

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Техническая механика

1. Код и наименование направления подготовки:

44.03.01 Педагогическое образование

2. Профиль подготовки:

Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств

3. Квалификация (степень) выпускника:

Бакалавр

4. Форма обучения:

Очная, заочная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

кафедра прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

6. Составитель(и):

Зульфикарова Т.В., кандидат технических наук, доцент,

Е. Н. Солодовникова, старший преподаватель кафедры прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания

7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Вид учебных занятий	Деятельность студента
Лекция	<p>При написании лекций студент должен кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения, пометать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. В некоторых случаях требуется проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь.</p> <p>При изучении теоретического материала необходимы выделение вопросов, терминов, материала, который вызывает трудности, поиск ответов в учебной и справочной литературе. Если самостоятельно не удастся разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии.</p>
Практические занятия	<p>В процессе освоения дисциплины студенты выполняют самостоятельные работы. Решение каждой задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями о том, какие законы используются для решения, какие математические преобразования приводят к результату и т.п.</p>
Подготовка к зачету	<p>При подготовке к зачету необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу, отработанные методы решения задач и приобретенные навыки анализа и проверки выполненных решений.</p>

8. Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Рассматриваемые вопросы
Семестр 3 / 3		
1.1	Основные положения	<p>Основные понятия сопротивления материалов: прочность, жесткость, устойчивость. Расчетные формы, их классификация и методы соединения. Метод сечения. Силы внешние и внутренние. Интегральные зависимости между внутренними силами и напряжениями. Деформации. Принципы и допущения сопротивления материалов.</p>
1.2	Диаграммы испытаний материалов	<p>Испытания конструкционных материалов на растяжение и сжатие. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов. Механические характеристики материалов: напряжения предельные, допускаемые и расчетные. Коэффициент запаса прочности. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона.</p>
1.3	Виды напряженных состояний	<p>Напряженно-деформированное состояние элемента объема. Нормальные и касательные напряжения. Тензор напряжений. Линейное и плоское напряженные состояния. Закон постоянства суммы нормальных напряжений. Закон парности касательных напряжений. Объемное напряженное состояние. Обобщенный закон Гука. Тензор деформаций. Потенциальная энергия деформаций</p>
1.4	Геометрические характеристики сечений	<p>Геометрические характеристики сечения: площадь, осевые статические моменты, моменты</p>

		инерции (осевые, центробежные и полярные), радиусы инерции. Главные оси и главные моменты инерции. Моменты инерции практически важных сечений: прямоугольного, круглого, трубчатого.
1.5	Растяжение и сжатие	Внутренние усилия при растяжении и сжатии. Эпюры продольных сил и правила их контроля. Нормальные напряжения. Напряжения в наклонных сечениях. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Допускаемые напряжения. Расчет на прочность и жесткость при растяжении (сжатии).
1.6	Смятие	Неоднородность нормальных напряжений при небольшой площади контакта между телами. Контактные напряжения и их расчет. Проверка прочности деталей на смятие. Принцип Сен-Венана.
1.7	Срез	Основные понятия деформаций среза. Закон Гука при срезе. Модуль сдвига. Условие прочности при срезе. Расчет сварных соединений на срез. Расчет болтовых и заклепочных соединений на срез и смятие.
1.8	Кручение.	Деформации кручения. Закон Гука при кручении. Распределение касательных напряжений при кручении. Определение деформаций кручения. Потенциальная энергия Расчеты на прочность и жесткость при кручении.
1.9	Поперечный изгиб.	Основные понятия и определения Чистый изгиб. Поперечный плоский изгиб. Правила знаков. Дифференциальные зависимости при изгибе. Метод сечений и правила контроля эпюр. Нормальное напряжение при изгибе. Касательные напряжения при изгибе, формула Журавского. Расчеты на прочность при изгибе.
Семестр 4 / 4		
1.10	Уравнение упругой линии балки.	Линейные и угловые перемещения при изгибе. Уравнение упругой линии балки. Метод непосредственного интегрирования. Метод Клебша. Определение прогибов балки и угловых поворотов сечений. Расчет на жесткость.
1.11	Сложный и кривой изгибы	Основные понятия и положения. Напряжения при сложном и кривой изгибе. Проверка прочности. Определение уравнения нейтральной линии сечения при сложном изгибе. Условие жесткости.
1.12	Внецентренное растяжение (сжатие)	Изгиб с растяжением или сжатием. Полус давления. Уравнение нейтральной линии сечения. Распределение нормальных напряжений. Условия прочности и жесткости при внецентренном действии продольных сил. Частные случаи.
1.13	Изгиб с кручением	Совместное действие изгиба и кручения. Порядок расчета Максимальные, главные и эквивалентные напряжения. Гипотезы прочности. Гипотеза наибольших касательных напряжений. Гипотеза энергии формоизменения.
1.14	Продольный изгиб	Критическое состояние стержня. Формула Эйлера

	стержней	ра. Сила Эйлера. Влияние условий крепления. Гибкость, коэффициент продольного изгиба. Формула Ясинского. Расчеты на устойчивость. Метод последовательного приближения. Продольно-поперечный изгиб стержней.
1.15	Динамические нагрузки	Понятия о динамических нагрузках и динамических напряжениях. Переменные нагрузки. Циклы напряжений. Усталостное разрушение, его причины и характер. Кривая усталости, предел выносливости. Расчеты на выносливость.
1.16	Ударные нагрузки	Ударные нагрузки. Динамический коэффициент при ударе. Метод Верещагина и его применение для вычисления интеграла Мора. Правило знаков. Напряжение при ударных нагрузках. Коэффициент запаса. Влияние упругости опор на напряжения при ударе. Демпферы.

9. Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим/лабораторным занятиям

п/п	Наименование раздела дисциплины	Рассматриваемые вопросы
Семестр 3 / 3		
2.1	Основные положения	Метод сечения. Силы внешние и внутренние. Интегральные зависимости между внутренними силами и напряжениями.
2.2	Диаграммы испытаний материалов	Механические характеристики материалов: предел упругости, предел пластичности и предел прочности. Работа со справочными материалами. Модуль упругости. Модуль сдвига. Коэффициент Пуассона.
2.3	Виды напряженных состояний	Исследование плоского напряженного состояния. Определение величин и направлений главных напряжений. Изменение нормальных и касательных напряжений при поворотах сечения на угол α ,
2.4	Геометрические характеристики сечений	Вычисление геометрические характеристики сечения: площади, осевых статических моментов, геометрического центра сечения, моментов инерций сечения относительно центральных и главных осей.
2.5	Растяжение и сжатие	Расчет ступенчатого бруса на продольные силы. Построение эпюры продольных сил и нормальных напряжений от действия сосредоточенных и распределенных сил. Определение сечения бруса по допускаемым напряжениям. Определение деформаций бруса.
2.6	Смятие	Расчет соединений элементов машин и механизмов на смятие (местное сжатие). Особенности расчета соединений на болтах и заклепках. Определение числа соединительных элементов при расчетах на смятие.
2.7	Срез	Расчет соединений элементов машин и механизмов на срез. Проектный и проверочный расчеты. Определение катета или длины сварного шва при расчете по прочности на срез. Расчет болтовых и заклепочных

		соединений на срез.
2.8	Кручение.	Расчет ступенчатого вала на действие крутящих моментов. Построение эпюры крутящих моментов. Проектный расчет вала из условия прочности. Построение эпюр касательных напряжений. Определение деформаций кручения
2.9	Поперечный изгиб.	Построение эпюр внутренних усилий в балках. Отработка правила знаков. Проектный расчет балки по нормальным и касательным напряжениям для круглого, прямоугольного и двутаврового сечений. Выбор сечения наиболее эффективного по расходу материалов.
Семестр 4 / 4		
2.10	Уравнение упругой линии балки.	Получение уравнения упругой линии в дифференциальной форме. Применение метода Клебша для интегрирования дифференциального уравнения. Вычисление постоянных интегрирования из условий на опорах балки. Определение прогибов балки и угловых поворотов сечений. Проверка соответствия жесткости балки нормативным значениям.
2.11	Сложный и кривой изгибы	Расчет балок при сложном изгибе, при кривой изгибе. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Определение положения нейтральной оси сечения. Проектный расчет балок и проверка прогибов.
2.12	Внецентренное растяжение (сжатие)	Расчет стержней на внецентренное сжатие (растяжение). Определение внутренних усилий и предварительный подбор сечения. Нахождение уравнения нейтральной линии сечения. Определение наибольших напряжений и проверка его прочности. Особенности расчета рам и арок.
2.13	Изгиб с кручением	Расчет валов на совместное действие изгиба с кручением. Построение эпюр внутренних усилий и вычисление эквивалентного усилия. Проектный расчет вала. Проверка подобранного сечения прочности и жесткости.
2.14	Продольный изгиб стержней	Расчет гибких стержней на устойчивость методом последовательного приближения. Закрепления концов стержня и форма поперечного сечения заданы. Опасность работы тонких стержней на сжатие с изгибом.
2.15	Динамические нагрузки	Расчет стержней на динамические: ударные и переменные нагрузки. Вычисление динамических нагрузок и подбор сечения. Влияние
2.16	Ударные нагрузки	Расчет балки на ударные нагрузки. Вычисление динамического коэффициента методом Верещагина. Запас прочности при замене одной опоры на упругую.

10. Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

Методические рекомендации к самостоятельной работе

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер контрольной работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради, на четной странице (для удобства проверки). Сверху указывается номер задачи, далее делается расчетная схема (карандашом), записываются исходные данные и искомые величины (текст задачи не переписывать). Расчетная схема выполняется с учетом данных решаемого варианта задачи: все углы, действующие силы, число сил и их расположение на рисунке должны соответствовать этим условиям.

Расчетная схема должна быть аккуратной и наглядной, а ее размеры должны позволить показать все необходимые векторы (силы, скорости, ускорения и др.). Решение каждой задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями, какие аксиомы, теоремы или законы используются для решения; какие математические преобразования приводят к результату и т.п. Студентам необходимо подробно излагать весь ход расчетов, указывая единицы измерения получаемых величин. На каждой странице нужно оставлять поля для замечаний рецензента.

Расчет бруса на растяжение (сжатие)

Пример 1. Брус длиной l нагружен равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q (кН/м) и сосредоточенной силой $F = 2ql/3$ кН, приложенной к свободному концу бруса (рис. 1, а). Построить эпюру нормальных сил и определить опасное сечение.

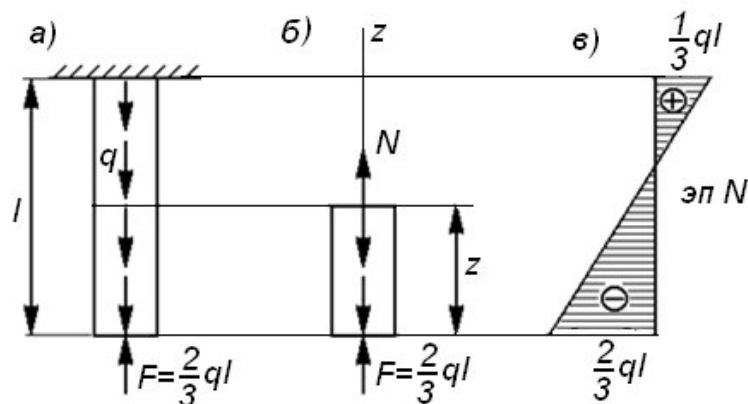


Рис. 1. Продольные усилия в брус.

Решение.

Для определения нормальных сил применим метод сечений. Мысленно разрежем брус на расстоянии z от свободного торца. Отбросим верхнюю часть, а для нижней части бруса составим уравнение равновесия (рис. 1, б).

Направим ось z и силу N по внешней нормали к сечению, тогда

$$\sum F_z = 0; N - qz + 2ql/3 = 0; N = qz - 2ql/3. \quad (1)$$

Из уравнения видно, что нормальная сила N меняется по длине бруса по линейному закону. Для построения эпюры находим значения силы в крайних сечениях: при $z = 0$ и $z = l$.

Подставим крайние значения z в уравнение (1):

- при $z = 0$ продольная сила $N = -2ql/3$, следовательно, внутренняя нормальная сила оказалась сжимающей;
- при $z = l$ $N = ql/3$ нормальная сила является растягивающей. Эюра нормальных сил в стержне показана на рис.1, в.

Наибольшее значение нормальной силы $N = 2ql/3$ соответствует свободному концу бруса. Это наиболее опасное сечение.

Пример 2. Ступенчатый брус с длинами участков $a = 0,5$ м, $b = 0,5$ м и $c = 0,4$ м (рис.2, а) нагружен сосредоточенными силами $P_1 = 40$ кН, $P_2 = 90$ кН и $P_3 = 110$ кН. Площади поперечных сечений участков: $A_1 = A_2 = 6$ см²; $A_3 = 14$ см². Модуль упругости материала стержня $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, предел прочности - $[\sigma] = 240$ МПа.

Требуется построить эюры продольных сил N , нормальных напряжений σ , продольных перемещений Δl и проверить, выполняется ли условие прочности стержня.

Решение.

1. Построим эюру продольных сил.

На брус действуют три сосредоточенные силы и реакция заделки. Разбиваем брус на участки, в пределах которых продольная сила является постоянной или изменяется по известному закону. В данном случае границами участков являются сечения, в которых приложены силы. Обозначим эти сечения A, B, C и D , начиная со свободного конца. Для контроля решения определим реакцию заделки: $\sum F_z = 0$; $R_D + P_1 - P_2 - P_3 = 0$; $R_D = 160$ кН.

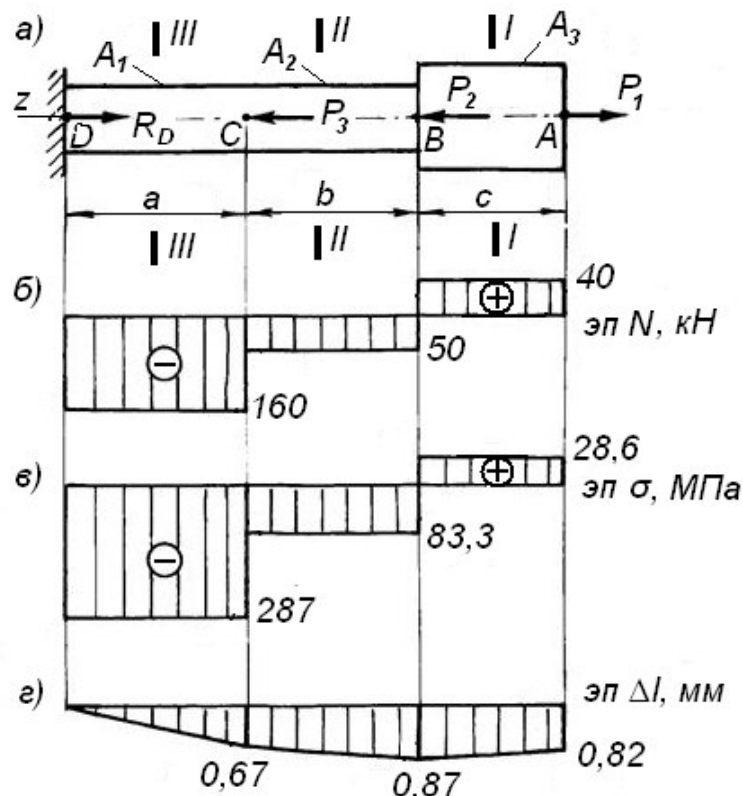


Рис. 2. Распределение внутренних усилий, напряжений и деформаций по

длине стержня.

Рассмотрим сечение $I - I$ на участке AB . Направим ось z и силу N по внешней нормали к сечению $I - I$ (рис. 2, а). Справа от сечения действует только растягивающая сила P_1 , поэтому $N_{I-I} = P_1 = 40$ кН.

Рассмотрим сечение $II - II$ на участке BC . Справа от него расположены две силы, направленные в разные стороны. Из условия равновесия отсеченной части получим $N_{II-II} = P_1 - P_2 = -50$ кН.

Рассмотрим сечение $III - III$ на участке CD . Составим уравнение равновесия и вычислим $N_{III-III} = P_1 - P_2 - P_3 = -160$ кН.

По найденным значениям N в выбранном масштабе строим эпюру, учитывая, что в пределах каждого участка продольная сила не зависит от координаты z . Положительные значения силы N откладываем вверх от оси z , а отрицательные – вниз (рис. 2, б).

2. Построим эпюру нормальных напряжений σ .

Вычисляем нормальные напряжения в поперечных сечениях на каждом участке бруса:

$$\begin{aligned}\sigma_{I-I} &= \frac{N_{I-I}}{A_3} = \frac{40 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-4}} = 28,6 \text{ МПа}; \\ \sigma_{II-II} &= \frac{N_{II-II}}{A_2} = \frac{-50 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -83,3 \text{ МПа}; \\ \sigma_{III-III} &= \frac{N_{III-III}}{A_2} = \frac{-160 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -267 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Положительные значения σ соответствуют напряжениям растяжения, а отрицательные – напряжениям сжатия. Эпюра напряжений показана на рис. 2, в.

3. Построим эпюру продольных деформаций стержня.

Для построения эпюры деформаций сначала по закону Гука ($\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$) вычисляем абсолютные удлинения (укорочения) отдельных участков бруса $\Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E} = \frac{\sigma \cdot l}{E}$:

$$\begin{aligned}\Delta l_{AB} &= \frac{\sigma_{I-I} \cdot l_{AB}}{E} = \frac{28,6 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11}} = 0,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \\ \Delta l_{BC} &= \frac{\sigma_{II-II} \cdot l_{BC}}{E} = \frac{-83,3 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11}} = -2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \\ \Delta l_{CD} &= \frac{\sigma_{III-III} \cdot l_{CD}}{E} = \frac{-267 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11}} = -6,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}.\end{aligned}$$

Определим перемещения сечений стержня, начиная с закрепленного конца. Сечение D не может смещаться под действием приложенных сил, поэтому его перемещение равно нулю $\Delta_D = 0$.

Перемещение сечения C составит $\Delta_C = \Delta l_{CD} = -6,7 \cdot 10^{-4}$ м. В результате укорочения участка CD сечение C сместится влево.

Перемещение сечения B является результатом изменения длин двух участков стержня DC и CB . Складывая эти удлинения, получаем

$$\Delta_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -6,7 \cdot 10^{-4} - 2,1 \cdot 10^{-4} = -8,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Рассуждая аналогично, вычисляем перемещение сечения А:
 $\Delta_A = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{AB} = -6,7 \cdot 10^{-4} - 2,1 \cdot 10^{-4} + 0,57 \cdot 10^{-4} = -8,23 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$

Построим эпюру перемещений, для этого в выбранном масштабе откладываем от оси значения вычисленных перемещений (рис. 2, г).

4. Проверка прочности бруса.

Условие прочности для случая одноосного растяжения-сжатия записывается в виде: $\sigma_{max} \leq [\sigma]$. Если материал имеет равную прочность по растяжению и сжатию, то знаки напряжений можно не учитывать. Так в данном случае $\sigma_{max} = 267 \text{ МПа} > 240 \text{ МПа} = [\sigma]$.

Следовательно, условие прочности не выполняется.

Пример 3. Подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения чугунного стержня, обеспечив ему достаточную прочность и жесткость. Дано: стержень нагружен продольными силами, $F = 40 \text{ кН}$ (рис. 3, а); длины участков определяются $L = 0,4 \text{ м}$; допустимые напряжения $[\sigma_p] = 350 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 800 \text{ МПа}$; допустимые деформации стержня $[\Delta l] = l/200$; модуль упругости материала $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; требуемое отношение высоты сечения к его ширине $h/b = 2$.

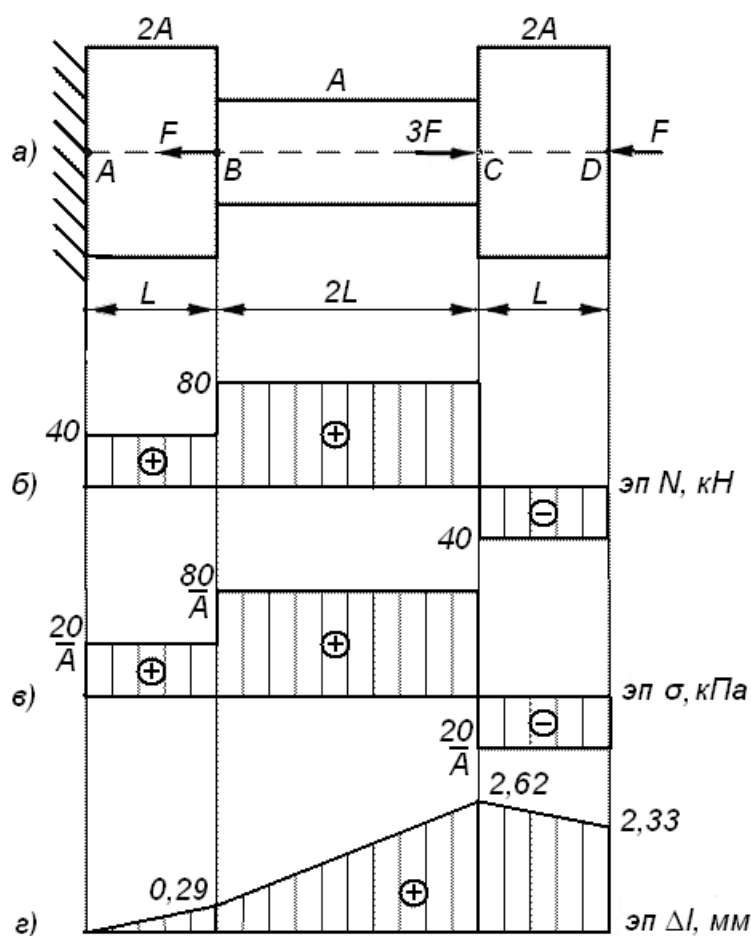


Рис. 3. Эпюры внутренних усилий, напряжений и деформаций в стержне.

Решение.

1. Построение эпюры продольных сил.

Учитывая характер приложения внешних сил и ступенчатое изменение площади поперечного сечения стержня, разбиваем его по длине на 3 участка. Применим метод сечений и определим внутренние продольные усилия на каждом участке, начиная со свободного конца:

- на участке CD $N_{CD} = -F = -40$ кН;
- на участке BC $N_{BC} = -F + 3F = 2F = 80$ кН;
- на участке AB $N_{AB} = -F + 3F - F = F = 40$ кН.

По найденным значениям в выбранном масштабе строим эпюру N . Положительные значения силы N откладываем вверх от оси Z , а отрицательные – вниз (рис. 3, б).

2. Построение эпюры нормальных напряжений.

Определим нормальные напряжения на каждом участке стержня:

- на участке CD $\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{2A} = \frac{-40 \cdot 10^3}{2A} = \frac{-20 \cdot 10^3}{A} = \frac{-20}{A}$ кПа;
- на участке BC $\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{80 \cdot 10^3}{A} = \frac{80}{A}$ кПа;
- на участке AB $\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{2A} = \frac{40 \cdot 10^3}{2A} = \frac{20}{A}$ кПа.

Распределение нормальных напряжений по длине стержня показано на рис. 3, в.

3. Нахождение площади поперечного сечения из условия прочности.

Наибольшие растягивающие напряжения соответствуют участку BC , наибольшие сжимающие напряжения соответствуют участку CD . Для вычисления площадей поперечных сечений стержня используем условия прочности $\sigma_{max.p} \leq [\sigma_p]$ и $\sigma_{max.c} \leq [\sigma_c]$.

Из условия прочности на сжатие $\sigma_{CD} = \left| \frac{-20 \cdot 10^3}{A} \right| \leq [\sigma_c]$ определяем требуемую площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{20 \cdot 10^3}{[\sigma_c]} = \frac{20 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,25 \text{ см}^2.$$

Из условия прочности на растяжение $\sigma_{BC} = \frac{80 \cdot 10^3}{A} \leq [\sigma_p]$ определяем площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{80 \cdot 10^3}{[\sigma_p]} = \frac{80 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^6} = 2,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,29 \text{ см}^2.$$

Необходимую площадь сечения следует принять из условия прочности при растяжении: $A \geq 2,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,29 \text{ см}^2$.

4. Нахождение площади поперечного сечения из условия жесткости.

При расчете по деформациям следует учитывать, что перемещение точки D будет равно сумме деформаций всех участков стержня. Величину абсолютной деформации для каждого участка найдем по формуле $\Delta l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E}$ или $\Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E}$. Вычислим абсолютные деформации на участках стержня:

- на участке CD $\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} L}{2A \cdot E} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2A \cdot 1,2 \cdot 10^{11}} = \frac{-6,7 \cdot 10^{-8}}{A}$ м;
- на участке BC $\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} 2L}{A \cdot E} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{A \cdot 1,2 \cdot 10^{11}} = \frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{A}$ м;

- на участке AB $\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB}L}{2A \cdot E} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2A \cdot 1,2 \cdot 10^{11}} = \frac{6,7 \cdot 10^{-8}}{A}$ м.

Абсолютную деформацию всего стержня определим сложением деформаций отдельных участков:

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{10^{-8}}{A} (-6,7 + 53,3 + 6,7) = \frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{A} \text{ м.}$$

Определим площадь поперечного сечения стержня из условия жесткости $\Delta l \leq [\Delta l]$, где $[\Delta l] = \frac{l}{200} = \frac{L+2L+L}{200} = \frac{1,6}{200} = 8 \cdot 10^{-3}$ м:

$$\frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{A} \leq 8 \cdot 10^{-3} .$$

Для обеспечения достаточной жесткости требуется площадь сечения

$$A \geq \frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 10^{-3}} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,67 \text{ см}^2.$$

Сопоставляя результаты расчета на прочность и жесткость, принимаем большее значение площади поперечного сечения $A = 2,29 \text{ см}^2$.

Размеры поперечного сечения подберем из условия прочности на растяжение с учетом заданного соотношения $h/b = 2$. Представим площадь поперечного сечения $A = h \cdot b = 2b^2$, откуда

$$b = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{2,29}{2}} = 1,07 \text{ см}, \quad h = 2,14 \text{ см.}$$

5. Построение эпюры перемещений.

Для изображения перемещения любого сечения стержня под действием приложенных сил строят эпюру перемещений Δl . За начало отсчета принимаем сечение A , удерживаемое в заделке, перемещение этого сечения равно нулю $\Delta l_A = 0$. Перемещения других характерных сечений стержня равны алгебраическим суммам изменений длин участков, расположенных левее:

$$\Delta l_B = \Delta l_{AB} = \frac{6,7 \cdot 10^{-8}}{A} = \frac{6,7 \cdot 10^{-8}}{2,29 \cdot 10^{-4}} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_C = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \frac{6,7 \cdot 10^{-8}}{A} + \frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{A} = \frac{60 \cdot 10^{-8}}{2,29 \cdot 10^{-4}} = 26,2 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_D = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{A} = \frac{53,3 \cdot 10^{-8}}{2,29 \cdot 10^{-4}} = 23,3 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Эпюра перемещений Δl сечений стержня представлена на рис. 3, а.

Расчет вала на кручение.

Пример 1

К валу, закрепленному одним концом (рис. 1, а), приложены моменты пар $m_1 = 1 \text{ кН м}$, $m_2 = 0,4 \text{ кН м}$ и $m_3 = 0,5 \text{ кН м}$. Пары создают кручение относительно оси вала в соответствии с заданными направлениями. Длины участков равны $a = 0,5 \text{ м}$, $b = 0,5 \text{ м}$, $c = 0,2 \text{ м}$, $d = 0,1 \text{ м}$. Вал изготовлен из материала с допустимыми касательными напряжениями $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ и модулем сдвига $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Требуется построить: эпюру крутящих моментов, определить поперечные размеры вала; проверить жесткость вала.

Решение

1. Построение эпюры крутящих моментов.

Разделяем вал на четыре участка. Границами участков являются те сечения, в которых действуют внешние моменты (A, B, D), и те сечения, где изменяется диаметр вала (C).

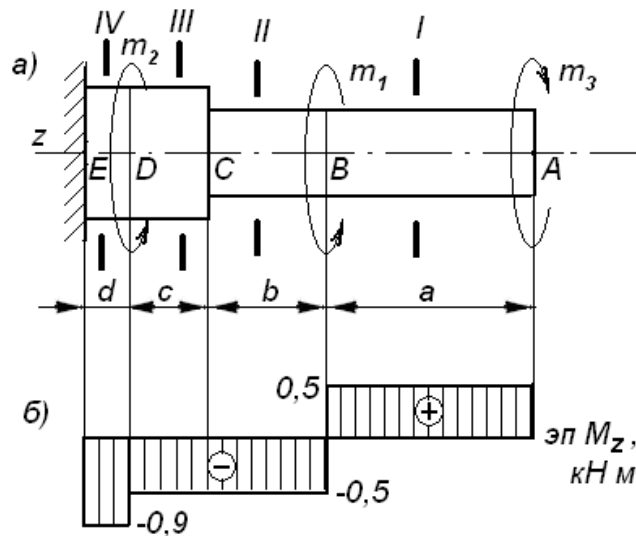


Рис.1. Распределение крутящих моментов по длине вала

Определяем крутящие моменты в сечениях вала на каждом участке, учитывая правило знаков: если момент внешней пары направлен по оси z , то $M_z > 0$, если против оси z , то $M_z < 0$.

$$M_{zI} = m_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{zII} = m_3 - m_1 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{zIII} = m_3 - m_1 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{zIV} = m_3 - m_1 - m_2 = 0,5 - 1 - 0,4 = -0,9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Распределение крутящих моментов вдоль вала представлено на рис. 1, б.

2. Определение поперечных размеров вала из условия прочности.

Крутящий момент вызывает внутренние касательные напряжения τ , которые распределяются по линейному закону. Величина касательных напряжений в любой точке поперечного сечения может быть определена по формуле:

$$\tau = \frac{M_z}{I_\rho} \rho, \quad \tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho},$$

где I_ρ – полярный момент инерции сечения; W_ρ – полярный момент сопротивления; ρ – расстояние от оси вала до точки, в которой определяется напряжение. Для круглого сечения полярные момент инерции и момент сопротивления равны

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16},$$

где d – диаметр круглого сечения.

Требуемые полярные моменты сопротивления вала определяем из условия прочности:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau], \quad W_\rho = \frac{M_z}{[\tau]}.$$

Для меньшего и большего сечений вала моменты сопротивления равны

$$W_{\rho I} = W_{\rho II} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 8,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 8,33 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho III} = W_{\rho IV} = \frac{0,9 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 15 \text{ см}^3.$$

Требуемые поперечные размеры вала найдем по формуле $d = \sqrt[3]{\frac{16W_{\rho}}{\pi}}$:

$$d_I = d_{II} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8,33 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,5 \text{ см},$$

$$d_{III} = d_{IV} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 15 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 4,25 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,25 \text{ см}.$$

3. Проверка жесткости вала.

Расчет заключается в определении абсолютного или относительного угла закручивания вала под действием приложенных моментов пар

$$\varphi = \frac{M_z l}{I_{\rho} G}, \quad \theta = \frac{M_z}{I_{\rho} G}.$$

Определяем полярные моменты инерции поперечных сечений вала:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4$$

$$I_{\rho I} = I_{\rho II} \approx 0,1 \cdot 3,5^4 = 15,0 \cdot \text{см}^4,$$

$$I_{\rho III} = I_{\rho IV} \approx 0,1 \cdot 4,25^4 = 32,6 \cdot \text{см}^4.$$

Определяем наибольший относительный угол закручивания:

$$\theta_I = \theta_{II} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = 0,042 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 2,38 \text{ град/м},$$

$$\theta_{III} = \theta_{IV} = \frac{0,9 \cdot 10^3}{32,6 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = 0,035 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 1,98 \text{ град/м}.$$

Наибольший относительный угол закручивания составляет

$$\theta_{\max} = 2,38 > 1,5 \frac{\text{град}}{\text{м}} = [\theta].$$

Жесткость вала недостаточна.

Пример 2

Вал, закрепленный жестко своим левым концом, нагружен парами $m_1 = 0,3 \text{ кН м}$, $m_2 = 0,4 \text{ кН м}$ и $m_3 = 0,2 \text{ кН м}$ (рис. 2, а). Известны диаметры вала ($d_1 = 4 \text{ см}$, $d_2 = 5 \text{ см}$) и длины его участков ($a=0,3 \text{ м}$, $b=0,2 \text{ м}$, $c=0,4 \text{ м}$). Материал – сталь, для которой $[\tau] = 55 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Требуется: построить эпюры крутящих моментов и касательных напряжений; проверить прочность вала, определить углы поворота сечений вала.

Решение

1. Построение эпюры крутящих моментов.

Вал разбит на четыре участка. Определяем значения внутренних крутящих моментов на каждом участке вала, начиная с правого незакрепленного конца:

$$M_{zI} = -m_3 = -0,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zII} = -m_3 - m_2 = -0,2 - 0,4 = -0,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zIII} = -m_3 - m_2 = -0,2 - 0,4 = -0,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zIV} = -m_3 - m_2 + m_1 = -0,2 - 0,4 + 0,3 = -0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Используем полученные значения для построения эпюры крутящих моментов (рис. 2, б).

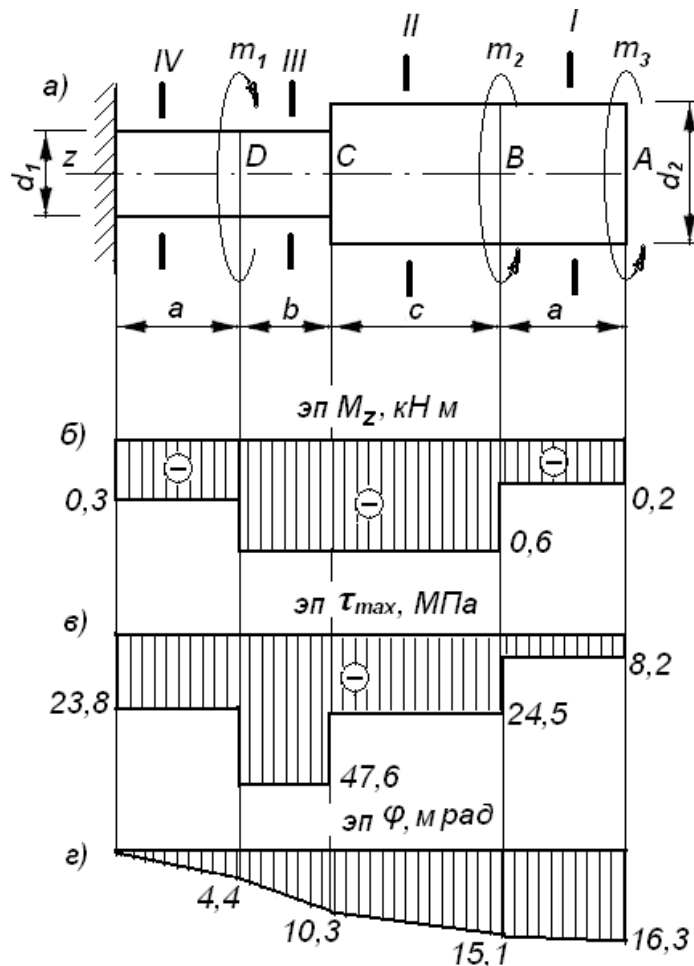


Рис. 2. Распределение внутренних усилий и напряжений по длине вала

2. Построение эпюры касательных напряжений.

Максимальные касательные напряжения, возникающие при действии крутящих моментов, определяем по формуле

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho}$$

Рассчитаем полярные моменты сопротивления для сечений вала:

$$W_{\rho I} = W_{\rho II} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,5 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho III} = W_{\rho IV} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,6 \text{ см}^3.$$

Тогда наибольшие касательные напряжения в сечениях вала составят:

$$\tau_{max I} = \frac{-0,2 \cdot 10^3}{24,5 \cdot 10^{-6}} = -8,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max II} = \frac{-0,6 \cdot 10^3}{24,5 \cdot 10^{-6}} = -24,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max III} = \frac{-0,6 \cdot 10^3}{12,6 \cdot 10^{-6}} = -47,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max IV} = \frac{-0,3 \cdot 10^3}{12,6 \cdot 10^{-6}} = -23,8 \text{ МПа}.$$

Распределение касательных напряжений по длине вала дано на рис. 2, в.

3. Проверка прочности вала по касательным напряжениям.

Наиболее напряженным является третий участок вала, на котором $\tau_{maxIII} = -47,6$ МПа. Однако и на этом участке прочность вала обеспечена,

так как $\tau_{max} = 47,6$ МПа $< [\tau] = 55$ МПа.

4. Определение угловых перемещений характерных сечений вала.

Углы поворота характерных сечений вала определяем по известной формуле

$$\varphi = \frac{M_z l}{I_\rho G}$$

Здесь M_z – крутящий момент на данном участке; I_ρ – полярный момент инерции сечения; l – длина участка; G – модуль сдвига материала.

Полярные моменты инерции сечений вала соответственно равны:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4$$
$$I_{\rho I} = I_{\rho II} \approx 0,1 \cdot 5^4 = 62,5 \cdot \text{см}^4,$$
$$I_{\rho III} = I_{\rho IV} \approx 0,1 \cdot 4^4 = 25,6 \cdot \text{см}^4.$$

Вычисляем углы закручивания вала на каждом из участков:

$$\varphi_I = \frac{-0,2 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{62,5 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$
$$\varphi_{II} = \frac{-0,6 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{62,5 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = -4,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$
$$\varphi_{III} = \frac{-0,6 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{25,6 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = -5,9 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$
$$\varphi_{IV} = \frac{-0,3 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{25,6 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{10}} = -4,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Если принять левое закрепленное сечение вала за начало отсчета угловых перемещений, то

$$\varphi_A = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} + \varphi_I = -16,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$
$$\varphi_B = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} = -15,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$
$$\varphi_C = \varphi_{IV} + \varphi_{III} = -10,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$
$$\varphi_D = \varphi_{IV} = -4,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Тема: расчет балки на поперечный изгиб

Задача. Балка, расположенная на двух шарнирных опорах, работает на поперечный изгиб (рис. 1, а). Данные к расчетной схеме: $F = 20$ кН; $q = 20$ кН/м; $m = 8$ кН·м; $a = 0,8$ м. Допустимые напряжения $[\sigma] = 150$ МПа, $[\tau] = 80$ МПа.

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать прямоугольное и двутавровое сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, проверить подобранные сечения на прочность по касательным напряжениям и дать заключение об их экономичности.

Решение

1. Определение реакций опор.

Заменяем наложенные на балку связи реакциями связей, при этом учтем, что вертикальные внешние силы могут вызвать вертикальные реакции R_A и R_B . Определим опорные реакции, используя уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad m - R_A \cdot 3a + F \cdot 2a - qa \cdot 0,5a = 0; \quad R_A = 14 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0; \quad m + R_B \cdot 3a - F \cdot a - qa \cdot 3,5a = 0; \quad R_B = 22 \text{ кН}. \end{aligned}$$

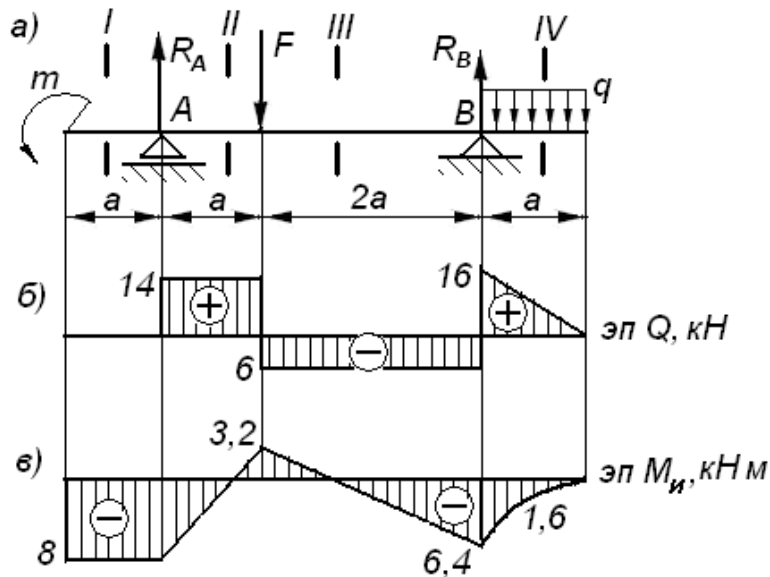


Рис. 1. Внутренние усилия в балке при простом поперечном изгибе.

2. Построение эпюры поперечных сил.

Разделим балку на четыре участка. При построении эпюры поперечных сил используем правило знаков: внешняя сила считается положительной, если, находясь слева от сечения, она направлена вверх. На первом участке $Q_I = 0$, так как алгебраическая сумма сил пары всегда равна нулю.

На втором участке $Q_{II} = R_A = 14$ кН.

На третьем участке $Q_{III} = R_A - F = 14 - 20 = -6$ кН.

На четвертом участке $Q_{IV} = R_A - F + R_B - qz = 16 - 20z$, в пределах четвертого участка координата z изменяется от 0 до a :

при $z = 0$ $Q_{IV} = 16$ кН;

при $z = a$ $Q_{IV} = 16 - 20 \cdot 0,8 = 0$ кН.

Строим эпюру поперечных сил (рис. 1,б), при этом положительные значения поперечных сил откладываем вверх, а отрицательные вниз.

3. Построение эпюры изгибающих моментов.

При вычислении изгибающих моментов используем правило знаков: если внешняя нагрузка, создавая поперечный изгиб, стремится растянуть нижние волокна балки, то величина момента положительна, если верхние волокна – отрицательна. На первом участке действует постоянный изгибающий момент $M_I = -m = -8$ кН м.

На втором участке $M_{II} = -m + R_A z = -8 + 14z$, где $0 \leq z \leq a$:

при $z = 0$ $M_{II} = -8$ кН м;

при $z = a$ $M_{II} = -8 + 14 \cdot 0,8 = 3,2$ кН м.

На третьем участке $M_{III} = -m + R_A(a + z) - Fz = 3,2 - 6z$, где $0 \leq z \leq 2a$:
 при $z = 0$ $M_{III} = 3,2$ кН м;

при $z = 2a$ $M_{III} = 3,2 - 6 \cdot 2 \cdot 0,8 = -6,4$ кН м.

На четвертом участке, где $0 \leq z \leq a$,

$$M_{IV} = -m + R_A(3a + z) - F(2a + z) + R_B z - \frac{qz^2}{2} = -6,4 + 16z - 10z^2:$$

при $z = 0$ $M_{IV} = -6,4$ кН м;

при $z = a$ $M_{IV} = -6,4 + 16 \cdot 0,8 - 10 \cdot 0,64 = 0$ кН м;

при $z = 0,5a$ $M_{IV} = -6,4 + 16 \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,16 = -1,6$ кН м.

Эпюра изгибающих моментов в балке представлена на рис. 1, в.

4. *Подбор прямоугольного сечения балки.*

Наибольший изгибающий момент соответствует первому участку балки $M_{max} = M_I = -8$ кН м, следовательно, максимальные нормальные напряжения, возникающие в крайних волокнах балки на этом участке, не должны превышать допустимых значений

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Требуемый осевой момент сопротивления сечения балки равен

$$W_{тр} = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 53,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 53,3 \text{ см}^3.$$

Пусть балка имеет прямоугольное сечение $\left(\frac{h}{b} = 2\right)$, тогда момент сопротивления

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{4b^3}{6}, \text{ ширина сечения } b = \sqrt[3]{\frac{6W}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 53,3 \cdot 10^{-6}}{4}} = 4,32 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 4,4 \text{ см},$$

высота сечения $h = 8,8$ см, площадь сечения $A = b \cdot h = 38,72 \text{ см}^2$, осевой момент сопротивления $W_x = 56,79 \text{ см}^3$, осевой момент инерции $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = 250,0 \text{ см}^4$, тогда

$$\sigma_I = \frac{8 \cdot 10^3}{56,79 \cdot 10^6} = 141 \text{ МПа} \leq 150 \text{ МПа} = [\sigma].$$

Выполним проверку прочности сечения по касательным напряжениям, для этого используем формулу Журавского

$$\tau = \frac{Q_{max} S^{отс}}{I_x b} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 42,6 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-8} \cdot 4,4 \cdot 10^{-2}} = 6,2 \cdot 10^6 \ll 80 \text{ МПа} = [\tau],$$

где $S^{отс} = \frac{b \cdot h^2}{8} = 42,6 \text{ см}^3$ - статический момент отсеченной части сечения.

5. *Подбор двутаврового сечения балки.*

По таблицам сортамента прокатных профилей подбираем такое сечение, которое бы удовлетворяло условию прочности по нормальным напряжениям. Принимаем двутавр №12, для которого $h = 12$ см, $b = 0,48$ см, $A = 14,7 \text{ см}^2$, $W_x = 58,4 \text{ см}^3$, $I_x = 350 \text{ см}^4$, $S^{отс} = 23,7 \text{ см}^3$. Принятое сечение обладает достаточной прочностью по нормальным и касательным напряжениям

$$\tau = \frac{Q_{max} S^{отс}}{I_x b} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 23,7 \cdot 10^{-6}}{350 \cdot 10^{-8} \cdot 0,48 \cdot 10^{-2}} = 22,6 \cdot 10^6 < 80 \text{ МПа} = [\tau].$$

Двутавровое сечение по расходу материала является более экономичным, так как его площадь поперечного сечения в $\frac{38,72}{14,7} = 2,6$ раза меньше, чем прямоугольного.

Расчет вала на изгиб с кручением

На стальной вал через ведущий шкив 1 и шестерни 2 и 3 передаются крутящие моменты M_1 , M_2 и M_3 . Диаметр шкива $D_1 = 500$ мм, силы натяжения ремня $T = 2t$. Диаметры шестерней $D_2 = D_3 = 250$ мм, отношение крутящих моментов в шестернях $M_2/M_3 = 2/1$, длина участков вала $a = 200$ мм.

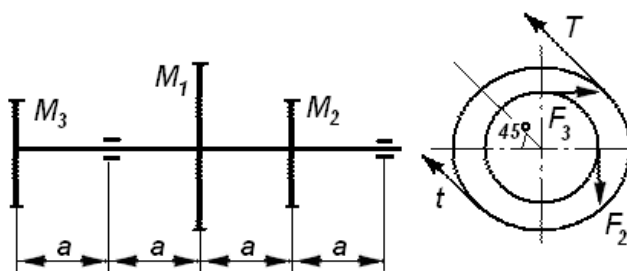


Рис. 1. Исходные данные к задаче

Построить эпюры крутящих моментов и эпюры изгибающих моментов, определить опасное сечение вала по совокупности всех нагрузок. Подобрать сечение вала по третьей теории прочности, если на вал передается крутящий момент $M_1 = 1,5$ кН м, допустимые напряжения $[\sigma] = 120$ МПа.

Решение

1. Определение нагрузок на вал.

Для определения крутящих моментов, передаваемых через шестерни M_2 и M_3 , составим уравнение равновесия. Вал в рабочем состоянии вращается с постоянной угловой скоростью, следовательно, $M_1 - M_2 - M_3 = 0$;

$$M_1 = 2 M_3 + M_3 = 3M_3; M_3 = 0,5 \text{ кН м}; M_2 = 1 \text{ кН м.}$$

Силы натяжения ремня T и t , а также силы, передаваемые шестернями F_2 и F_3 , определим с помощью вызываемых ими крутящих моментов:

$$(T - t) D_1 / 2 = \frac{T D_1}{4} = M_1, \quad T = \frac{4 M_1}{D_1} = \frac{4 \cdot 1500}{0,5} = 12 \text{ кН}, \quad t = 6 \text{ кН};$$

$$F_2 D_2 / 2 = M_2, \quad F_2 = \frac{2 M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 1000}{0,25} = 8 \text{ кН};$$

$$F_3 D_3 / 2 = M_3, \quad F_3 = \frac{2 M_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 500}{0,25} = 4 \text{ кН}.$$

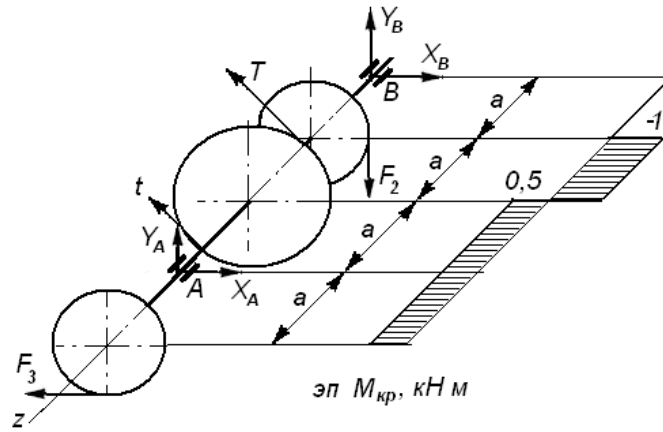


Рис. 2. Расчетная схема вала и эпюра крутящих моментов

2. Определение реакций связей.

Заменим наложенные на балку связи реакциями связей, при этом учтем, что внешние силы действуют перпендикулярно оси вала и могут вызвать аналогичные реакции X_A, Y_A и X_B, Y_B . Определим опорные реакции, используя уравнения равновесия для осевых моментов:

$$\sum m_{x_B} = 0; \quad -Y_A \cdot 3a - t \cdot \sin 45^\circ \cdot 2a - T \cdot \sin 45^\circ \cdot 2a + F_2 \cdot a = 0;$$

$$Y_A = \frac{1}{3}(F_2 - 2\sin 45^\circ(t + T)) = \frac{1}{3}(8 - 1,414(6 + 12)) = -5,82 \text{ кН};$$

$$\sum m_{x_A} = 0; \quad Y_B \cdot 3a + t \cdot \sin 45^\circ \cdot a + T \cdot \sin 45^\circ \cdot a - F_2 \cdot 2a = 0;$$

$$Y_B = \frac{1}{3}(2F_2 - \sin 45^\circ(t + T)) = \frac{1}{3}(2 \cdot 8 - 0,707(6 + 12)) = 1,09 \text{ кН};$$

$$\sum m_{y_B} = 0; \quad X_A \cdot 3a - t \cdot \cos 45^\circ \cdot 2a - T \cdot \cos 45^\circ \cdot 2a - F_3 \cdot 4a = 0;$$

$$X_A = \frac{1}{3}(4F_3 + 2\cos 45^\circ(t + T)) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 1,414(6 + 12)) = 13,82 \text{ кН};$$

$$\sum m_{y_A} = 0; \quad -X_B \cdot 3a + t \cdot \cos 45^\circ \cdot a + T \cdot \cos 45^\circ \cdot a - F_3 \cdot a = 0;$$

$$X_B = \frac{1}{3}(\cos 45^\circ(t + T) - F_3) = \frac{1}{3}(0,707(6 + 12) - 4) = 2,91 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности статического расчета реакций подшипников воспользуемся суммой проекций всех сил на координатные оси:

$$\sum F_x = 0; \quad X_A + X_B - F_3 - (T + t)\cos 45^\circ = 0;$$

$$13,82 + 2,91 - 4 - (12 + 6)0,707 \approx 0;$$

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A + Y_B - F_2 + (T + t)\sin 45^\circ = 0;$$

$$-5,82 + 1,09 - 8 + (12 + 6)0,707 \approx 0.$$

3. Построение эпюр крутящих моментов и изгибающих моментов.

Изгиб вала относительно оси y создается системой приложенных к нему горизонтальных сил X_A, X_B, F_3 , а также проекций $T_x = T\cos 45^\circ$, $t_x = t\cos 45^\circ$

На первом участке $M_I = -F_3 z = -4z$, где $0 \leq z \leq a$:

при $z = 0$; $M_I = 0$ кН м;

при $z = a$; $M_I = -4 \cdot a = -4 \cdot 0,2 = -0,8$ кН м.

На втором участке $M_{II} = -F_3(a+z) + X_A z$, где $0 \leq z \leq a$:

при $z = 0$; $M_{II} = -0,8$ кН м;

при $z = a$; $M_{II} = -4 \cdot 0,4 + 13,82 \cdot 0,2 = 1,04$ кН м.

На третьем участке $M_{III} = -F_3(2a+z) + X_A(a+z) - (T_x + t_x)z$, где $0 \leq z \leq 2a$:

при $z = 0$; $M_{III} = 1,04$ кН м;

при $z = 2a$; $M_{III} = -4 \cdot 0,8 + 13,82 \cdot 0,6 - (12 + 6) \cdot 0,707 \cdot 0,4 = 0$ кН м.

Изгиб вала относительно оси x создается системой вертикальных сил Y_A, Y_B, F_2 , а также проекций $T_y = T \sin 45^\circ, t_y = t \sin 45^\circ$

На первом участке $M_I = Y_A z = -5,82z$, где $0 \leq z \leq a$:

при $z = 0$; $M_I = 0$ кН м;

при $z = a$; $M_I = -5,82 \cdot a = -5,82 \cdot 0,2 = -1,164$ кН м.

На втором участке $M_{II} = Y_A(a+z) + (T_y + t_y)z$, где $0 \leq z \leq a$:

при $z = 0$; $M_{II} = -1,164$ кН м;

при $z = a$; $M_{II} = -5,82 \cdot 0,4 + (12 + 6) \cdot 0,707 \cdot 0,2 = 0,217$ кН м.

На третьем участке $M_{III} = Y_A(2a+z) + (T_y + t_y)(a+z) - F_2 z$, где $0 \leq z \leq a$:

при $z = 0$; $M_{III} = 0,217$ кН м;

при $z = a$; $M_{III} = -5,82 \cdot 0,6 + (12 + 6) \cdot 0,707 \cdot 0,4 - 8 \cdot 0,2 = 0$ кН м.

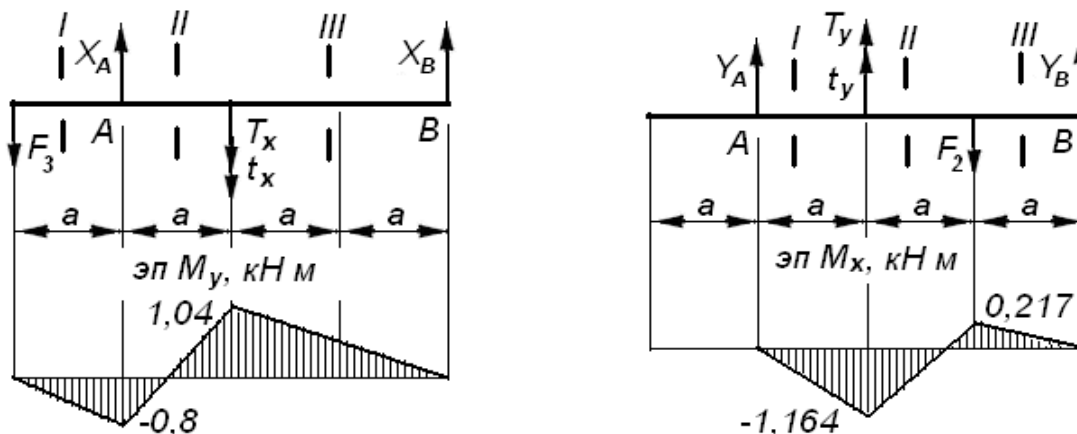


Рис. 3. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов

Из эпюр видно, что Опасным является сечение, в котором на вал насажен шкив: $M_{кр} = -1$ кН м; $M_{ix} = -1,164$ кН м; $M_{iy} = 1,04$ кН м.

4. Подбор поперечного сечения вала.

При сочетании изгиба и кручения опасными будут точки сечения вала, наиболее удаленные от нейтральной оси. Расчет круглых валов ведут, как на изгиб, но не по изгибающему, а по эквивалентному моменту, определенному в соответствии с заданной теории прочности. Для подбора поперечного сечения вала используем энергетическую теорию прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{и}}}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{2W_{\text{и}}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W_{\text{и}}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma].$$

Эквивалентный момент в опасном сечении вала

$$M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{M_{\text{иx}}^2 + M_{\text{иy}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} = 1,79 \text{ кН м.}$$

Требуемый момент сопротивления сечения вала при изгибе

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3, \quad d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}}{0,1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1790}{0,1 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 5,31 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 53,1 \text{ мм.}$$

Принимаем по ГОСТ 6636-69 (СТ СЭВ 514-77) диаметр вала $d = 55 \text{ мм} > 53,1 \text{ мм}$. В этом случае прочность будет обеспечена.

Расчет стержней на продольный изгиб (устойчивость)

Подобрать поперечное сечение сжатого стержня заданного прокатного профиля (двутавр), закрепленного в соответствии расчетной схемой стержня. Длина стержня $l = 2,5 \text{ м}$, сжимающее усилие $F = 160 \text{ кН}$. Допускаемое напряжение материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

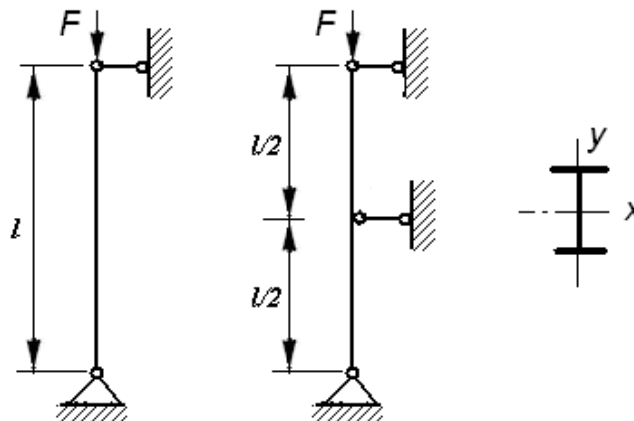


Рис. 1. Расчетная схема стержня

Решение

Расчеты сжатых стержней на устойчивость можно свести к расчету на простое сжатие, при этом для обеспечения устойчивости стержня в расчетную формулу вводят φ - коэффициент продольного изгиба

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma_c].$$

Коэффициент продольного изгиба φ зависит от гибкости стержня λ , материала стержня, и для стальных стержней определяется по таблице

λ	0	10	20	30	40	50	60
φ	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86

λ	70	80	90	100	110	120	130
φ	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,40
λ	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Потеря устойчивости возможна относительно двух осей Ox и Oy . Подбор сечения стержня ведем по наибольшей гибкости стержня

$$\lambda_x = \mu_x l / i_x; \quad \lambda_y = \mu_y l / i_y.$$

Поскольку в уравнении устойчивости две неизвестные величины – площадь поперечного сечения A и коэффициент φ , задача подбора сечения стержня решается методом последовательного приближения.

1. Пусть коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0,5$, тогда требуемая площадь сечения стержня

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_c]} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 20 \text{ см}^2.$$

По сортаменту стальных прокатных профилей принимаем двутавр №16:
 $A = 20,2 \text{ см}^2$, $i_x = 6,57 \text{ см}$, $i_y = 1,7 \text{ см}$. Гибкость стержня, закрепленного шарнирно ($\mu_x = 1$), равна

$$\lambda_x = \mu_x l / i_x = \frac{1 \cdot 2,5}{6,57 \cdot 10^{-2}} = 38; \quad \lambda_y = \mu_y l / i_y = \frac{0,5 \cdot 2,5}{1,7 \cdot 10^{-2}} = 73,5.$$

Наибольшая гибкость $\lambda_{max} = \lambda_y = 73,5$, коэффициент продольного изгиба определим интерполяцией $\varphi_y = 0,81 + \frac{0,75 - 0,81}{10} 3,5 = 0,789 \approx 0,79$.

2. Выполним второй расчет, используя коэффициент продольного изгиба $\varphi_y = 0,79$, тогда требуемая площадь сечения стержня

$$A = \frac{F}{\varphi_y \cdot [\sigma_c]} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,79 \cdot 160 \cdot 10^6} = 12,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 12,7 \text{ см}^2.$$

По сортаменту стальных прокатных профилей принимаем двутавр №12:
 $A = 14,7 \text{ см}^2$, $i_x = 4,88 \text{ см}$, $i_y = 1,38 \text{ см}$. Гибкость стержня

$$\lambda_y = \mu_y l / i_y = \frac{0,5 \cdot 2,5}{1,38 \cdot 10^{-2}} = 90,6.$$

Уточняем коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_y = 0,69 + \frac{0,60 - 0,69}{10} 0,6 = 0,685 \approx 0,69$$

3. Тогда требуемая площадь сечения стержня

$$A = \frac{F}{\varphi_y \cdot [\sigma_c]} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,69 \cdot 160 \cdot 10^6} = 14,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 14,5 \text{ см}^2.$$

Окончательно принимаем двутавр №12, для которого $A = 14,7 \text{ см}^2$, $i_x = 4,88 \text{ см}$, $i_y = 1,38 \text{ см}$, $\lambda_x = \frac{1 \cdot 2,5}{4,88 \cdot 10^{-2}} = 51,2$, $\lambda_y = 90,6$.

4. Проверка устойчивости подобранного сечения относительно осей Ox и Oy , для которых $\varphi_y = 0,69$, $\varphi_x = 0,89 + \frac{0,86-0,89}{10} 1,2 = 0,88$

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi_y \cdot A} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,69 \cdot 14,7 \cdot 10^{-4}} = 157,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 157 \text{ МПа} \leq 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x = \frac{F}{\varphi_x \cdot A} = \frac{160 \cdot 10^3}{0,88 \cdot 14,7 \cdot 10^{-4}} = 123,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 123,7 \text{ МПа} \leq 160 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется. Сечение подобрано.

Критическая сила в сжатом стержне определяется в зависимости от гибкости стержня. Для стержней из низкоуглеродистой стали при гибкости $\lambda = 40 \dots 100$ критическую силу определяем по формуле Ясинского ($a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$)

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = (a - b\lambda)A = (310 - 1,14 \cdot 90,6) \cdot 10^6 \cdot 14,7 \cdot 10^{-4} = 303,9 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$S_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{303,9}{160} = 1,9.$$

Геометрические характеристики плоских сечений

Для составного поперечного сечения стержня, состоящего из равнобокого уголка № 7 с толщиной стенки 8 мм, швеллера № 22 и полосы 180x20 мм (рис. 3.1), требуется найти положение центра тяжести сечения, направление главных центральных осей инерции u и v , а также вычислить главные центральные моменты инерции I_{max} , I_{min} .

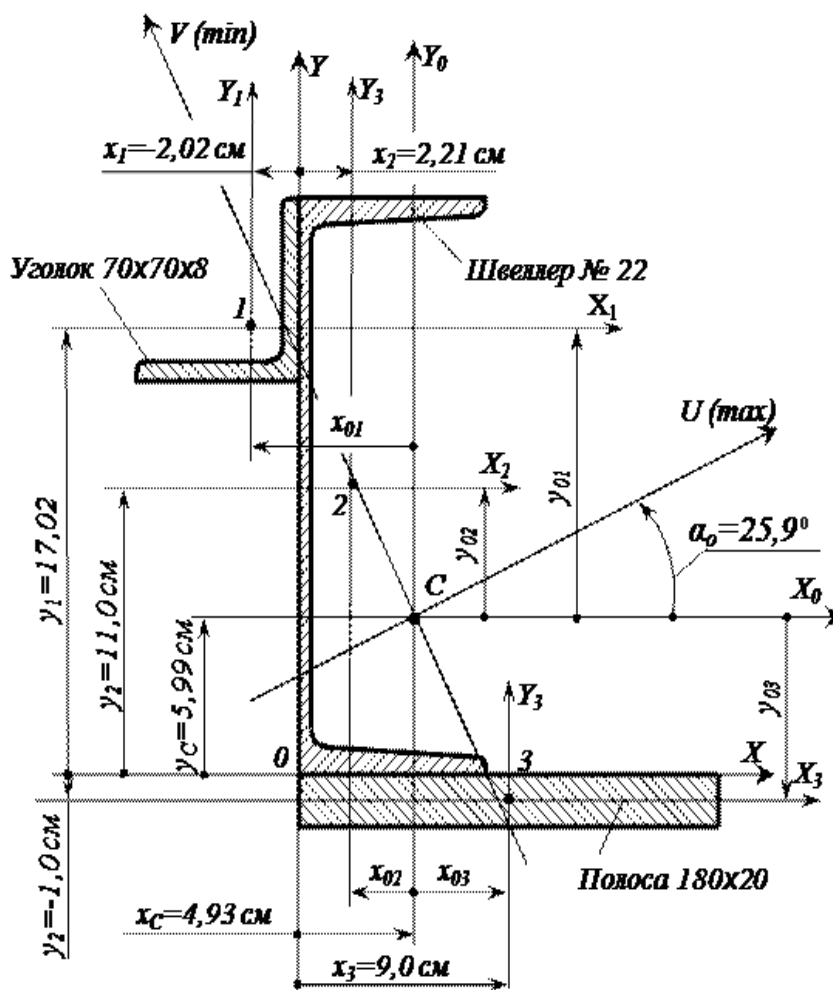


Рис. 3.1

Размеры и геометрические характеристики уголка и швеллера устанавливаем по сортаментам прокатных профилей. Вычерчиваем сечение в масштабе (см. рис. 3.1). Предварительно выбираем оси сравнения x и y , располагая их по контуру швеллера. Именно в этих осях мы и будем определять положение центра тяжести всего сечения. Для каждого элемента сечения (уголка, швеллера и полосы) проводим собственные центральные оси X_i и Y_i (здесь $i=1, 2, 3$) параллельные выбранным осям сравнения x и y .

Координаты центра тяжести поперечного сечения (точка C), состоящего из трех элементов (уголка – 1, швеллера – 2 и полосы – 3), вычисляются по формулам:

$$x_c = (S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}) / (A_1 + A_2 + A_3) = (A_1 x_{1c} + A_2 x_{2c} + A_3 x_{3c}) / (A_1 + A_2 + A_3);$$

$$y_c = (S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}) / (A_1 + A_2 + A_3) = (A_1 y_{1c} + A_2 y_{2c} + A_3 y_{3c}) / (A_1 + A_2 + A_3);$$

где S_{x_i} и S_{y_i} – статические моменты соответствующего элемента относительно осей сравнения; A_i – площадь элемента; $x_{i,c}$ и $y_{i,c}$ – координаты центра тяжести элемента в осях сравнения. Вычисления производим в табличной форме (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Определение координат центра тяжести поперечного сечения

Номер элемента	Элемент	Площадь элемента, см ²	Координаты центра тяжести элемента, см		Статические моменты элемента, см ³	
			x_i , см	y_i , см	S_{y_i}	S_{x_i}
i		A_i			S_{y_i}	S_{x_i}
1	Уголок	10,67	-2,02	17,02	-21,55	181,60
2	Швеллер	26,70	2,21	11,00	59,01	293,70
3	Полоса	36,00	9,00	-1,00	324,00	-36,00
	Все сечение	73,37			$S_y=361,46$	$S_x=439,30$

Координаты центра тяжести поперечного сечения (точка C) в осях сравнения:

$$x_c = S_y / A = 361,46 / 73,37 = 4,93 \text{ см}; \quad y_c = S_x / A = 439,30 / 73,37 = 5,99 \text{ см}.$$

Осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей определяются по формулам:

$$I_{x0} = (I_{x1} + A_1 y_{01}^2) + (I_{x2} + A_2 y_{02}^2) + (I_{x3} + A_3 y_{03}^2);$$

$$I_{y0} = (I_{y1} + A_1 x_{01}^2) + (I_{y2} + A_2 x_{02}^2) + (I_{y3} + A_3 x_{03}^2);$$

$$I_{x0y0} = (I_{x1y1} + A_1 x_{01} y_{01}) + (I_{x2y2} + A_2 x_{02} y_{02}) + (I_{x3y3} + A_3 x_{03} y_{03});$$

Значения осевых моментов инерции уголка (I_{x1}, I_{y1}) и швеллера (I_{x2}, I_{y2}) относительно собственных центральных осей определяем по сортаменту. Для полосы осевые моменты инерции соответственно равны:

$$I_{x3} = (18 \cdot 2^3) / 12 = 12 \text{ см}^4, \quad I_{y3} = (2 \cdot 18^3) / 12 = 972 \text{ см}^4.$$

Центробежные моменты инерции швеллера I_{x2y2} и полосы I_{x3y3} равны нулю, поскольку их собственные центральные оси являются осями симметрии.

Центробежный момент инерции уголка I_{x1y1} относительно собственных центральных осей x_1 и y_1 определяются по сортаменту или вычисляется по формуле:

$$I_{x1y1} = (I_{\max} - I_{\min}) / 2.$$

где I_{max} и I_{min} – максимальный и минимальный главные моменты инерции уголка соответственно. По сортаменту $I_{max}=76,35 \text{ см}^4$, а $I_{min}=19,97 \text{ см}^4$.

Центробежный момент инерции уголка не равен нулю, поскольку оси X_1 и Y_1 не являются для него главными центральными осями инерции (главные центральные оси для равнобокого уголка повернуты на угол 45°).

Знак центробежного момента инерции уголка (как, впрочем, и для любой другой фигуры) зависит от направления координатных осей. Он легко определяется следующим образом. Согласно определению, центробежный момент инерции фигуры равен интегралу, в котором элементарная площадка dA умножается на расстояний от этой площадки до координатных осей. Очевидно, что для элементарных площадок, расположенных в первом и третьем квадрантах, расстояния от элементарных площадок до координатных осей имеют одинаковый знак. Поэтому при интегрировании по площади, расположенной в этих квадрантах, мы получим знак «плюс». В четвертом квадранте расстояния от площадок до координатных осей имеют разные знаки, что при интегрировании даст знак «минус». Очевидно, что, суммируя полученные результаты, мы, в итоге, получим положительное значение центробежного момента инерции уголка. Следовательно,

$$I_{x_1y_1} = (76,35 - 19,97) / 2 = 28,19 \text{ см}^4.$$

Координаты центров тяжести отдельных элементов сечения в центральных осях определяем по чертежу:

для уголка

$$x_{01} = -2,02 - 4,93 = -6,95 \text{ см}; \quad y_{01} = 17,02 - 5,95 = 11,03 \text{ см};$$

для швеллера

$$x_{02} = 2,21 - 4,93 = -2,72 \text{ см}; \quad y_{02} = 11,00 - 5,95 = 5,01 \text{ см};$$

для полосы

$$x_{03} = 9,00 - 4,93 = 4,07 \text{ см}; \quad y_{03} = -1,00 - 5,95 = -6,99 \text{ см}.$$

Дальнейшие вычисления моментов инерции поперечного сечения относительно центральных осей X_0 и Y_0 производим в табличной форме (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Определение моментов инерции сечения относительно центральных осей X_0 и Y_0

Номер элемента	Наименование элемента	Площадь элемента, см^2	Моменты инерции относительно собственных центральных осей, см^4			Координаты центров тяжести в центральных осях, см	
			I_{x_i}	I_{y_i}	$I_{x_i y_i}$	x_{0i}	y_{0i}
i		A_i					
1	Уголок	10,67	48,16	48,16	28,19	-6,95	11,03
2	Швеллер	26,70	2110,00	151,00	0	-2,72	5,01
3	Полоса	36,00	12,00	972,00	0	4,07	-6,99
S	Все сечение	73,37					

Продолжение табл. 3.2

Наименование элемента	"Переносные" моменты инерции, см^4			Моменты инерции относительно центральных осей, см^4		
	$A_i x_{0i}^2$	$A_i y_{0i}^2$	$A_i x_{0i} y_{0i}$	$I_{x_i} + A_i y_{0i}^2$	$I_{y_i} + A_i x_{0i}^2$	$I_{x_i y_i} + A_i x_{0i} y_{0i}$
Уголок	515,39	1298,12	-817,95	1346,28	563,55	-789,76
Швеллер	197,54	670,17	-363,85	2780,17	348,54	-363,85
Полоса	596,34	1758,96	-1024,17	1770,96	1568,34	-1024,17

Все сечение				5897,41	2480,43	-2177,78
-------------	--	--	--	---------	---------	----------

После округления вычисленных значений моментов инерции получим:

$$I_{x_0} = 5900 \text{ см}^4; I_{y_0} = 2480 \text{ см}^4; I_{x_0y_0} = -2180 \text{ см}^4.$$

Угол наклона главных центральных осей u и v к центральным осям X_0 и Y_0 соответственно определяем из следующей формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -2 I_{x_0y_0} / (I_{x_0} - I_{y_0}) = 2 * 2180 / (5900 - 2480) = 1,27 \text{ рад}.$$

Отсюда находим, что $2 \alpha_0 = 51,8^\circ$; $\alpha_0 = 25,9^\circ$.

Откладываем положительное значение угла против хода часовой стрелки и проводим главные центральные оси u и v (см. рис. 3.1).

Значения главных центральных моментов инерции всей фигуры определяются по формуле

$$I_{\max} = (I_{x_0} + I_{y_0}) / 2 + 0,5 * [(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4 * I_{x_0y_0}^2]^{1/2};$$

$$I_{\min} = (I_{x_0} + I_{y_0}) / 2 - 0,5 * [(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4 * I_{x_0y_0}^2]^{1/2}.$$

Из формул следует:

$$I_{\max} = (5900 + 2480) / 2 + 0,5 * [(5900 - 2480)^2 + 4 * (-2180)^2]^{1/2} = 6960 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = (5900 + 2480) / 2 - 0,5 * [(5900 - 2480)^2 + 4 * (-2180)^2]^{1/2} = 1420 \text{ см}^4;$$

Контролем правильности последних вычислений может служить следующее условие:

$$I_{x_0} + I_{y_0} = I_{\max} + I_{\min}; \quad 5900 + 2480 = 6960 + 1420 = 8380 \text{ см}^4.$$

Проверка верна.