МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
# Теоретическая механика

**1. Код и наименование направления подготовки:**

44.03.01 Педагогическое образование

**2. Профиль подготовки:**

Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств

**3. Квалификация (степень) выпускника:**

Бакалавр

**4. Форма обучения:**

Очная, заочная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

**6. Составитель(и):**

Зульфикарова Т.В., кандидат технических наук, доцент
О.Н. Летуновская, преподаватель

## 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

| Вид учебных занятий | Деятельность студента |
|---|---|
| Лекция | При написании лекций студент должен кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения, помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. В некоторых случаях требуется проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь.<br>При изучении теоретического материала необходимы выделение вопросов, терминов, материала, который вызывает трудности, поиск ответов в учебной и справочной литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии. |
| Практические занятия | В процессе освоения дисциплины студенты выполняют самостоятельные работы. Решение каждой задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями о том, какие законы используются для решения, какие математические преобразования приводят к результату и т.п. |
| Подготовка к зачету | При подготовке к зачету необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу, отработанные методы решения задач и приобретенные навыки анализа и проверки выполненных решений. |

## 8. Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

| п/п | Наименование раздела дисциплины | Рассматриваемые вопросы |
|---|---|---|
| **Семестр 2 / 2** | | |
| 1.1 | Основные понятия и аксиомы статики | Теоретическая механика как теория механического движения макроскопических тел. Модели классической механики. Материальная точка, абсолютное твердое тело. Сила, система сил, эквивалентные системы сил. Равнодействующая и уравновешивающая силы. Связи и реакции связей |
| 1.2 | Плоская система сходящихся сил | Система сходящихся сил. Способы сложения сил. Разложение силы на две составляющие. Проекция силы на ось, правило знаков. Аналитическое определение равнодействующей. Условие равновесия в аналитической и геометрической формах. |
| 1.3 | Пара сил и момент силы относительно точки | Пара сил и ее характеристики. Момент пары. Эквивалентные пары. Сложение пар. Условие равновесия системы пар сил. Момент сил относительно точки. |
| 1.4 | Плоская система произвольно расположенных сил | Приведение силы к данной точке. Приведение плоской системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил. Теорема Вариньона. Система параллельных сил. Центр тяжести (центр масс). |
| 1.5 | Пространственная система сил | Пространственная система сил. Условия равновесия тел при действии пространственной системы произ- |

| | | |
|---|---|---|
| | | вольно расположенных сил. |
| **Семестр 2 / 3** | | |
| 1.6 | Основные понятия кинематики. Кинематика точки | Основные характеристики движения: траектория, путь, перемещение, скорость, ускорение. Средняя скорость и мгновенная скорость. Мгновенное ускорение. Разложение вектора ускорения на нормальное и касательное. Частные случаи движения точки. Кинематические графики. |
| 1.7 | Простейшие движения твердого тела | Поступательное движение. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Кинематические характеристики вращательного движения: угловые перемещение, скорость и ускорение. |
| 1.8 | Плоское и пространственное движения твердого тела | Плоское движение. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное. Определение скорости и ускорения любой точки тела. Мгновенные центры скоростей и ускорений, способы их определения. Движение тела с одной неподвижной точкой. Произвольное движение тела. |
| 1.9 | Сложное движение точки | Переносное, относительное и абсолютное движения. Теорема сложения скоростей. Теорема о сложении ускорений. Ускорение Кориолиса и переносное ускорения. |
| **Семестр 3 / 4** | | |
| 1.10 | Динамика материальной точки. | Понятия о силе и массе. Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона. Принцип относительности Галилея. Основная задача динамики. Роль начальных условий. Принцип причинности классической механики. Работа силы. Потенциальная энергия частицы в силовом поле. Центрально - симметрическое поле. Потенциальная энергия взаимодействия частиц. Консервативные силы. Теоремы динамики и законы сохранения. |
| 1.11 | Динамика механической системы. | Понятие механической системы. Центр масс системы. Теорема о движении центра масс системы. Закон сохранения движения центра масс. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции. Теорема Штейнера. |
| 1.12 | Теоремы динамики системы | Количество движения механической системы. Теорема об изменении и закон сохранения количества движения.<br>Центробежные моменты инерции. Момент инерции тела относительно произвольной оси. Главные оси инерции. Кинетический момент системы. Закон сохранения кинетического момента для замкнутых механических систем и теорема об изменении кинетического момента незамкнутой механической системы.<br>Кинетическая энергия механической системы. Теорема об изменении кинетической, потенциальной и полной энергии системы. Закон сохранения энергии. |
| 1.13 | Основы аналитической механики. Принцип Даламбе- | Классификация связей. Сведение задачи о движении механической системы к задаче о ее равновесии (принцип Даламбера). |

| | | |
|---|---|---|
| | ра. | |
| 1.14 | Принцип Даламбера-Лагранжа. | Понятие о возможных перемещениях и виртуальной работе. Условие равновесия и уравнение движения голономной механической системы (принцип Даламбера–Лагранжа). |
| 1.15 | Уравнения равновесия и движения системы в обобщенных координатах. | Обобщенные координаты и обобщенные силы. Условия равновесия голономной механической системы: устойчивое, неустойчивое, седлообразное и безразличное.<br>Уравнение движения системы в обобщенных координатах. |
| 1.16 | Канонические уравнения движения системы. | Понятие о функционале и его первой вариации. Уравнение Эйлера. Принцип экстремального действия Гамильтона – Остроградского. Индуктивный и дедуктивный методы решений задач динамики.<br>Канонические уравнения движения. Функция Гамильтона и ее связь с законами сохранения. |

**9. Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим/лабораторным занятиям**

| п/п | Наименование раздела дисциплины | Рассматриваемые вопросы |
|---|---|---|
| 2.1 | Основные понятия и аксиомы статики | Проекция силы на ось, правило знаков. Сосредоточенные и распределенные силы, система сил, эквивалентные системы сил. Равнодействующая и уравновешивающая силы. Связи и реакции связей |
| 2.2 | Плоская система сходящихся сил | Способы сложения сходящихся сил. Разложение силы на две составляющие. Аналитическое определение равнодействующей. Условие равновесия в аналитической и геометрической формах. |
| 2.3 | Пара сил и момент силы относительно точки | Момент силы, момент пары. Проекции моментов силы и пары на координатные оси. Момент силы относительно оси. Действия с моментами сил. |
| 2.4 | Плоская система произвольно расположенных сил | Определение главного вектора и главного момента системы сил. Применение теоремы Вариньона при расчете плоских механических систем. Расчет балочных систем. |
| 2.5 | Пространственная система сил | Момент силы относительно оси. Расчет механических систем при действии пространственной системы произвольно расположенных сил. |
| **Семестр 2 / 3** | | |
| 2.6 | Основные понятия кинематики. Кинематика точки | Кинематика материальной точки: Определение скорости, ускорения, пути, перемещения, траектории. Разложение вектора ускорения на нормальное и касательное. Кинематические графики. |
| 2.7 | Простейшие движения твердого тела | Кинематика твердого тела: поступательное движение, вращательное. Определение кинематических характеристик вращательного движения: Угловое перемещение, угловые скорость и ускорение. |
| 2.8 | Плоское и пространственное движения твердого тела | Кинематика плоское движение. Разложение плоского движения на простые. Применение теоремы о проекциях скоростей. Мгновенные центры скоростей и ускорений, способы их определения. |

| | | |
|---|---|---|
| 2.9 | Сложное движение точки | Определение кинематических характеристик сложного движения. Применение теоремы о сложении скоростей. Применение теоремы о сложении ускорений. |
| **Семестр 3 / 4** | | |
| 2.10 | Динамика материальной точки. | Применение законов динамики Ньютона для расчета движения материальной точки. Прямая и обратная задачи динамики. Применение теорем динамики и законов сохранения. |
| 2.11 | Динамика механической системы. | Центр инерции механической системы. Определение момента инерции твердого тела относительно оси, радиуса инерции. Вычисление центробежных моментов инерции. Положение лавных осей инерции. |
| 2.12 | Теоремы динамики системы | Применение теоремы об изменении и закона сохранения количества движения.<br>Применение теоремы об изменении кинетического момента системы, закона сохранения кинетического момента.<br>Изменение кинетической, потенциальной и полной энергии системы в процессе движения. Закон сохранения энергии. |
| 2.13 | Основы аналитической механики. Принцип Даламбера. | Применение принципа Даламбера для преобразования задачи о движении механической системы к задаче о ее равновесии. |
| 2.14 | Принцип Даламбера-Лагранжа. | Определение виртуальной работы механической системы. Применение принципа Даламбера-Лагранжа для расчета механической системы |
| 2.15 | Уравнения равновесия и движения системы в обобщенных координатах. | Определение обобщенных сил системы. Виды равновесия механической системы: устойчивое, неустойчивое, седлообразное и безразличное.<br>Применение уравнений движения системы в обобщенных координатах. |
| 2.16 | Канонические уравнения движения системы. | Применение канонических уравнений движения для расчета механической системы. |

## 10. Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

### Методические рекомендации к самостоятельной работе

Программой предусмотрено решение контрольных работ по трем разделам теоретической механики. Объем работ и шифр заданий назначаются преподавателем. Шифр заданий двухзначный. Последняя цифра шифра определяет номер расчетной схемы (рисунка), первая цифра – номер условия (комплекта исходных данных для расчета, которые берутся из таблиц). Например, двузначный шифр 46 означает, что исходные данные к задаче следует взять по условию 4 из таблицы, а расчетную схему – по рис. 6.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер контрольной работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради, на четной странице (для удобства проверки). Сверху указывается номер задачи, далее делается расчетная схема (карандашом), записываются исходные данные и искомые величины (текст задачи не переписывать). Расчетная схема выполняется с учетом данных решаемого варианта задачи: все углы, действующие силы, число сил и их расположение на рисунке должны соответствовать этим условиям.

Расчетная схема должна быть аккуратной и наглядной, а ее размеры должны позволить показать все необходимые векторы (силы, скорости, ускорения и др.). Решение каждой задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями, какие аксиомы, теоремы или законы используются для решения; какие математические преобразования приводят к результату и т.п. Студентам необходимо подробно излагать весь ход расчетов, указывая единицы измерения получаемых величин. На каждой странице нужно оставлять поля для замечаний рецензента.

## ЗАДАЧИ СТАТИКИ С1, С2, С3

### Указания к решению задачи С1

Перед решением задачи **С1**, следует выполнить чертеж балки в выбранном масштабе и приложить к ней все внешние активные силы согласно условию. Шарнирные опоры балки заменить реакциями связей.

Действие равномерно распределенной нагрузки на балку заменить равнодействующей $Q = q \cdot l$, где *l* – длина участка приложения нагрузки $q$.

Для упрощения вычислений момента силы $\vec{P}$, приложенной под углом $\alpha$ к участку рамы, ее следует разложить на составляющие $F_x$ и $F_y$, для которых плечи относительно центра вращения очевидны, а затем воспользоваться теоремой Вариньона $m_0(\vec{F}) = m_0(F_x) + m_0(F_y)$.

Уравнение равновесия моментов сил будет содержать меньше неизвестных реакций связей, если для его составления использовать точки пересечения линий действия двух реакций.

### Пример решения задачи С1

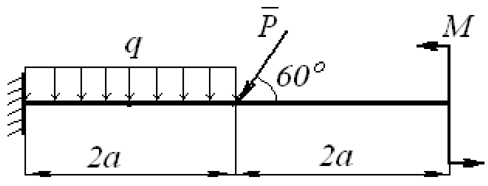

Рис. С1а

Горизонтальная балка *AB* жестко заделана в стену. На балку действует система сил, расположенных в вертикальной плоскости: сосредоточенная сила *P*, пара сил с моментом *M* и равномерно распределенная нагрузка интенсивности *q*. Данные для расчета:

$P = 4$ кН;

$M = 2$ кНм;

$q = 2$ кН/м;

$a = 1$м.

Определить реакции заделки.

Решение.

Рассмотрим равновесие балки под действием приложенных сил и реакций жесткой заделки $X_A$, $Y_A$ и $M_A$. Распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой $Q = q \cdot 2a = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ кН, которую приложим к середине участка *AB*.

Для определения неизвестных реакций составим три уравнения равновесия:

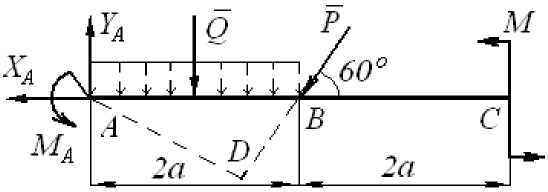

Рис. С1б

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad -X_A - P\cos 60^o = 0,$$

$$X_A = -P\cos 60^o = -4 \cdot 0{,}5 = -2\text{кН};$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,$$

$$Y_A - P\sin 60^o - Q = 0,$$

$$Y_A = P\sin 60^o + Q = 4 \cdot 0{,}866 + 4 \approx 7{,}46\text{кН};$$

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad M - P \cdot AD - Q \cdot AB/2 + M_A = 0,$$

$$M - P \cdot 2a \cdot \sin 60^o - Q \cdot a + M_A = 0,$$

$$M_A = P \cdot 2a \cdot \sin 60^o + Q \cdot a - M = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}866 + 4 \cdot 1 - 2 = 8{,}92\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Знак минус силы $X_A$ показывает, что она направлена в противоположную сторону (вправо).

Для проверки полученных значений реакций связей составим дополнительное уравнение равновесия моментов сил относительно точки *B*:

$$\Sigma m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad M + Q \cdot AB/2 + M_A - Y_A \cdot AB = 0,$$

$$M + Q \cdot a + M_A - Y_A \cdot 2a = 0,$$

$$2 + 4 \cdot 1 + 8{,}92 - 7{,}46 \cdot 2 = 0,$$

$$14{,}92 - 14.92 = 0.$$

Полученное тождество свидетельствует, что реакции связей определены верно.

### Рекомендации к выполнению задания С2

При решении задачи С2 следует учесть, что силы натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок одинаковы, т.к. трением на оси блока можно пренебречь.

Для упрощения вычислений момента силы $\vec{F}$, приложенной под углом $\alpha$ к участку рамы, ее следует разложить на составляющие $F_x$ и $F_y$, для которых плечи относительно центра вращения очевидны, а затем воспользоваться теоремой Вариньона $m_0(\vec{F}) = m_0(F_x) + m_0(F_y)$.

Уравнение равновесия моментов сил будет содержать меньше неизвестных реакций связей, если для его составления использовать точки пересечения линий действия двух реакций.

### Пример решения задачи С2

Жесткая рама *ABCD* имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке D – подвижную шарнирную опору. Действующие нагрузки и размеры рамы показаны на рис. С2. В точке *E* к раме прикреплен трос с подвешенным грузом, вес которого *P*. На раму действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом *M* и равномерно распределенная нагрузка интенсивности *q*.

Данные для расчета:

$F = 30$ кН;

$P = 25$ кН;

$M = 40$ кНм;

$q = 10$ кН/м;

$\alpha = 60^\circ$;

$\beta = 30^\circ$;

$\gamma = 45^\circ$;

$a$ = 0,5м.

Определить реакции в опорах *A* и *D*.

Порядок решения:

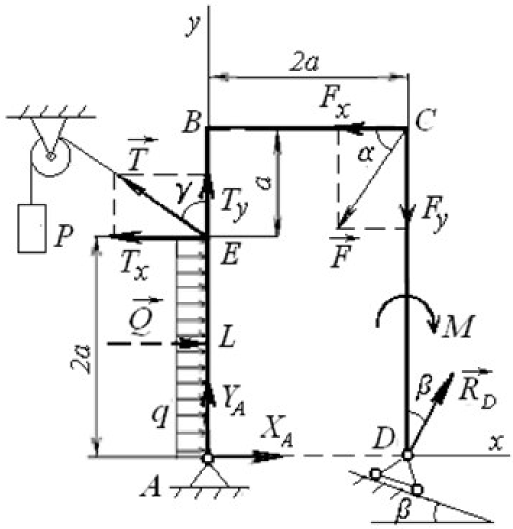


Рис. С2

1. Выполнить чертеж рамы в выбранном масштабе, провести координатные оси $x$ и $y$, показать действующие на раму нагрузки: сосредоточенную силу $\vec{F}$, момент M пары сил, силу натяжение троса $\vec{T}$, модуль которой $T = P$, равномерно распределенную нагрузку $q$ и ее эквивалентную замену – сосредоточенную силу $Q = q \cdot 2a = 10 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 10$ кН.

2. Реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* заменить двумя её составляющими $X_A$, $Y_A$, реакцию шарнирной опоры *D* на катках ($\vec{R}_D$) направить перпендикулярно опорной плоскости.

3. Разложить сосредоточенные силы $\vec{F}$ и $\vec{T}$ на составляющие: $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\sin\alpha$, $T_x = T\sin\gamma$, $T_y = T\cos\gamma$.

4. Составить уравнения равновесия для полученной плоской системы сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_A + R_D\sin\beta - F_x - T_x + Q = 0,$$

$$X_A + R_D\sin\beta - F\cos\alpha - T\sin\gamma + Q = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_D\cos\beta - F_y + T_y = 0,$$

$$Y_A + R_D\cos\beta - F\sin\alpha + T\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad -M + R_D\cos\beta \cdot 2a + F_x 3a - F_y 2a + T_x 2a - Qa = 0,$$

$$-M + R_D\cos\beta \cdot 2a + F\cos\alpha \cdot 3a - F\sin\alpha \cdot 2a + T\sin\gamma \cdot 2a - Q \cdot a = 0.$$

5. Подставить в уравнения равновесия известные величины и решить систему уравнений, определив неизвестные реакции связей:

$X_A = 4{,}89$ кН; $Y_A = -22{,}5$ кН; $R_D = 35{,}57$ кН.

Отрицательное значение силы $Y_A$ означает, что эта сила направлена в противоположную сторону – вниз.

6. Выполнить проверку решения задачи. Для этого достаточно составить уравнение равновесия для моментов относительно любой другой точки рамы, например, для точки *D*:

$$\Sigma m_D(\vec{F}_k) = 0, \quad -M + F_x 3a - T_y\cos\gamma 2a + T_x 2a - Qa - Y_A 2a = 0,$$

$$-M + F\cos\alpha 3a - T\cos\gamma 2a + T\sin\gamma 2a - Qa - Y_A 2a = 0,$$

$$-40+30\cdot0{,}5\cdot3\cdot0{,}5-25\cdot0{,}707\cdot2\cdot0{,}5+25\cdot0{,}707\cdot2\cdot0{,}5-10\cdot0{,}5-(-22{,}5)2\cdot0{,}5=0,$$
$$0\equiv0.$$

Проверка подтверждает справедливость полученных результатов.

Ответ: $X_A=4{,}89$ кН; $Y_A=-22{,}5$ кН; $R_D=35{,}57$ кН.

**Указания к решению задачи С3**

При решении задачи С3 следует учесть, что реакция сферического шарнира имеет три составляющие, а реакции цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы $\vec{F}$ ее следует разложить на две составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, параллельные соответствующим координатным осям, а затем воспользоваться теоремой Вариньона, например $m_x(\vec{F})=m_x(\vec{F}')+m_x(\vec{F}'')$.

**Пример решения задачи С3**

Вертикальная прямоугольная плита весом $\mathrm{P}$ (рис. С3) удерживается в точке *A* сферическим шарниром, в точке *B* - цилиндрическим шарниром, в точке $D$ опирается на невесомый стержень $DD'$, параллельный плоскости *YZ*. На плиту действуют сила $\vec{F}_1$, параллельная плоскости *YZ*, сила $\vec{F}_2$, параллельная оси X, и пара сил с моментом *M*, лежащая в плоскости плиты.

Данные для расчета:

$P=5$ кН;

$M=3$ кНм;

$F_1=6$ кН;

$F_2=7{,}5$ кН;

$\alpha=30°$;

$AB=1$ м;

$BC=2$ м;

$BE=AE$;

$AK=KD$.

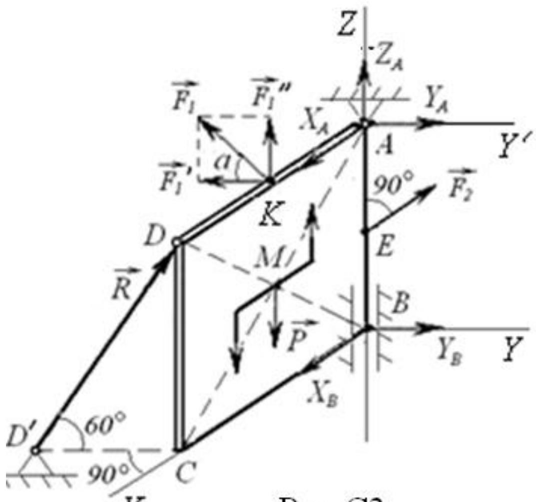

Рис С3

Определить реакции опор *A* и *B*, усилие в стержне $DD'$.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плиты. Распределенную нагрузку от веса плиты заменим эквивалентной сосредоточенной силой $\vec{\mathrm{P}}$, которую приложим к центру масс. Плита удерживается в заданном положении связями, к плите приложены сосредоточенные силы, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пара сил с моментом M.

2. Разложим вектор $\vec{F}_1$ на составляющие $\vec{F}_1{}'$ и $\vec{F}_1{}''$, параллельные осям *Y* и *Z*, значения которых $F_1{}'=F_1 cos\alpha$, $F_1{}''=F_1 sin\alpha$. Аналогично можно разложить реакцию стержня $\vec{R}$ на составляющие $R\ cos60°$ и $R\ sin60°$, что упростит вычисления осевых моментов сил.

3. Заменим сферический шарнир *А* реакцией, которую представим тремя составляющими $X_A$, $Y_A$, $Z_A$, цилиндрический шарнира *В* – двумя составляющими $X_B$, $Y_B$ (перпендикулярными оси шарнира), невесомый стержень $DD'$ – реакцией $\vec{R}$, которую направим вдоль стержня к точке *D*.

Составляем уравнения равновесия для действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kX} = 0, \qquad X_A + X_B - F_2 = 0;$$
$$\Sigma F_{kY} = 0, \qquad Y_A + Y_B - F_1{}' + R\cos 60^\circ = 0,$$
$$Y_A + Y_B - F_1\cos\alpha + R\cos 60^\circ = 0;$$
$$\Sigma F_{kZ} = 0, \qquad Z_A + R\sin 60^\circ + F_1{}'' - P = 0,$$
$$Z_A + R\sin 60^\circ + F_1\sin\alpha - P = 0;$$
$$\Sigma m_X(\vec{F}_k) = 0, \qquad -R\cos 60^\circ \cdot AB + F_1{}' \cdot AB - Y_A\, AB = 0,$$
$$-R\cos 60^\circ \cdot AB + F_1\cos\alpha \cdot AB - Y_A\, AB = 0;$$
$$\Sigma m_Y(\vec{F}_k) = 0, \qquad -R\sin 60^\circ \cdot BC - F_1{}''\frac{BC}{2} + X_A \cdot AB - F_2\frac{AB}{2} + P\frac{BC}{2} + M = 0,$$
$$-R\sin 60^\circ\, BC - F_1\sin\alpha\frac{BC}{2} + X_A \cdot AB - F_2\frac{AB}{2} + P\frac{BC}{2} + M = 0;$$
$$\Sigma m_Z(\vec{F}_k) = 0, \qquad R\cos 60^\circ\, BC - F_1{}'\frac{BC}{2} = 0,$$
$$R\cos 60^\circ\, BC - F_1\cos\alpha\frac{BC}{2} = 0.$$

Подставим числовые значения, решим систему уравнений и найдём в итоге искомые реакции связей.

Ответ: $X_A = 7{,}8$ к$H$; $Y_A = 2{,}6$ к$H$; $Z_A = -2{,}5$ к$H$; $Y_B = 0$ к$H$; $X_B = -0{,}3$ к$H$; $R = 5{,}2$ к$H$.

4. Проверим полученные результаты, для этого составим дополнительное уравнение равновесия, например, уравнение моментов относительно оси $Y'$

$$\Sigma m_{Y'}(\acute{F}_k) = 0, \qquad -R\sin 60^\circ \cdot BC - F_1{}''\frac{BC}{2} - X_B \cdot AB + F_2\frac{AB}{2} + P\frac{BC}{2} + M = 0,$$
$$-R\sin 60^\circ\, BC - F_1\sin\alpha\frac{BC}{2} - X_B \cdot AB + F_2\frac{AB}{2} + P\frac{BC}{2} + M = 0.$$

## Решение задач кинематики К1, К2, К3

### Пример решения задачи К1

Дано: *Уравнения движения точки в плоскости xOy*:

$$x = -2\cos\frac{\pi}{4}t + 3; \qquad y = 3\sin\frac{\pi}{4}t - 1,$$

где *x, y* – в метрах, *t* – в секундах.

Определить и показать на чертеже уравнение траектории точки. Вычислить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 1$с. Определить касательную и нормальную составляющие ускорения в этот же момент времени, а также радиус кривизны траектории в месте ее нахождения через 1с после начала движения. Показать векторы скорости и ускорения этой точки.

Решение

Уравнения движения заданы в параметрической форме. Определим уравнение траектории точки, исключив из уравнений движения параметр (время t). Для этого выразим из уравнений движения тригонометрические функции

$$cos\frac{\pi}{4}t = \frac{3-x}{2}, \quad sin\frac{\pi}{4}t = \frac{y+1}{3},$$

возведем их в квадрат и воспользуемся тригонометрической формулой $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$:

$$\frac{(3-x)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

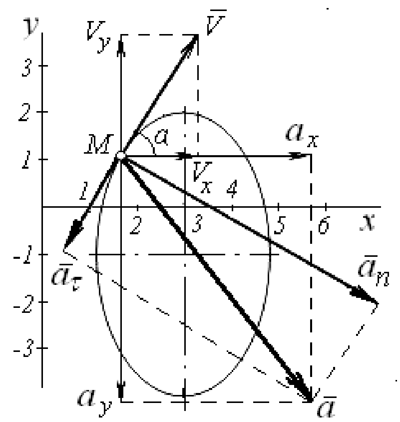

Рис. К1.

Полученное уравнение является уравнением эллипса (рис. К1). Построить траекторию точки можно любым способом, например, по точкам, с помощью компьютера, или с использованием характерных признаков эллипса: положения его центра, длины полуосей. Укажем на траектории начальное положение точки.

Найдем на траектории положение точки *M* через $t = 1$ с после начала движения, определив ее координаты:

$$x_{t=1c} = 1{,}59\text{м}, \quad y_{t=1c} = 1{,}12\text{м}.$$

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси, учитывая дифференциальную зависимость между координатами и проекциями скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{4}t; V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{4}cos\frac{\pi}{4}t;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Для момента времени $t = 1c$ они равны: $V_x = 1{,}11\text{м}/c$; $V_y = 1{,}67\text{м}/c$; $V = 2{,}0\text{м}/c$.

Используя дифференциальную зависимость между скоростью и ускорением, найдем ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}cos\frac{\pi}{4}t \text{ и } a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{3\pi^2}{16}sin\frac{\pi}{4}t.$$

Для момента времени $t = 1c$ они равны: $a_x = 0{,}87\text{м}/c^2$; $a_y = -1{,}30\text{м}/c^2$; $a = 1{,}57\text{м}/c^2$.

Спроецируем ускорение на касательное направление:

$a_\tau = a_x cos\alpha + a_y sin\alpha$, где $cos\alpha = V_x/V$, $sin\alpha = V_y/V$.

После подстановки и преобразования получим $a_\tau = \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V}$, тогда нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2}$, а радиус кривизны траектории $\rho = \frac{V^2}{a_n}$.

Для $t = 1c$ получим: $a_\tau = -0{,}6\ \text{м}/c^2$; $a_n = 1{,}67\ \text{м}/c^2$; $\rho = 2{,}38$ м.

Покажем найденные кинематические характеристики точки М, изображенной на траектории (см. рис. К1).

Ответ: $V = 2{,}0$ м/с; $a = 1{,}57$м/с$^2$; $a_\tau =- 0{,}6$ м/с$^2$; $a_n = 1{,}67$ м/с$^2$; $\rho = 2{,}38$ м.

**Указания к задаче К2**

Решение задачи определяется геометрией чертежа механизма. Построение чертежа следует начинать с 1стержня, направление которого определяется углом $\varphi_1$. Дуговыми стрелками на схемах показано, как откладывать остальные углы механизма. Длины звеньев механизма следует выполнять в масштабе.

Для определения характера движения звеньев механизма и определения направлений скоростей его шарниров необходимо выполнить кинематический анализ механизма.

Для определения скоростей точек звена и его угловой скорости рекомендуется использовать теорему о проекциях скоростей. Также плоское движение звена механизма можно представить как более простое вращательное движение вокруг мгновенного центра скоростей.

**Пример решения задачи К2**

Механизм состоит из трех звеньев, ползуна A и катка C, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой E шарнирами (рис. К2).

Дано:

$\varphi_1 = 90°$; $\varphi_2 = 150°$; $\varphi_3 = 240°$; $\varphi_4 = 150°$; $l_1 = 1{,}0$м; $l_2 = 0{,}9$м; $l_3 = 1{,}0$м; $BE = 2DE$; $V_C = 4$м/с

.

Определить: скорости точек A и D механизма ($\vec{V}_A, \vec{V}_D$), а также угловые скорости 1 и 2 звеньев ($\omega_1, \omega_2$).

Решение

Сделаем чертеж механизма в соответствии с данными задачи (рис. К2). Выполним кинематический анализ механизма.

1. Каток совершает плоское движение. В качестве заданной скорости имеем скорость центра катка $V_C = 4$м/$c$, которую направим параллельно поверхности качения, вправо.

2. Стержень *BD* имеет неподвижную шарнирную опору в точке *E*, поэтому совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через эту точку. Скорости концов стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ направлены перпендикулярно стержню.

3. Стержни *CD* и *AB* совершают плоское движение, конец *A* звена *AB* соединен с ползуном и может совершать только вертикальное движение. Скорость $\vec{V}_A$ направим вверх.

Рассмотрим стержень *CD.* Скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$ его концов направлены под углами 30° к оси стержня, что видно из чертежа механизма. Определим значение скорости $V_D$, используя теорему о проекциях скоростей

$$V_C \cos 30^o = V_D \cos 30^o, \quad V_C = V_D = 4\text{м/с}.$$

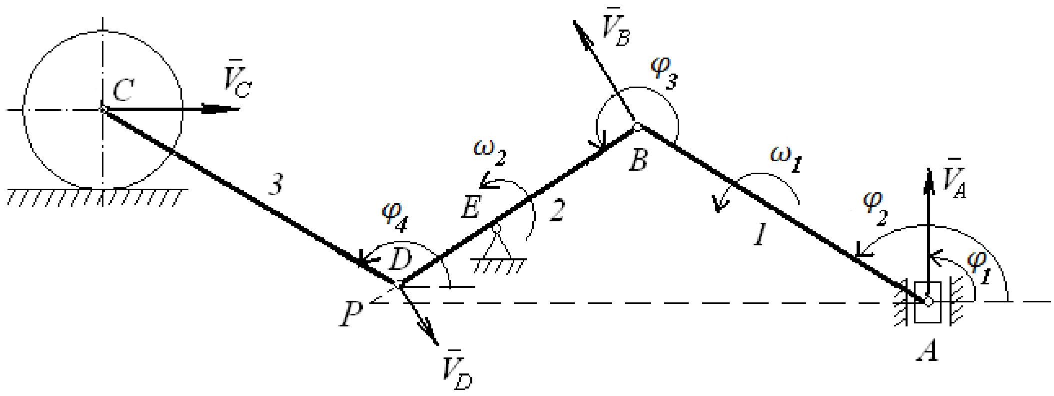


Рис. К2

Рассмотрим стержень $BD$. Угловую скорость стержня определим по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_D}{DE} = \frac{3V_D}{l_2} = \frac{3\cdot 4}{0{,}9} = \frac{40}{3} = 13{,}3\text{с}^{-1}.$$

Конец стержня *B* расположен на расстоянии $BE = 2DE$ от оси вращения $E$, поэтому скорость этой точки

$$V_B = \omega_2 \cdot BE = \omega_2 \cdot 2DE = 2V_D = 8\,\text{м}/c.$$

Рассмотрим стержень *AB*. Скорость $\vec{V}_B$ точки *B* направлена под углом 30° к оси стержня, а скорость $\vec{V}_A$ его конца *A* составляет угол $60°$. Воспользуемся теоремой о проекциях скоростей

$$V_B\cos 30^o = V_A\cos 60^o, \qquad V_A = \frac{V_B\cos 30^o}{\cos 60^o} = \frac{8\cdot\sqrt{3}/2}{1/2} = 13{,}76\,\text{м}/\text{с}.$$

Угловую скорость $\omega_1$ определим с помощью мгновенного центра скоростей (*P*), который находится на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ из точек *A* и *B* соответственно. Стержень *AB* вращается вокруг мгновенного центра *P*, тогда скорость точки *B* определяется по формуле

$$V_B = \omega_1 \cdot BP, \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP}.$$

Вычислим расстояние *BP*. Треугольник *APB* – равнобедренный с углами при основании 30°, тогда $AB = BP = 1\text{м}$, а величина угловой скорости стержня *AB* составит

$$\omega_1 = 8\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $V_A = 13{,}76\,\text{м}/\text{с}$; $V_D = 4\,\text{м}/\text{с}$; $\omega_1 = 8\text{с}^{-1}$; $\omega_2 = 13{,}3\text{с}^{-1}$.

**Указания к решению задачи**

При решении задачи К3 необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Движение точки по пластине следует считать относительным, вращательное движение самой пластины – переносным.

Кинематические характеристики относительного и переносного движений точки зависят от ее положения на пластине в заданный момент времени. Поэтому в первую очередь следует определить, где в момент времени $t = 1c$ находится точка *M* на относительной траектории и изобразить ее на чертеже. Если точка *M* движется по дуге радиуса *R*, то положение точки *M* удобно определять углом *OCM*.

**Пример решения задачи К3.**

Пластина (рис. К3) вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = \varphi(t)$. Положительное направление отсчета угла $\varphi$ показано на рис. К3 дуговой стрелкой. По дуге *АОД* движется точка *М* согласно закону $s = OM = s(t)$; положительное направление движения *ОМД*.

Дано: $R = 0{,}5\text{м}$; $\varphi = 2t^2$; $s = OM = \frac{\pi}{6}Rt^3$ ($\varphi$ – в радианах, $s$ – в метрах, $t$ – в секундах).

Определить: абсолютную скорость $\vec{V}_а$ и абсолютное ускорение $\vec{a}_а$ точки *М* в момент времени $t = 1\text{с}$.

Решение.

Точка *М* совершает сложное движение. При этом ее движение по дуге окружности на пластине является относительным, а движение вместе с пластиной – переносным.

Рассмотрим относительное движение точки. Это движение происходит по закону

$$s = OM = \frac{\pi}{6}Rt^3 \qquad (1)$$

Определим положение точки *М* на пластине в момент времени $t = 1\text{с}$. Для этого подставим в уравнение (1) заданное время и получим $S = \frac{\pi}{6}R$. Тогда угловое перемещение точки *М* равно $\alpha = \frac{S}{R} = \frac{\pi}{6} = 30^o$.

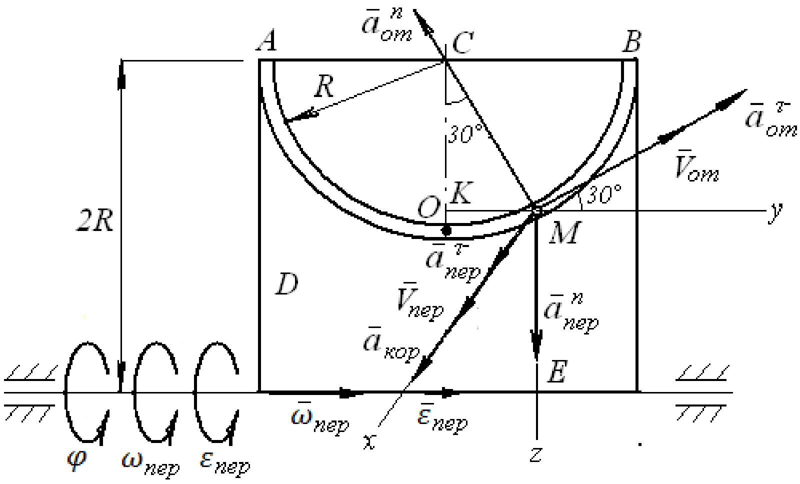


Рис. К3

Угол $\alpha$ определяет направление относительной скорости $\vec{V}_{от}$, относительных ускорений $\vec{a}^\tau_{от}$ и $\vec{a}^n_{от}$.

Значения скорости и ускорения относительного движения определим дифференцированием:

$$V_{от} = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi R}{6}3t^2 \quad ; a^\tau_{от} = \frac{dV_{от}}{dt} = \pi Rt; \quad a^n_{от} = \frac{V^2_{от}}{\rho_{от}} = \frac{V^2_{от}}{R}. \qquad (2)$$

Здесь $\rho_{от} = R$ – радиус кривизны траектории относительного движения точки. Для момента времени $t = 1c$ получим

$$V_{от} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{4}\text{ м/с}; \quad a^\tau_{от} = \frac{\pi}{2}\text{ м/с}^2; \quad a^n_{от} = \frac{\pi^2}{8}\text{ м/с}^2. \qquad (3)$$

Положительные значения $V_{\text{от}}$ и $a^{\tau}_{\text{от}}$ свидетельствуют о том, что векторы направлены по касательной в сторону положительного отсчета пути. Нормальное ускорение $a^{n}_{\text{от}}$ направлено к центру кривизны траектории относительного движения. Изобразим эти векторы на чертеже (рис. К3).

Рассмотрим переносное движение пластины вместе с точкой *M*. Движение пластины (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^2$. Найдем угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения:

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{d\varphi}{dt} = 4t; \qquad \varepsilon_{\text{пер}} = \frac{d\omega}{dt} = 4.$$

В заданный момент времени $t = 1\text{с}$ они составят

$$\omega_{\text{пер}} = 4\text{с}^{-1}; \qquad \varepsilon_{\text{пер}} = 4\text{с}^{-2}. \qquad (4)$$

Положительные значения $\omega_{\text{пер}}$ и $\varepsilon_{\text{пер}}$ указывают на то, что их направления совпадают с направлением вращения $\varphi$ пластины (см. рис. К3), а векторы направлены вдоль оси вращения вправо (правило правого винта).

Для определения скорости $\vec{V}_{\text{пер}}$ и ускорения $\vec{a}_{\text{пер}}$ переносного движения найдем расстояние от точки *M* до оси вращения пластины

$$\text{ME} = r = 2R - R\cos 30^{\circ} = 0{,}57\text{м},$$

тогда в заданный момент времени $t = 1\text{с}$, получим

$$V_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot r = 4 \cdot 0{,}57 = 2{,}28\ \text{м/с};$$
$$a^{\tau}_{\text{пер}} = \varepsilon_{\text{пер}} \cdot r = 4 \cdot 0{,}57 = 2{,}28\text{м/с}^2; \qquad (5)$$
$$a^{n}_{\text{пер}} = \omega^2_{\text{пер}} \cdot r = 4^2 \cdot 0{,}57 = 9{,}12\text{м/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_{\text{пер}}$ и касательное ускорение $\vec{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ переносного движения направлены перпендикулярно плоскости пластины, а нормальное ускорение $\vec{a}^{n}_{\text{пер}}$ – к оси вращения (рис. К3).

Модуль ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} \cdot V_{\text{от}} \cdot \sin\beta,$$

где $\beta$ – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и вектором скорости относительного движения $\vec{V}_{\text{от}}$. Оба вектора лежат в плоскости пластины и угол между ними $\beta = 30^{\circ}$ (рис. К3), тогда ускорение Кориолиса численно равно (t=1c)

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} \cdot V_{\text{от}} \sin 30^{\circ} = 2 \cdot 4 \cdot \pi/4 \cdot 1/2 = 3{,}14\text{м/с}^2. \qquad (6)$$

Вектор ускорения $\vec{a}_{\text{кор}}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и $\vec{V}_{\text{от}}$ в ту сторону, откуда поворот вектора $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ к вектору $\vec{V}_{\text{от}}$ видится происходящим против часовой стрелки

$$\vec{a}_{кор} = 2 \cdot \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{от}$$

Рассмотрим абсолютное движение точки. Вектор абсолютной скорости точки определим по закону сложения скоростей

$$\vec{V}_{а} = \vec{V}_{от} + \vec{V}_{пер},$$

учитывая, что векторы $\vec{V}_{от}$ и $\vec{V}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, получим

$$V_{а} = \sqrt{V_{от}^2 + V_{пер}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2{,}28^2} = 2{,}4 м/с.$$

Вектор абсолютного ускорения определим по закону сложения ускорений

$$\vec{a}_{а} = \vec{a}_{от}^{\tau} + \vec{a}_{от}^{n} + \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^{n} + \vec{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения модуля абсолютного ускорения используем координатные оси xyz, связанные с точкой *M* (рис. К3). Спроецируем уравнение (7) на эти оси.

$$a_{а\,x} = a_{кор} + a_{пер}^{\tau} = 5{,}42 м/с^2;$$

$$a_{а\,y} = -a_{от}^{n} sin30^{\circ} + a_{от}^{\tau} cos30^{o} = 0{,}74 м/с^2;$$

$$a_{а\,z} = -a_{от}^{\tau} sin30^{\circ} - a_{от}^{n} cos30^{\circ} + a_{пер}^{n} = 7{,}27 м/с^2,$$

следовательно, $a_{а} = \sqrt{a_{а\,x}^2 + a_{а\,y}^2 + a_{а\,z}^2} = 9{,}1 м/с^2$.

Ответ: $V_{а} = 2{,}4 м/с$, $a_{а} = 9{,}1 м/с^2$.

## Решение задач динамики Д1, Д2, Д3

### Указания к задаче Д1

Решение задачи Д1 состоит из двух частей.

Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки *D* на участке *AB*, при этом постоянные интегрирования можно определить из начальных условий. Для определения скорости тела в точке *B* необходимо воспользоваться известным временем движения на участке *AB* ($\tau_{AB}$) или его длиной *l*. Эта скорость будет начальной для движения тела на участке *BC*.

После этого необходимо составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения на участке *BC* также с учетом начальных условий, найти требуемую функцию координаты $x$ или проекции скорости $V_x$.

### Пример выполнения задачи Д1

На участке *AB* трубы (см. рисунок) на груз *D* массой *m* действуют сила тяжести $m\vec{g}$, постоянная сила $\vec{Q}$ и сила сопротивления

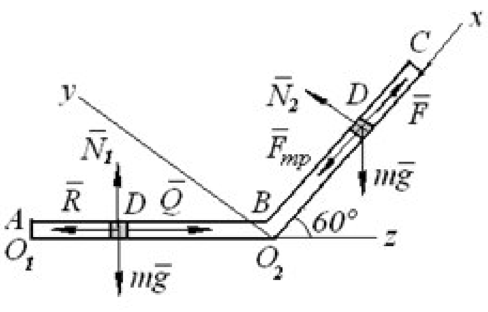


Рис. Д1

$\vec{R} = -\mu\vec{V}$ и нормальная составляющая реакции трубы $\vec{N}_1$. Время движения от точки *A* до точки *B* равно $\tau_{AB}$. На наклонном участке *BC* трубы на груз *D* действуют сила тяжести, сила сухого трения $F_{тр} = kN_2$ и переменная сила $F_x$.

Дано: $m = 2$ кг, $Q = 10$ Н, $R = \mu V$ Н, $\mu = 0{,}4$ кг/м, $V_0 = 5$ м/с, $\tau_{AB} = 1c$, $F_x = 6t^2$ Н, $k = 0{,}1$.

Определить закон движения груза *D* на участке *BC* $x = f(t)$.

Решение

Рассмотрим движение тела на участке *AB.* На тело действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила сопротивления $\vec{R}$, постоянная сила $\vec{Q}$ и нормальная составляющая реакции трубки $\vec{N}_1$.

Дифференциальное уравнение движения точки на этом участке:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{R} + m\vec{g} + \vec{N}_1.$$

В проекции на ось z, направленную от точки *A* в сторону движения тела на этом участке, уравнение движения тела имеет вид

$\ddot{z} = Q - R = Q - \mu\,\dot{z}$, отсюда $\ddot{z} = \frac{1}{m}(Q - \mu\,\dot{z}) = 5 - 0{,}2\,\dot{z}$.

Учитывая дифференциальную зависимость между проекцией скорости тела и проекцией ускорения $\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$, получаем $\frac{d\dot{z}}{dt} = 5 - 0{,}2\,\dot{z}$ . Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{d\dot{z}}{5-0{,}2\,\dot{z}} = dt; \qquad -\frac{1}{0{,}2}ln|5 - 0{,}2\,\dot{z}| = t + C_1.$$

Постоянную интегрирования $C_1$ определим из начальных условий движения. При $t = 0$ $\dot{z} = V_0$, тогда $C_1 = -\frac{1}{0{,}2}ln\,|5 - 0{,}2\,V_0|$.

После подстановки $C_1$ в уравнение имеем

$$t = -\frac{1}{0{,}2}ln\left|\frac{5 - 0{,}2\,\dot{z}}{5 - 0{,}2\,V_0}\right|$$

Согласно условию, время движения тела на участке $AB$ составляет $\tau_{AB} = 1c$, тогда скорость в точке *B* составит

$$\dot{z} = 25 - 20e^{-0{,}2\,t};\ \ V_B = 25 - 20e^{-0{,}2} = 8{,}62м/с.$$

Рассмотрим движение груза на участке *BC* с начальной скоростью $V_B = 8{,}62м/c$. Составим дифференциальное уравнение движения тела на этом участке

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N}_2.$$

Спроецируем уравнение движения на ось $x$, начало которой находится в точке *B*, а направление соответствует отрезку $BC$:

$$m\ddot{x} = F - F_{тр} - mg\,sin60^0.$$

Сила трения скольжения определяется по формуле $F_{тр} = kN_2$. Силу нормальной реакции $N_2$ трубы на участке $BC$ определим из проекции уравнения движения на ось $y$: $0 = N_2 - mg\,cos60^0$, $N_2 = mg\,cos60^0$, $F_{тр} = kmg\,cos60^0$. Тогда уравнение движение примет вид:

$$m\ddot{x} = 6t^2 - kmg\,cos60^0 - mg\,sin60^0; \quad \ddot{x} = 3t^2 - 8{,}98.$$

Интегрируя уравнение, получим:

$$\dot{x} = t^3 - 8{,}98t + C_2;$$

$$x = \frac{t^4}{4} - \frac{8{,}98t^2}{2} + C_2t + C_3;$$

Найдем постоянные интегрирования. Начальные условия при движении груза на участке BC: при $t = 0$ $\dot{x}_0 = V_B = 8{,}62 м/с$, $x_0 = x_B = 0 м$, тогда $C_2 = 8{,}62 м/с$, $C_3 = 0 м$.

Подставив значения найденных постоянных в уравнение движения, получим закон движения груза *D* на участке *BC*:

$$x = 0{,}25t^4 - 4{,}49t^2 + 8{,}62t.$$

Ответ: $x = 0{,}25t^4 - 4{,}49t^2 + 8{,}62t$.

### Указания к задаче Д2

При решении задачи Д2 следует учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через искомую скорость (линейную или угловую).

Для установления зависимостей между линейной скоростью и угловой скоростью катящегося тела можно использовать мгновенный центр скоростей.

При определении работы линейные и угловые перемещения всех тел системы следует выразить через заданное перемещение S, учитывая, что эта зависимость будет аналогичной зависимости между линейными и угловыми скоростями тел. Если по данным табл. Д2 масса груза равна 0, то этот груз допускается не изображать на чертеже и не учитывать в расчетах. Шкивы 1 и 2 всегда входят в систему.

### Пример решения задачи Д2

Механическая система (рис. Д2) состоит из сплошного цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней $R_2$ и $r_2$ (масса шкива равномерно распределена по его внешнему ободу) и груза 3 (коэффициент трения груза о плоскость равен $k$). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2.

Под действием силы $F = f(S)$ система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 2 действует постоянный момент $M_2$ сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 4$ кг; $m_2 = 10$ кг; $m_3 = 2$ кг; $R_2 = 0{,}2$ м; $r_2 = 0{,}1$ м; $k = 0{,}1$; $M_2 = 0{,}6\,Нм$; $F = 2(1 + 2S)\,Н$.

Определить: скорость $V_1$ центра масс катка, когда $S = S_1 = 1 м$.

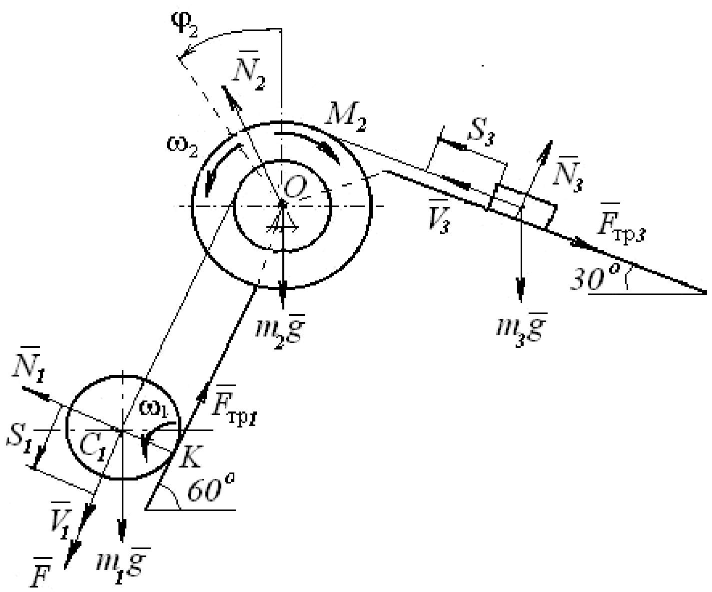


Рис. Д2

Решение

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. На систему действуют внешние силы: активные $\vec{F}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, момент сопротивления $\mathrm{M}_2$, реакции $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, $\vec{F}_{\text{тр}2}$.

Для определения $V_1$ воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e.$$

В начальный момент система находилась в покое, поэтому $\mathrm{T}_0 = 0$. Определим кинетическую энергию системы после того, как каток пройдет расстояние $S_1 = 1\text{м}$. Кинетическая энергия системы величина аддитивная и равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Первое тело системы – каток совершает плоское движение, поэтому его кинетическая энергия складывается из двух частей: энергии поступательного движения и энергии вращательного движения

$$\mathrm{T}_1 = \tfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2,$$

Угловая скорость катка выражается через его линейную скорость $\omega_1 = V_1/r_1$, момент инерции сплошного цилиндрического катка имеет вид $I_1 = 0{,}5 m_1 r_1^2$, кинетическая энергия катка $\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{4} m_1 V_1^2 = \frac{3}{4} m_1 V_1^2$.

Второе тело системы (шкив) вращается относительно неподвижной оси. Его угловая скорость $\omega_2 = V_1/r_2$, момент инерции шкива $I_2 = m_2 R_2^2$, кинетическая энергия

$$\mathrm{T}_2 = \tfrac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \tfrac{1}{2} m_2 V_1^2 (R_2/r_2)^2.$$

Третье тело системы движется поступательно, его скорость $V_3 = \omega_2 R_2 = (V_1/r_2) R_2$, а кинетическая энергия $\mathrm{T}_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 = \frac{1}{2} m_3 V_1^2 (R_2/r_2)^2$.

Кинетическая энергия системы, выраженная через поступательную скорость катка

$$T=[0{,}75m_1+0{,}5m_2(R_2/r_2)^2+0{,}5m_3(R_2/r_2)^2]V_1^2.$$

Подставив все известные величины в формулу энергии, получим:

$$\Delta\text{T}=27\,V_1^2.$$

Причиной изменения кинетической энергии системы является работа внешних сил, приложенных к ней. Найдём сумму работ всех действующих внешних сил на заданном перемещении $S_1$. Для удобства выразим все линейные и угловые перемещения тел системы через перемещение катка $S_1$:

$$\varphi_2=S_1/r_2\,;\;\; S_3=\varphi_2 R_2=S_1\,R_2/r_2.$$

Силы $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{\text{тр}1}$ не совершают работу так как они приложены к мгновенному центру скоростей катка, реакция $\vec{N}_3$ перпендикулярна перемещению тела 3, силы $\vec{N}_2$ и $m_2\vec{g}$ приложены к неподвижной оси шкива. Работа других сил системы представлена ниже:

$$\text{A}(\vec{F})=\int_0^{S_1}2(1+2S)dS=2(S_1+S_1^2);$$

$$A(m_1\vec{g})=m_1 g\,sin60^0\,S_1;$$

$$A(m_3\vec{g})=-m_3 g\,sin30^0\,S_3=-m_3 g\,sin30^0\,S_1\,R_2/r_2;$$

$$\text{A}(M_2)=-M_2\varphi_2=-M_2\,S_1/r_2;$$

$$A(\vec{F}_{\text{тр}3})=-F_{\text{тр}3}S_3=-km_3 g\,cos30^0\,S_1\,R_2/r_2.$$

Суммарная работа всех сил системы равна

$$\Sigma A_k^{\text{e}}=2(S_1+S_1^2)+m_1 g\,sin60^0\,S_1-m_3 g\;S_1\,R_2/r_2\,(sin30^0+kcos30^0)-M_2\,S_1/r_2=8{,}96\text{ Дж}$$

.

Сравним работу сил системы и изменение ее кинетической энергии

$$\Sigma A_k^{\text{e}}=\Delta\text{T};\quad 8{,}96=27\,V_1^2,\text{отсюда } V_1=0{,}58\text{ м/с}.$$

Ответ: $V_1=0{,}58$ м/с.

**Указания к работе Д3**

Системы находится на горизонтальной гладкой поверхности, и на нее действуют только вертикальные внешние силы, следовательно, сумма проекций всех внешних сил данной системы равна на ось $x$ нулю $\sum_{i=1}^{n}F_{ix}^{\text{e}}=0$. В этом случае систему можно считать замкнутой в направлении оси $x$.

Для решения задачи можно воспользоваться законом сохранения импульсов или законом сохранения движения центра масс (в проекции на ось $x$). Первоначально система находилась в состоянии покоя, следовательно, и в последующие моменты времени координата $x_C$ ее центра масс изменяться не будет, хотя отдельные тела системы могут совершать относительные движения под действием внутренних сил системы.

**Пример выполнения задачи Д3**

Система состоит из четырех тел. Массы тел соответственно равны $m_1 = 6m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m_4 = m$; $r_3 = r$, $\alpha = 60^0$ (рис. Д3). Закон движения тела 3 имеет вид $\varphi_3 = 0{,}5t^2$ (рад).

Определить закон движения призмы по идеально гладкой плоскости. В начальный момент система находилась в покое.

Обозначим начальные координаты центров масс тел системы $x_1, x_2, x_3, x_4$. Тогда координата центра масс системы определяется равенством (3.5)

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i.$$

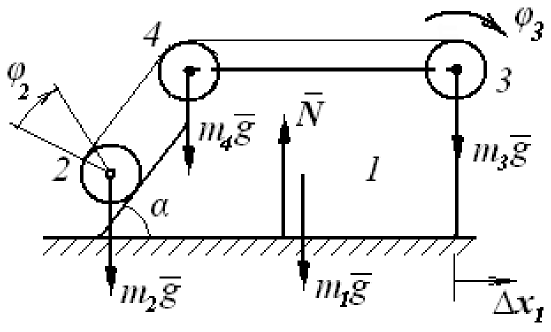

Рис. Д3

Если под действием сил тела системы совершат абсолютные перемещения, и проекции перемещений на ось $x$ соответственно равны $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4$, то новые координаты тел системы станут равными

$$x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2,\ x_3 + \Delta x_3,\ x_4 + \Delta x_4.$$

Тогда, учитывая, что положение центра масс замкнутой системы не изменится $x_C = const$, получим равенство:

$$m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + m_3\, x_3 + m_4\, x_4 =$$
$$= m_1\,(x_1 + \Delta x_1) + m_2\,(x_2 + \Delta x_2) + m_3\,(x_3 + \Delta x_3) + m_4\,(x_4 + \Delta x_4).$$

После преобразований это условие можно представить в виде:

$$m_1\,\Delta x_1 + m_2 \Delta\, x_2 + m_3\,\Delta x_3 + m_4 \Delta\, x_4 = 0. \qquad (1)$$

Будем считать, что абсолютное перемещение призмы 1 $(\Delta x_1 = \Delta x)$ совершается вправо по оси $x$. Определим абсолютные перемещения других тел, выражая их через $\Delta x$. Блок 3 и шкив 4 закреплены на призме, следовательно, их относительные перемещения равны нулю, а абсолютные - соответствуют перемещению призмы

$$\Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_1 = \Delta x. \qquad (2)$$

Каток 2 совершает сложное движение, состоящее из переносного поступательного движения вместе с призмой $\Delta x$ и относительного движения (качения при отсутствии скольжения) по наклонной грани призмы

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2^{\text{отн}} = \Delta x + \Delta x_2^{\text{отн}}, \qquad (3)$$

где $\Delta x_2^{\text{отн}}$ – проекция на ось $x$ перемещения центра масс катка в процессе его относительного движения по призме.

Каток приводится в движение по наклонной грани призмы внутренними силами системы, которые заставляют вращаться блок 3. Выразим перемещение центра масс катка $S_2$ вдоль наклонной грани призмы через угловое перемещение блока $\varphi_3 = 0{,}5t^2$:

$$S_2 = \frac{\varphi_3 r_3}{2} = \frac{0{,}5 r_3 t^2}{2},$$

тогда $\Delta x_2^{\text{отн}} = S_2 cos\alpha = 0{,}25t^2 r_3\ cos\alpha$, а абсолютное перемещение центра катка по оси $x$

$$\Delta x_2 = \Delta x + \Delta x_2^{\text{отн}} = \Delta x + 0{,}25t^2 r_3\ cos\alpha. \qquad (4)$$

Подставив полученные перемещения тел системы в уравнение (1), получим:

$$m_1\ \Delta x + m_2(\Delta x + 0{,}25t^2 r_3\ cos\alpha) + m_3\ \Delta x + m_4 \Delta\ x = 0.$$

Отсюда следует уравнение движения призмы по горизонтальной гладкой поверхности

$$\Delta x = -\frac{0{,}25\, m_2\ t^2 r_3\ cos60^0}{m_1\ + m_2 + m_3\ + m_4} = -\frac{0{,}25 \cdot 2m \cdot r_3 \cdot t^2 \cdot 0{,}5}{6m + 2m + m + m} = -\frac{r_3\ \cdot t^2}{40}.$$

Знак минус показывает, что это движение осуществляется в противоположную сторону оси $x$.

### Пример выполнения задачи Д4

Механическая система (рис. Д4) состоит из груза 1, сплошного цилиндрического катка 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3$ и $r_3$ (радиус инерции шкива $\rho_3$). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкив 3.

Под действием постоянной силы $\vec{F}$ система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 3 действует постоянный момент $M_3$ сил трения.

Дано: $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 1$ кг; $m_3 = 2$ кг; $F = 10$ Н; $\rho_3 = 0{,}1$ м; $M_3 = 1{,}2$ Нм; $R_2 = R_3 = 0{,}4$ м; $r_3 = R_3/2$.

Определить: $a_1$ – ускорение первого тела, а также силы натяжения нитей, соединяющих тела системы.

Решение.

Механическая система совершает плоское движение. Обозначим эту плоскость $xOy$. Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера. Построим расчетную схему (рис. Д4), на которой покажем внешние силы, действующие на тела механической системы: активные силы, реакции связей, а также силы инерции и моменты сил инерции.

На груз 1 действуют сила $\vec{F}$, сила тяжести $m_1\vec{g}$ , реакция поверхности $\vec{N}_1$ и равнодействующая сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}} = -m_1\vec{a}_1$. Вектор $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{a}_1$.

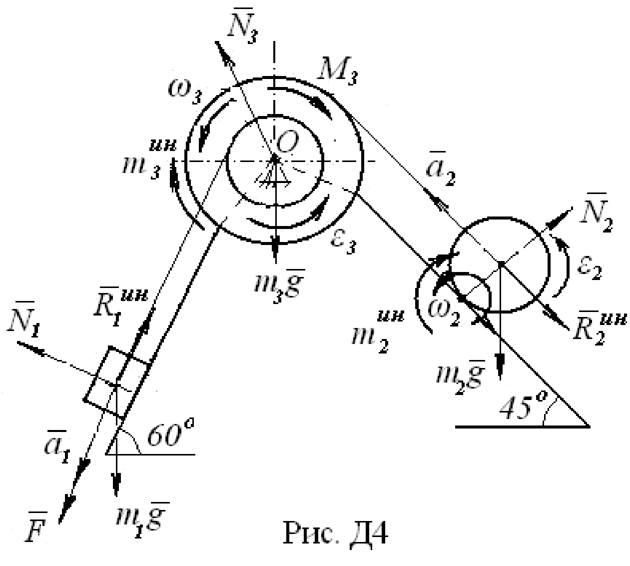

Рис. Д4

На ступенчатый шкив 3 действуют сила тяжести $m_3\vec{g}$, реакция оси шарнира $\vec{N}_3$, момент $M_3$ силы трения и главный момент сил инерции

$m_3^{\text{ин}} = -I_3\varepsilon_3$, где $I_3 = m_3\rho_3^2$ – момент инерции ступенчатого блока относительно оси вращения $z$, проходящей перпендикулярно плоскости движения.

Выразим угловое ускорение ступенчатого блока 3 через поступательное ускорение первого груза $\vec{a}_1$. Зависимость скорости тела 1 от угловой скорости ступенчатого блока выражается равенством $V_1 = \omega_3 r_3$. Продифференцируем это равенство по времени

$$a_1 = \frac{dV_1}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}r_3 = \varepsilon_3 r_3; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_1}{r_3}.$$

Главный момент сил инерции направлен противоположно угловому ускорению ступенчатого блока и равен

$$m_3^{\text{ин}} = -m_3\rho_3^2\frac{a_1}{r_3}.$$

На каток 2 действует сила тяжести $m_2\vec{g}$, реакция связи $\vec{N}_2$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ в точке контакта катка с поверхностью, главный вектор сил инерции $\vec{R}_2^{\text{ин}} = -m_2\vec{a}_2$ и главный момент сил инерции $m_2^{\text{ин}} = -I_2\varepsilon_2$, где $I_2$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Выразим $a_2$ и $\varepsilon_2$ через поступательное ускорение первого тела $a_1$. Для этого воспользуемся зависимостью между скоростями тел системы

$$V_2 = \omega_3 R_3 = \frac{V_1}{r_3}R_3; \quad \omega_2 = \frac{V_2}{R_2}.$$

Продифференцируем уравнения и получим

$$a_2 = \frac{dV_2}{dt} = \frac{dV_1}{dt}\frac{R_3}{r_3} = a_1\frac{R_3}{r_3}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{dV_2}{dt}\frac{1}{R_2} = \frac{a_1}{R_2}\frac{R_3}{r_3}.$$

Учитывая, что каток является однородным диском ($I_2 = 0{,}5m_2R_2^2$), получим:

$$R_2^{\text{ин}} = -m_2a_2 = -m_2\frac{R_3}{r_3}a_1; \;\; m_2^{\text{ин}} = -\frac{m_2R_2^2}{2}\frac{a_1}{R_2}\frac{R_3}{r_3} = -\frac{m_2R_2}{2}\frac{R_3}{r_3}a_1.$$

Для определения ускорения $a_1$ и реакций нитей $F_1$ и $F_2$ рассмотрим динамическое равновесие тел, входящих в систему. Для каждого тела составим расчетную схему (рис. Д4 а, б, в).

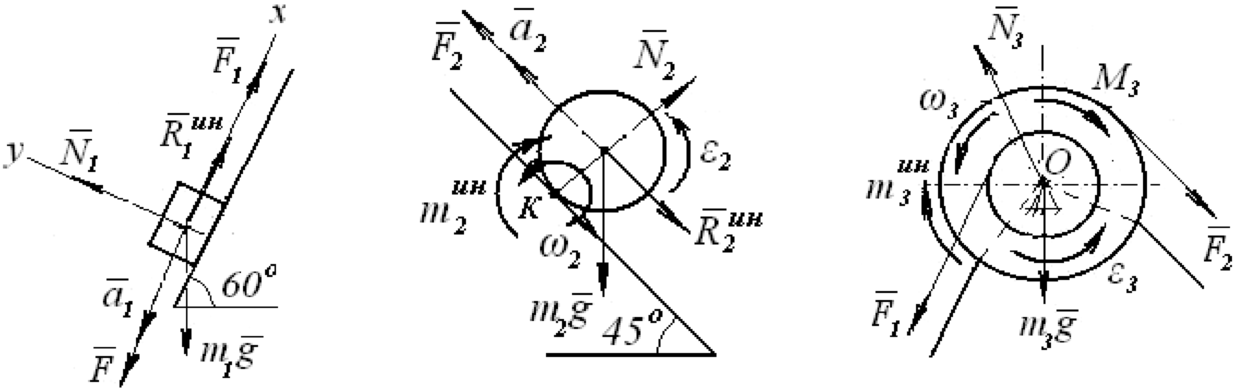


Рис. Д4а Рис. Д4б Рис. Д4в

Для определения трех неизвестных величин достаточно составить три независимых уравнения равновесия.

Условие динамического равновесия 1 тела ($\sum F_{xi} = 0$)

$$F_1 + R_1^{\text{ин}} - F - m_1 g \cos 30^0 = 0.$$

Условие динамического равновесия 2 тела ($\sum m_{zK}(\vec{F}_i) = 0$). Чтобы не учитывать момент силы трения, запишем уравнение равновесия для оси, проходящей через мгновенный центр скоростей $K$

$$F_2\, R_2 - R_2^{\text{ин}} R_2 - m_2^{\text{ин}} - m_2 g R_2 cos45^0 = 0.$$

Условие динамического равновесия 3 тела ($\sum m_z(\vec{F}_i) = 0$)

$$F_1 r_3 - F_2 R_3 - M_3 - m_3^{\text{ин}} = 0.$$

Подставим вычисленные ранее значения сил инерции и получим систему уравнений:

$$F_1 + m_1 a_1 - F - m_1 g \cos 30^0 = 0;$$

$$F_1 r_3 - F_2 R_3 - M_3 - m_3 \rho_3^2 \frac{a_1}{r_3} = 0;$$

$$F_2\, R_2 - m_2 \frac{R_3}{r_3} a_1 R_2 - \frac{m_2 R_2}{2} \frac{R_3}{r_3} a_1 - m_2 g R_2 cos45^0 = 0.$$

Если учесть исходные данные задачи то система упростится

$$F_1 + 3a_1 - 35{,}46 = 0;$$

$$0{,}2F_1 - 0{,}4F_2 - 1{,}2 - 0{,}1a_1 = 0;$$

$$F_2 - 3a_1 - 6{,}93 = 0.$$

Решая систему, получим результат.

Ответ: $a_1 = 1{,}642 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $F_1 = 30{,}534$ Н, $F_2 = 11{,}856$ Н.

**Пример выполнения задачи Д5**

Механическая система (рис. Д5) состоит из груза 1, сплошного цилиндрического катка 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней $R_3$ и $r_3$ (радиус инерции шкива $\rho_3$). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкив 3.

Под действием постоянной силы $\vec{F}$ система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 3 действует постоянный момент $M_3$ сил трения.

Дано: $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 1$ кг; $m_3 = 2$ кг; $F = 10$ Н; $\rho_3 = 0{,}1$ м; $M_3 = 1{,}2$ Нм; $R_2 = R_3 = 0{,}4$ м; $r_3 = R_3/2$.

Определить: $a_1$ – ускорение первого тела

Решение

Механическая система имеет одну степень свободы ($S$=1). Поэтому для определения ее положения достаточно одной обобщенной координаты. Так как по условию задачи требуется определить ускорение первого тела, которое совершает поступательное прямолинейное движение, то выберем линейную обобщенную координату $\text{x}$, следящую за перемещением центра масс первого тела вдоль наклонной поверхности (рис. Д5).

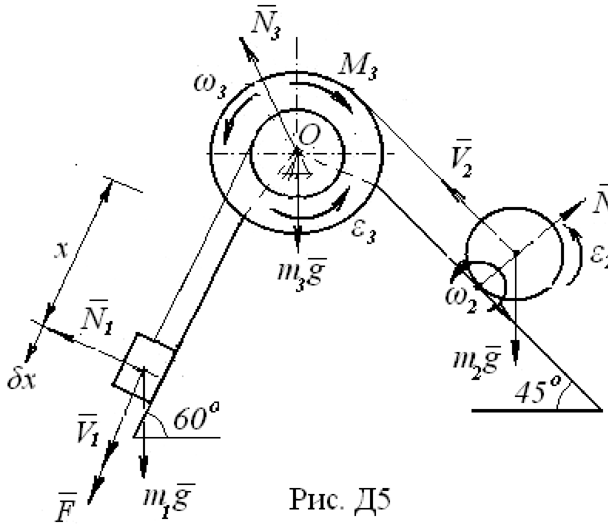

Рис. Д5

Обозначим обобщенную координату системы $q = x$, тогда обобщённая скорость, которая соответствует скорости первого тела системы $\dot{q} = \dot{x} = V_1$. Для решения используем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = Q_x,$$

где $\mathrm{T}$ – кинетическая энергия системы;

$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x}$ – обобщенная сила системы;

$\delta A_x$ – сумма элементарных работ внешних сил системы на приращении $\delta x$ выбранной обобщённой координаты.

Определяем кинетическую энергию системы, выразив её через обобщенную скорость $\dot{x} = V_1$

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3.$$

Первое тело системы совершает поступательное движение со скоростью $\dot{x} = V_1$, следовательно, его кинетическая энергия

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 = 1{,}5\dot{x}^2.$$

Второе тело совершает плоское движение, которое представим, как сумму поступательного и вращательного движений

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2.$$

Выразим линейную и угловую скорости второго тела через $\dot{x}$

$$V_2 = V_1 R_3/r_3 = \dot{x}\, R_3/r_3 = 2\dot{x}, \quad \omega_2 = V_2/R_2 = \dot{x}\, R_3/(r_3 R_2) = 5\dot{x},$$

и вычислим кинетическую энергию

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 R_2^2}{2}\omega_2^2 = 2\dot{x}^2 + 0{,}04 \cdot 25\dot{x}^2 = 3\dot{x}^2.$$

Третье тело совершает вращательное движение с угловой скоростью $\omega_3 = V_1/r_3 = 5\dot{x}$, его кинетическая энергия

$$\mathrm{T}_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 = 0{,}25\dot{x}^2.$$

Таким образом, кинематическая энергия системы равна

$$\mathrm{T} = 1{,}5\dot{x}^2 + 3\dot{x}^2 + 0{,}25\dot{x}^2 = 4{,}75\dot{x}^2.$$

Определим обобщённую силу системы, для этого используем элементарную работу сил системы на перемещении $\delta x$

$$\delta A_x = F\delta x + m_1 g\, sin60^0 \delta x - M_3 \delta\varphi_3 - m_2 g\, sin45^0 \delta S_2.$$

Выразим угловое перемещение шкива и линейное перемещение катка через перемещение первого тела

$$\delta\varphi_3 = \delta x / r_3 = 5\,\delta x, \quad \delta S_2 = \delta x R_3 / r_3 = 2\delta x,$$

тогда $\delta A_x = 10\delta x + 25{,}98\delta x - 6\delta x - 14{,}14\delta x = 15{,}84\,\delta x$.

Выполним дифференцирование и воспользуемся уравнением Лагранжа

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}} = 9{,}5\dot{x}; \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = 0; \qquad \frac{d}{dt}(9{,}5\dot{x}) = 15{,}84.$$

Решая полученное уравнение, найдем искомое ускорения первого тела

$$9{,}5\ddot{x} = 15{,}84; \quad a_1 = \ddot{x} = 1{,}66\,\text{м/с}^2.$$

Результат расчета согласуется с ранее выполненным решением задачи Д4, которая использует ту же расчетную схему и те же исходные данные.

Ответ: $a_1 = 1{,}66\ \text{м/с}^2$