополнительное). Образуют ли корни уравнения $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ арифметическую прогрессию?

Вариант 3

Тема Алгебры, алгебраические системы

Задание 1. Доказать, что множество А квадратных матриц второго порядка образует абелеву группу по операции сложения матриц, если:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z \right\}.$$

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 2. Построить многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, имеющий корни $1,\ 2,\ 3i$.

Темы Расширения полей. Конечные поля

Задание 3. Найти все элементы поля Галуа $GF(7)$.

Тема Расширения полей

Задание 4. Описать строение расширения поля рациональных чисел $Q(\alpha)$, если $\alpha = \sqrt{2} - \sqrt{5}$

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 5.(дополнительное). В уравнении $x^2 - 2x + c = 0$ определить значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2 - 4x_1 - 47.$

Вариант 4

Тема Алгебры, алгебраические системы

Задание 1. Доказать, что множество А образует абелеву группу по операции обычного сложения, если:

$$A = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q\}.$$

Тема Алгебры, алгебраические системы

Задание 2. Какими свойствами обладает алгебраическая операция $\circ$ на множестве А, если

$$A = Z,\ (\forall a, b \in Z)(a \circ b = a + b + 3).$$

Темы Расширения полей. Конечные поля

Задание 3. Найти все элементы поля Галуа $GF(7)$.

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 4. Построить многочлены наименьшей степени по данным корням: простой корень 3, двойной корень $2 - i$ над полями C и R.

Тема Кольцо многочленов от одной переменной

Задание 5.(дополнительное). Не решая уравнения $x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0,$ найти, при каком значении a один из корней в 2 раза больше другого.

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если выполнены 4 или 5 заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если выполнены 4 задания с недочётами или полностью 4 задания;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если выполнены 3 задания с серьёзными недочётами заданий или полностью 2 задания;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если выполнено менее 2 заданий.

Приложение 2

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

КОМПЛЕКТ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

по дисциплине ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

ТЕМА ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

Задание 1. Зашифровать следующие фразы, используя:
a. шифр Цезаря со сдвигом вниз на 2 позиции;
b) кольцо классов вычетов по mod32;
c) ключевое слово из 6 букв;
d) шифр Тритемиуса с ключевым словом из предыдущего задания:

1. Человеку не хватает мудрости успокоиться на достигнутом.
2. Забота об излишнем часто соединяется с потерей необходимого.
3. Самый глупый может спросить больше, чем самый умный может ответить.
4. На всякого мудреца довольно простоты.
5. Мудр не тот, кто знает много, а тот, чьи знания полезны.
6. Разумный гонится не за тем, что приятно, а за тем, что избавляет от неприятностей.
7. Правители нуждаются в мудрецах значительно больше, чем мудрецы в правителях.
8. Интеллект - это то, что иногда встречается и у других.
9. Некоторые вещи недоступны человеческому уму, но мы не знаем какие.
10. Об уме человека легче судить по его вопросам, чем по его ответам.
11. Если умники обманывают ожидания, это еще не значит, что дураки спасут мир.
12. Тот, кто настойчиво повторяет, что он не дурак, обычно не полностью в этом уверен.
13. Гораздо легче стать умным, чем перестать быть дураком.

Задание 2. Построить для фразы из задания 1 код Шеннона – Фано.

Задание 3. Зашифровать текст, используя подстановочные шифры:

1. Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало,
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

2. Общаясь с дураком, не оберёшься срама,
Поэтому совет ты выслушай Хайяма:
Яд, мудрецом тебе предложенный, прими,
Из рук же дурака не принимай бальзама.

3. Нет у мира начала, конца ему нет,
Мы уйдём навсегда - ни имён, ни примет.
Этот мир был до нас и вовеки пребудет,
После нас простоит ещё тысячу лет.

4. Я научу тебя, как всем прийтись по нраву,
Улыбки расточай налево и направо,
Евреев, мусульман и христиан хвали -
И добрую себе приобретёшь ты славу.

5. Счастье смелым даётся, не любит тихонь,
Ты за счастье и в воду иди и в огонь.

Перед богом равны и бунтарь и покорный,
Не зевай - своё счастье не проворонь.

6. Ты сегодня не властен над завтрашним днем,
Твои замыслы завтра развеются сном!
Ты сегодня живи, если ты не безумен.
Ты -- не вечен, как все в этом мире земном.

7. Всем сердечным движениям волю давай,
Сад желаний возделывать не уставай,
Звездной ночью блаженствуй на шелковой травке:
На закате -- ложись, на рассвете вставай.

8. Муж ученый, который мудрее муллы,
Но бахвал и обманщик, -- достоин хулы.
Муж, чье слово прочнее гранитной скалы, -
Выше мудрого, выше любой похвалы!

9. Утром роза раскрыла под ветром бутон,
И запел соловей, в ее прелесть влюблен.
Сядь в тени. Этим розам цвести еще долго,
Когда будет наш горестный прах погребен.

10. Меняем реки, страны, города…
Иные двери… Новые года…
А никуда нам от себя не деться,
А если деться — только в никуда..

11. Лучше впасть в нищету, голодать или красть,
Чем в число блюдолизов презренных попасть,
Лучше кости глодать, чем прельстица страстям,
За столом у мерзавцев, имеющих власть…

12. К тайнам ты не пускай подлеца — их скрывай,
И секреты храни от глупца — их скрывай,
Посмотри на себя меж людей проходящих,
О надеждах молчи до конца — их скрывай!

13. И с другом и с врагом ты должен быть хорош!
Кто по натуре добр, в том злобы не найдешь.
Обидишь друга — наживешь врага ты
Врага обнимешь — друга наживешь.

Задание 4. Построить код Шеннона - Фано для фразы:

1. Кукушка кукушонку купила капюшон, как в капюшоне кукушонок смешон.
2. Рапортовал, да не дорапортовал, а стал дорапортовывать – зарапортовался.
3. Ехал Грека через реку, видит Грека в реке рак.
4. Два щенка щека к щеке грызли щетку в уголке.
5. На дворе трава, на траве дрова, не руби дрова на траве двора.
6. Либо дождик, либо снег, либо будет, либо нет.
7. Шла Саша по шоссе и сосала сушку.
8. Шел козел с косой козой, шла коза с босым козлом.
9. Сшит колпак не по-колпаковски, никто его не переколпакует, не перевыколпакует.
10. Корабли лавировали, лавировали, да не вылавировали.
11. Мачо на ранчо в пончо ест лечо и харчо.
12. Рубль девальвировал, девальвировал, да не выдевальвировал.
13. Слабый пол сильнее сильного в силу слабости сильного пола к слабому.

Задание 5. Определить частоты появления букв в поговорке, построить кодовое дерево и код Хаффмена, найти среднюю длину кодовых слов для фразы из задания 4.

ТЕМЫ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА. АЛГЕБРЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Задача 1. Рассмотрим множество G монотонных строго возрастающих числовых функций на отрезке [1,−1] и введем на этом множестве операцию композиции функций:

$$(\forall f, g \in G): \quad (f * g)(x) = f(g(x)),\ x \in [-1, 1].$$

Покажите, что $\langle G, * \rangle$ — группа. Что является нейтральным элементом этой группы? Что представляет собой обратный элемент?

Задача 2. (Группа переключателей). Назовем *переключателем* электрическую схему, имеющую три входа и три выхода, соединенные попарно в некотором порядке. Таких переключателей всего шесть (рис.1).

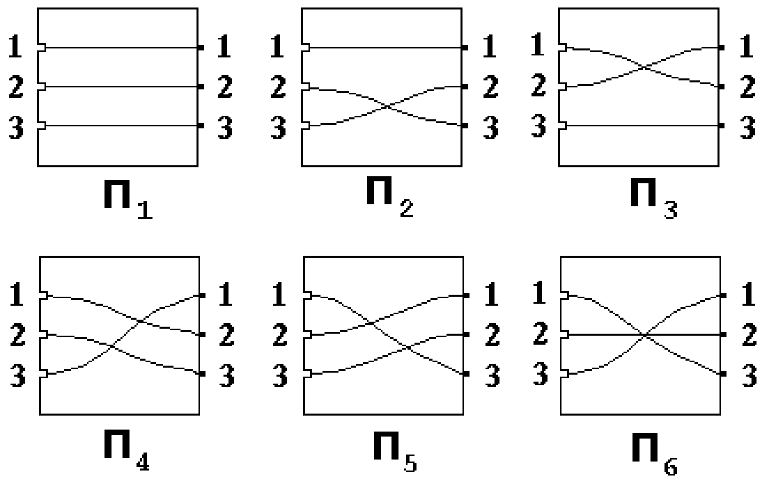


Рис. 1. Шесть переключателей

На множестве переключателей определим операцию «*» соединения переключателей. Например, в результате соединения переключателей $П_2$ и $П_3$ (рис. 2) вход 1 будет соединен с выходом 2, вход 2 - с выходом 3, вход 3 - с выходом 1. Точно такое же соответствие между входами и выходами осуществляет переключатель $П_5$.

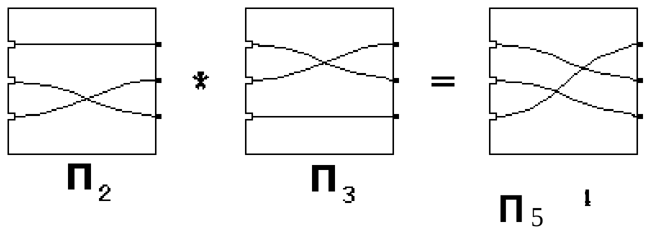


Рис.2. Результат соединения двух переключателей

Поэтому можно записать: $П_2 * П_3 = . П_5$.

Доказать, что множество переключателей относительно операции «*» соединения переключателей образует группу. Будет ли эта группа абелевой?

Задача 3 (о наследовании признака).

(Занимательная задача, связанная со свойствами бинарных алгебраических операций)

Пусть имеется конечное множество *M* простейших существ, каждое из которых обладает одним из признаков *A, B, C*. Пусть, например, эти признаки характеризуют форму глаз: соответственно круглые, квадратные и треугольные. Известно, что в результате слияния двух существ *X* и *Y* получается одно новое существо *Z*. При этом наследование формы глаз осуществляется по закону «*» описанному таблицей на рисунке 5.

	●	■	▲
●	●	■	▲
■	■	▲	●
▲	▲	●	■

Рис. 5. Таблица для операции наследования

В результате эволюции существ остается одно существо.

Доказать, что форма глаз оставшегося существа не зависит от того, в каком порядке сливаются существа.

Задача 4. К кубику Рубика применили последовательность поворотов. Доказать, что применяя ее несколько раз, можно привести кубик в начальное состояние.

Задача 5. Доказать, что множество всех наборов фиксированной длины *n,* составленных из 0 и 1, образует аддитивную группу по операции суммирования по модулю два. Что представляет собой элемент, противоположный произвольному элементу a этой группы?

Задача 6. Всякий изоморфизм групп является биективным отображением одной группы на другую. Верно ли, что всякое биективное отображение одной группы на другую является их изоморфизмом?

Задача 7. Восстановить цепочку понятий между понятиями «отображение» и «изоморфизм групп», в которой каждое следующее понятие образуется из предыдущего через видовое отличие.

Задача 8. Доказать, что алгебраические системы изоморфны:

$$2Z = \langle \{0, 2, ..., 2n, ...\}; +; \square \rangle \text{ и } 3Z = \langle \{0, 3, ..., 3n, ...\}; +; \square \rangle.$$

Задача 9. Доказать, что алгебраические системы не изоморфны:
a) $\langle \mathbf{N}; + \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}; + \rangle$;
b) $\langle \mathbf{R}; + \rangle$ и $\langle \mathbf{Q}; + \rangle$;
c) $\langle \mathbf{Z}; (+ \bmod 3) \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}; * \ (\cdot \bmod 3) \rangle$ (*сложение и умножение по mod3 на множестве Z).*

Задача 10. Проверить, изоморфны или нет алгебраические системы:
a) $\langle \mathbf{Z}; + \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}; - \rangle$;
b) $\langle \mathbf{Z}; +; \square \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}; +; \square \rangle$;
c) $\langle \mathbf{Z}; -; \square \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}; -; \square \rangle$;
d) $\langle \mathbf{Z}; \cdot; \square \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}; \cdot; \square \rangle$.

ТЕМА ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Задача 1. Пусть a, b, c, d - различные цифры. Доказать, что число cdcdcdcd не делится на число aabb.`

Задача 2. Число при некоторой перестановке своих цифр удваивается. Доказать, что оно делится на 9.

Задача 3. Найти натуральные числа, дающие при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 остаток 1 и, кроме того, делящиеся на 7.

Задача 4. Фишка стоит на одном из полей бесконечной в обе стороны клетчатой полоски бумаги. Она может сдвигаться на m полей вправо или на n полей влево. При каких m и n она сможет переместиться в соседнюю справа клетку? За какое наименьшее число ходов она сможет это сделать?

Задача 5. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

Задача 6. Пусть a, m, n - натуральные числа, a>1.
Доказать, что:

$$\text{а) НОД}\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a-1\right) = \text{НОД}(m, a-1)$$

$$\text{б) НОД}(a^m-1, a^n-1) = \text{НОД}a^{(m,n)}-1.$$

Задача 7. Доказать, что

$$\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(5a+3b, 13a+8b).$$

Задача 8. Пусть d и m - натуральные числа. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} НОД(x, y) = d; \\ НОК(x, y) = h \end{cases}$$

разрешима тогда и только тогда, когда m делится на d.

Задача 9. Доказать, что если НОК(a, a+5)=НОК(b, b+5), где a и b – натуральные числа, то a = b.

Задача 10. Может ли НОК(a, b) = НОК(a+c, b+c), если a, b, c – натуральные числа?

Задача 11. На юбилей 57 школы Московский Монетный Двор выпустил юбилейные монеты достоинством в 57 копеек. А на юбилей 239 школы монеты достоинством в 239 копеек выпустил Санкт-Петербургский Монетный Двор. Чтобы никому не было обидно, количество денег, выпущенных оба раза, было одинаково. Смогут ли Олег и 36 его друзей разделить все выпущенные монеты так, чтобы каждому досталось одинаковое количество монет?

Задача 12. Пусть d = НОД(1819, 3587). Найти d и целые числа x, y такие, что:

$$1819x+3587y=d .$$

Задача 13. Записать в виде конечной цепной дроби:

a) $\frac{135}{279}$; b) $\frac{103993}{33102}$; c) 2,98976; d) $-\frac{187}{63}$.

Задача 14. Разложить простую дробь в цепную дробь и найти ее подходящие дроби.

a) $\frac{247}{74}$; b) $\frac{333}{100}$; c) $\frac{103993}{33102}$; d) $\frac{77}{187}$

Задача 15. Сократить дробь:

a) $\frac{3953}{871}$; b) $\frac{10027}{32671}$; c) $\frac{11281}{6583}$.

Задача 16. Найдите первые четыре подходящие дроби разложения в цепную дробь числа π=3,14159265…

Задача 17. Преобразуйте в обыкновенную дробь следующие цепные дроби:
a) (2, 1, 1, 2, 1, 6, 2, 5); b) (2, 3, 1, 6, 4); c) (1, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 1, 5);
d) (0, 3, 1, 2, 7).

Задача 18. Разложить в цепную дробь и заменить подходящей дробью с точностью до 0,001 следующие числа:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{32}$; c) $\frac{1321}{382}$; d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Задача 19. Найти действительные числа, которые обращаются в данные цепные дроби: a) [4; 3, 2, 1]; b) [0; 2, 1].

Задача 20. Решить в целых числах уравнения:

a) 143x+169y=5; b) 2x+5y=7; c) 23x+49y=53;
d) 127x - 52y + 1 = 0; e) 6x + 10y - 7z = 11.

Задача 21. Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе – 17.
Задача 22.
Решить уравнения Пелля: a) $x^2-26y^2=1$; b) $x^2-19y^2=1$.

Задача 23. Пусть p и q - простые числа, большие 3. Доказать, что p^2-q^2 делится на 24.

Задача 24. Доказать, что доля любого натурального n>2, одно из чисел 2^n-1 или 2^n+1 является составным.

Задача 25. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы число 454** делилось на 2, 7 и 9?

Задача 26. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

Задача 27. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.

Задача 28. Доказать, что всякое число вида $19\,8^{n}+17$, где n=1,2,3,… - составное.

Задача 29 (о Восточном календаре). В китайской натурофилософии выделяются пять первоэлементов природы — дерево, огонь, металл, вода и земля, которым соответствуют пять цветов — синий (или зеленый), красный, белый, черный и желтый. В восточном календаре с древних времен используется 12-летний животный цикл так, что каждому из 12 годов в цикле соответствует одно из животных. Кроме того, каждый год проходит под покровительством одной из стихий и окрашивается в один из цветов:
- годы, оканчивающиеся на 0 и 1 — годы металла (цвет белый);
- годы, оканчивающиеся на 2 и 3 — это годы воды (цвет черный);
- годы, оканчивающиеся на 4 и 5 — годы дерева (цвет синий);
- годы, оканчивающиеся на 6 и 7 — годы огня (цвет красный);
- годы, оканчивающиеся на 8 и 9 — годы земли (цвет желтый).

В 60-летнем календарном цикле каждое животное возникает 5 раз. С помощью китайской теоремы об остатках объясните, почему оно все 5 раз бывает разного цвета.

Задача 30. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

Задача 31. Целые числа a и b таковы, что 56a = 65b. Докажите, что a + b - составное число.

Задача 32. Существуют ли натуральные числа такие, что дроби $\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b}, \frac{a+1}{b+1}$ несократимы?

Задача 33. Доказать, что (bc, ac, ab) делится на $(a, b, c)^2$.

Задача 34. Известно, что a^2+b^2 делится на ab, где a и b - натуральные числа. Доказать, что a=b.

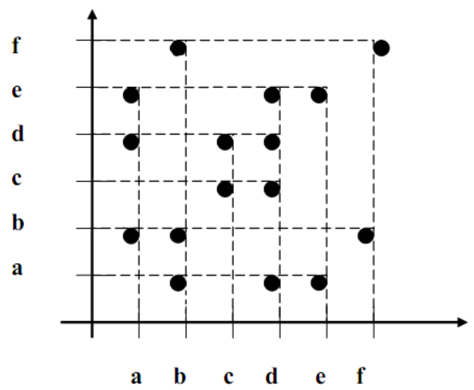
Задача 35. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q взаимно просты). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

Задача 36. Фома и Ерема нашли на дороге по пачке 11-рублевок. Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерема выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Ерема.

ТЕМА БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Задача 1. На множестве A = {1, 2, 3, 4} задано бинарное отношение α. Какими свойствами оно обладает:
α = {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 4>, <4, 1>, <3, 2>, <2, 3>}?
Построить граф и график отношения α.

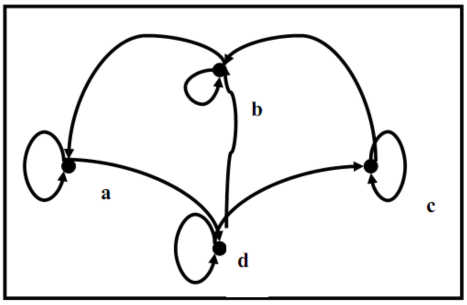
Задача 2. По графику отношения α определить множество A, на котором оно задано, и свойства этого отношения:



Задача 3. Построить граф бинарного отношения из задачи 2. Как нужно изменить этот граф, чтобы отношение стало рефлексивным; симметричным?

Задача 4.

По графу бинарного отношения определить его свойства:



Задача 5. Если множество A, на котором задано бинарное отношение α, конечно, то задать это отношение можно с помощью квадратной матрицы порядка n, где n – число элементов в множестве A. На пересечении i-й строки и j-го столбца этой матрицы стоит 1, если пара <a, b> $\in \alpha$, где a – элемент множества A с номером i, b – элемент с номером j, и 0 в противном случае.
Построить матрицу бинарного отношения α из задач 1 и 2.

Задача 6. По виду матрицы Δ определить бинарное отношение α, заданное на множестве A = {a, b, c, d}, и свойства этого бинарного отношения:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 7. Как выглядит матрица бинарного отношения α, если оно:
a) рефлексивно; b) симметрично; c) антисимметрично; d) асимметрично?

Задача 8. Считая X множеством всех ныне живущих людей на планете Земля, для следующих бинарных отношений, заданных на X, проверить выполнение следующих свойств (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, анти симметричность, асимметричность, транзитивность):
a) "человек *x* является потомком человека *y*";
b) " человек *x* является внуком человека *y* ";
c) " человек *x* состоит в браке с человеком *y* ";
d) " человек *x* является отцом (или матерью) такого же числа детей, что и человек *y*";
e) "человек *x* хотя бы раз в жизни думал о человеке *y*".

Задача 9. Пусть X — множество населенных пунктов на планете Земля. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения:
a) "населенный пункт *x* расположен восточнее пункта *y* ";
b) «населенный пункт *x* расположен в том же государстве, что и пункт *y* ".

Задача 10. Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего
a) ни свойству рефлексивности, ни свойству антирефлексивности;
b) ни свойству симметричности, ни свойству асимметричности.

Задача 11. Какими свойствами обладает бинарное отношение σ на множестве A, если:
a) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow a < 2b$;
b) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow$ (a + b) делится на 2;
c) A = N и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow a = b^2$;
d) A = Z и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow |a - b| = 1$;
e) A = Z и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow$ (a – b) делится на 3;
f) A = R и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow b = 2a + 3$;
g) A = R и <a, b> $\in \sigma \Leftrightarrow |a| = |b|$;

h) $A = R \setminus \{0\}$ и $\langle a, b\rangle \in \sigma \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 2$;

i) $A = R^{+}$ и $\langle a, b\rangle \in \sigma \Leftrightarrow b = \lg(a + 1)$;

j) $A = R$ и $\langle a, b\rangle \in \sigma \Leftrightarrow b = a^2$;

k) $A = R\times R$ и $(x_1, x_2)\, \sigma\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$?

Задача 12. Какие из бинарных отношений, приведенных в задачах 8 - 11, являются отношениями эквивалентности? Что представляют собой классы эквивалентности по каждому из отношений? Построить разбиение, соответствующее каждому из отношений эквивалентности.

Задача 13. Какое отношение эквивалентности задает каждое из следующих разбиений множества целых чисел:

a) классов разбиения бесконечное множество и в каждом классе содержится ровно одно целое число;

b) классов разбиения бесконечное множество и в каждом классе содержатся числа a и -a;

c) классов разбиения три: $\{x \in Z \mid x > 0\}$; $\{x \in Z \mid x < 0\}$; $\{0\}$;

d) классов разбиения два: $\{x \in Z \mid x \geq 0\}$; $\{x \in Z \mid x \leq 0\}$?

Задача 14. Построить по данному отношению эквивалентности σ разбиение множества M = {a, b, c, d}, если:

a) $\sigma = \{\langle a, a\rangle; \langle b, b\rangle; \langle c, c\rangle; \langle d, d\rangle; \langle a, c\rangle; \langle c, a\rangle\}$;

b) $\sigma = \{\langle a, a\rangle; \langle b, b\rangle; \langle c, c\rangle; \langle d, d\rangle; \langle a, c\rangle; \langle c, a\rangle; \langle b, d\rangle; \langle d, b\rangle\}$;

c) $\sigma = \{\langle a, a\rangle; \langle b, b\rangle; \langle c, c\rangle; \langle d, d\rangle; \langle a, b\rangle; \langle b, a\rangle; \langle c, d\rangle; \langle d, c\rangle\}$;

d) $\sigma = \{\langle a, a\rangle; \langle b, b\rangle; \langle c, c\rangle; \langle d, d\rangle; \langle d, c\rangle; \langle c, d\rangle; \langle a, d\rangle; \langle d, a\rangle\}$.

Задача 15. Построить по данному разбиению множества M = {a, b, c, d} отношение эквивалентности σ, если:

a) $M_1 = \{a\}$; $M_2 = \{b, c\}$; $M_3 = \{d\}$; b) $M_1 = \{a, d\}$; $M_2 = \{b\}$; $M_3 = \{c\}$;

c) $M_1 = \{a\}$; $M_2 = \{b\}$; $M_3 = \{c, d\}$;

d) $M_1 = \{a\}$; $M_2 = \{b\}$; $M_3 = \{d\}$; $M_4 = \{c\}$.

Задача 16. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве M, если:

a) M = {a, b, c, d}; b) M = {1, 2, 3} ?

Задача 17. Какие из бинарных отношений, приведенных в задачах 8 - 11, являются отношениями порядка? Какими свойствами обладает каждое из отношений порядка?

Задача 18. Расположите следующие понятия по порядку по принципу: содержание каждого последующего понятия шире, чем содержание предыдущего:

a) бинарное отношение, рефлексивное отношение, декартов квадрат множества, отношение эквивалентности;

b) бинарное отношение, отношение строгого порядка, отношение порядка, транзитивное отношение, отношение линейного строгого порядка.

Задача 19. В отделе кадров некоторого предприятия составляют таблицу, в которой в первом столбце содержатся фамилии и инициалы работников, а во втором - серии и номера их паспортов. Можно ли утверждать, что такая таблица задает отображение множества работников предприятия на множество кодов, под которыми понимаются номера и серии их паспортов? Если да, то будет ли это отображение инъекцией, сюръекцией, биекцией?

Задача 20. Проверить, является ли бинарное отношение f отображением, и если да, то обладает ли оно свойствами инъективности, сюръективности, биективности:

a) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R \mid 2x + 3y = 12\}$;

b) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R \mid x + y = x^2\}$;

c) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R^{+} \mid y = \sqrt{10^{\lg x^2}}\}$;

d) $f = \{\langle x, y\rangle \in R \times R \mid y = x^2 - 4x + 2\}$;

e) $f = \{<x, y> \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2} - 5\}$;
f) $f = \{<x, y> \in R \times R \mid y + x = x^3\}$;
g) $f = \{<x, y> \in R \times R \mid y = 3x\}$;
h) $f = \{<x, y> \in R \times R \mid y = \dfrac{1}{x^2 - 1}\}$;
i) $f = \{<x, y> \in R \times R \mid y - x = 3\}$;
j) $f = \{<x, y> \in R \times R \mid y = 2^{x^2-4x+2}\}$.

Задача 21. Доказать, что:
а) между двумя конечными множествами можно установить сюръективное отображение тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов;
б) всякое сюръективное отображение конечного множества A на конечное множество B является биективным.

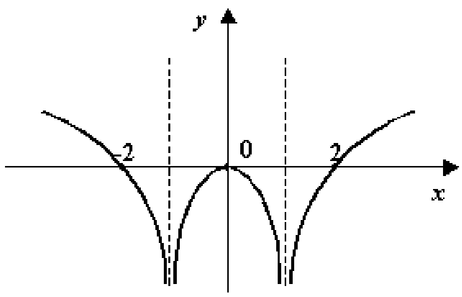
Задача 22. Найдите области определения и области значений следующих функций:

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$; b) $f(x) = \cos 2x + 3\sin 2x$; c) $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;
d) $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$; e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = \sin(\arcsin x)$;
g) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; h) $f(x) = 2^{\log_2 x}$; i) $f(x) = (\sqrt{x})^2$;
j) $f(x) = \sqrt{x^2}$; k) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; l) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
Какие из этих функций из области являются биекциями?

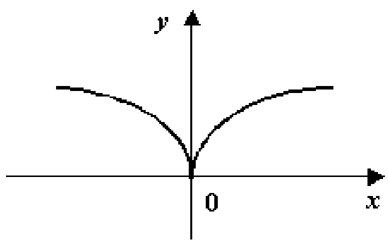
Задача 23. Доказать, что если существует биективное отображение множества на его собственное подмножество, то это множество бесконечно.

Задача 24. По виду графика определить, является ли соответствующая функция инъекцией, сюръекцией, биекцией:

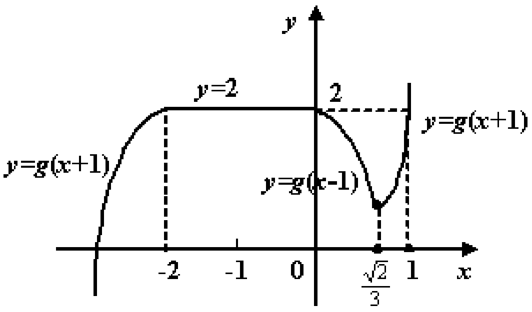
a)



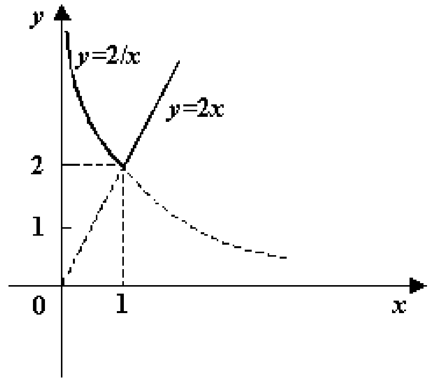
b)



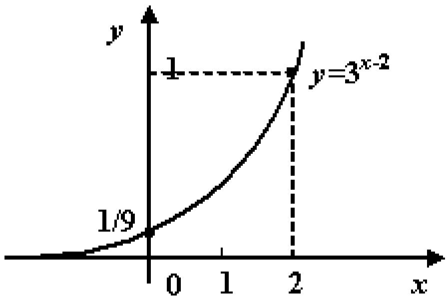
c)



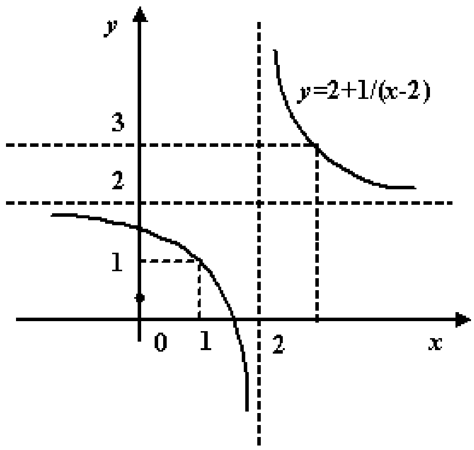
d)



e)



f)



Критерии оценки:

Задания оцениваются баллами от 1 до 8.

Задания реконструктивного уровня оцениваются баллами от 1 до 4

Задания творческого уровня оцениваются баллами от 4 до 8:

- 4 балла выставляется студенту, если задание реконструктивного уровня выполнено с обоснованием и демонстрирует сформированность у студента умений синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей;
- 8 баллов выставляется студенту, если выполненное задание творческого уровня демонстрирует сформированность у студента умений интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.