МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Дифференциальные уравнения

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе лекционных занятий необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Тема лекции	Рассматриваемые вопросы
1	Дифференциальные уравнения 1-го порядка	Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделенными и разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа. Метод вариации произвольных постоянных. Уравнение Бернулли. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.
2	Дифференциальные уравнения 2-го порядка	Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Основные понятия. Задача Коши. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение уравнения в случае действительных и комплексных корней характеристического уравнения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение уравнений с правой частью

		специального вида.
3	Системы дифференциальных уравнений	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование нормальной системы уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Интегрирование системы в случае различных корней характеристического уравнения

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

Задания для практических занятий

Пример 1

Найти общий интеграл уравнения $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$.

Решение.

Данное уравнение есть ДУ с разделенными переменными.

Поэтому $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$.

Тогда $x^2 - y^2 = c$ – общий интеграл ДУ.

Ответ: $x^2 - y^2 = c$ – общий интеграл ДУ

1. В задачах 1.1-1.10 решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним:

1.1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$.

1.2. $y' tgx = y + a$.

1.3. $xy' + y = y^2, y(1) = 0{,}5$.

1.4. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$.

1.5. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$.

1.6. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}$.

1.7. $y' \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

1.8. $y' = 2^{3x+2y}$.

1.9. $\frac{dy}{x} - \sin x dx = 0$.

1.10. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

Решение.

Данное уравнение однородное, т.к. функции $P(x;y) = x^2 - y^2$ и $Q(x;y) = 2xy$ – однородные функции второго порядка.

Положим $y = u \cdot x$. Тогда $dy = x \cdot du + u \cdot dx$. Подставляем в исходное уравнение:

$(x^2-u^2x^2)\cdot dx+2x\cdot ux\cdot x\cdot du+2x\cdot ux\cdot u\cdot dx$,

$x^2(1-u^2+2u^2)\cdot dx+2ux^3\cdot du=0$,

$(1+u^2)\cdot dx+2ux\cdot du=0$,

последнее – уравнение с разделяющимися переменными. Делим переменные

$$\frac{dx}{x}+\frac{2u}{1+u^2}\cdot du=0$$

и интегрируем $\ln|x|+\ln(1+u^2)=c_1$, $\ln(|x|\cdot(1+u^2))=c_1$, $|x|(1+u^2)=e^{c_1}$.

Обозначим $c=e^{c_1}$, $c>0$. Тогда $|x|\cdot(1+u^2)=c$.

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $x^2+y^2=cx$ – общий интеграл исходного уравнения.

Отметим, что данное уравнение можно было сначала привести к виду:

$$x^2-y^2+2xy\cdot\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy},\ y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\cdot\frac{y}{x}}.$$

Затем положить $y=u\cdot x$, тогда $y'=u'x+u$ и т.д.

Ответ: $x^2+y^2=cx$ – общий интеграл исходного уравнения.

2. В задачах 2.1-2.10 решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним:

2.1. $y'=\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\frac{y}{x}$.

2.2. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$.

2.3. $xyy'=y^2+x^2y'$.

2.4. $xdy-ydx=ydy$.

2.5. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0, y(0)=1$.

2.6. $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

2.7. $(y^2-4xy)dx+x^2dy=0$.

2.8. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy$.

2.9. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

2.10. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

Пример 3.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x^2+1.$$

Решение: Данное уравнение является линейным. Решение этого уравнения ищем в виде (7). Поскольку $y=uv,\ y'=u'v+uv'$, то

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}uv=x^2+1,$$
$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x^2+1, \qquad (1)$$
В качестве v выберем одну из функций, обращающихся в нуль коэффициент при u в уравнении (1), т.е. решение уравнения
$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0. \qquad (2)$$
Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными v и x. Разделив переменные, получим
$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{x^2+1},$$
откуда $\ln v=\ln\left(x^2+1\right)+\ln C,\ v=C\left(x^2+1\right).$

Полагая $C=1$ получаем $v=x^2+1$. Уравнение (1) с учетом (2) сводится к уравнению
$$v\frac{du}{dx}=x^2+1, \text{ или } \frac{du}{dx}\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right), \frac{du}{dx}=1,$$
из которого определяется $u=x+C$. По формуле (7) находим общее решение
$$y=uv=(x+C)\left(x^2+1\right).$$
<u>Пример 3.2.</u> Проинтегрировать уравнение $y'+2xy=2x$.

Решение: Полагаем $y=u\cdot v$. Тогда $u'\cdot v+u\cdot v'+2x\cdot uv=2x$, т.е.
$$u'\cdot v+u\cdot(v'+2x\cdot xv)=2x.$$
Сначала решаем уравнение $v'+2x\cdot v=0$:
$$\frac{dv}{v}=-2x\cdot dx,\ \ln|v|=-x^2,\ v=e^{-x^2}.$$
Теперь решаем уравнение $u'\cdot e^{-x^2}+u\cdot 0=2x$, т.е.

$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x^2}$, $du=\int 2x\cdot e^{x^2}\cdot dx$, $u=e^{x^2}+c$.

Итак, общее решение данного уравнения есть $y=u\cdot v=\left(e^{x^2}+c\right)\cdot e^{-x^2}$, т.е. $y=1+c\cdot e^{-x^2}$
.

3. В задачах 3.1-3.10 найти общие решения или общие интегралы линейных дифференциальных уравнений и приводящихся к ним уравнений Бернулли:

3.1. $y'-2y=e^x$.

3.2. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

3.3. $y'+\frac{y}{x+1}+x^2=0$.

3.4. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$.

3.5. $x\frac{dy}{dx}+2y=x^5y^2$.

3.6. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{x^2}$.

3.7. $y' + y = \cos x$.

3.8. $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

3.9. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

3.10. $x - y - 1 + (y - x - 2)y' = 0$.

Пример 4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0.$$

Решение. Для данного уравнения

$$P(x, y) = 2x - 3y,\ Q(x, y) = 2y - 3x;\ P'_y = -3,\ Q'_x = -3.$$

Так как выполнено условие (13), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах; следовательно, равенства (12) принимают вид

$$U'_x = 2x - 3y,\ U'_y = 2y - 3x. \qquad (1)$$

Интегрирую первое из этих уравнений (y при этом считается постоянным), находим

$$U(x, y) = x^2 - 3xy + \varphi(y), \qquad (2)$$

где $\varphi(y)$ – функция подлежащая определению.

Дифференцируя по y функцию $U = U(x, y)$ и принимая во внимание второе из равенств (1), получаем $-3x + \varphi'(y) = 2y - 3x$, откуда

$$\varphi'(y) = 2y,\ \frac{d\varphi}{dy} = 2y,\ d\varphi = 2ydy,\ \varphi(y) = y^2 + C_1.$$

Подставив выражения для $\varphi(y)$ в равенство (2), найдем

$$U(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + C_1.$$

В соответствии с формулой (10) получаем

$x^2 - 3xy + y^2 + C_1 = C_2$, или $x^2 - 3xy + y^2 + C$, где $C = C_2 - C_1$.

Итак, $x^2 - 3xy + y^2 + C$ – общий интеграл данного уравнения.

Пример 4.2. Решить уравнение $(x^2 - y) \cdot dx + (x^2 y^2 + x) \cdot dy = 0$.

Решение: Здесь $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2 + 1$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Однако

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-1 - 2xy^2 - 1}{x^2 y^2 + x} = \frac{-2}{x}$$

зависит только от x.

4. В задачах 4.1-4.10 проверить, что данные уравнения являются дифференциальными уравнениями в полных дифференциалах и найти их общие решения или общие интегралы:

4.1. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$.

4.2. $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})ydy = 0$.

4.3. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$.

4.4. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 10 = 0$.

4.5. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$.

4.6. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$.

4.7. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$.

4.8. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$.

4.9. $(2x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$.

4.10. $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\dfrac{x^3}{y})dy$.

Пример 5.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''=\cos x-\sin x.$$

Решение: Это уравнение вида (2). Преобразуя исходное уравнение, получаем

$$y''=(y')'=\frac{dy'}{dx},\ \frac{dy'}{dx}=\cos x-\sin x,\ dy'=(\cos x-\sin x)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим производную искомой функции $y'=\sin x+\cos x+C_1$. Так как

$$y'=\frac{dy}{dx},\ \frac{dy}{dx}=\sin x+\cos x+C_1,\ dy=(\sin x+\cos x+C_1)dx,$$

то в результате интегрирования полученного уравнения находим общее решение $y'=\sin x-\cos x+C_1x+C_2$.

Пример 5.2. Найти частное решение уравнения $y''-(y')^2+y'(y-1)=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=2,\ y'(0)=2$.

Решение: Уравнение имеет вид $y''=f(y;y')$. Положив $y'=p(y),\ y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$, получаем:

$$p\cdot\frac{dp}{dy}-p^2+p(y-1)=0.$$

Так как $p\neq 0$ (иначе $y'\neq 0$, что противоречит начальному условию $y'=2$, то $\dfrac{dp}{dy}-p+y-1=0$ – получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Проведем решение полученного линейного дифференциального уравнения методом Бернулли. Полагаем $p=u\cdot v$. Имеем $u'v+uv'-uv+y-1=0$, или $u'v+u(v'-v)=1-y$.

Подберем функцию v так, чтобы $v'-v=0$. Тогда $\dfrac{dv}{v}=dy,\ v=e^y$.

Получаем:

$$u'\cdot e^y+u\cdot+=1-y,\ \text{т.е. } du=(1-y)\cdot e^{-y}dy.$$

Интегрируя это равенство, находим, что $u=-(1-y)\cdot e^{-y}+e^{-y}+c_1$. Следовательно, $p=uv=((-1+y)e^{-y}+e^{-y}+c_1)\cdot e^{+y}$, или $p=c_1e^y+y$. Заменяя p на y', получаем: $y'=c_1\cdot e^y+y$. Подставляя $y'=2$ и $y=2$ в это равенство, находим c_1:

$$2=c_1e^2+2,\ c_1=0.$$

Имеем $y' = y$. Отсюда $y = c_2 e^x$. Находим c_2 из начальных условий: $2 = c_2 e^0$, $c_2 = 2$. Таким образом, $y = 2e^x$ – частное решение данного дифференциального уравнения.

5. В задачах 5.1-5.10 найти решения дифференциальных уравнений, допускающих понижения порядка:

5.1. $y'' = x + \sin x$.

5.2. $y^{(IV)} = \cos^2 x, y(0) = \frac{1}{32}, y'(0) = 0, y''(0) = \frac{1}{8}, y'''(0) = 0$.

5.3. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

5.4. $y'' = arctgx$.

5.5. $2xy'' = y'$.

5.6. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

5.7. $y''' = \frac{1}{(y'')^3}$.

5.8. $yy'' = (y')^2$.

5.9. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

5.10. $yy'' = 2x(y')^2, y(2) = 2, y'(2) = 0{,}5$.

<u>Пример 6.1.</u> Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$, найти частное решение, удовлетворяющее условиям $y = 2,\ y' = 2$ при $x = 0$.

Решение: Характеристическое уравнение (9) для данного уравнения принимает вид $k^2 + 2k - 3 = 0$. Так как $k_1 = 1,\ k_2 = -3$, то общее решение в соответствии с (10) определяется формулой

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}, \tag{1}$$

Чтобы найти указанное частное решение, подставим начальные данные $x = 0$, $y = 2,\ y' = 2$ в выражение для y и $y = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x}$: $2 = C_1 + C_2,\quad 2 = C_1 - 3C_2$. Из этой системы находим $C_1 = 2,\ C_2 = 0.$

При этих значениях C_1 и C_2 функция (1) принимает вид $y = 2e^x$. Итак, $y = 2e^x$ – искомое частное решение.

<u>Пример 6.2.</u> Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение.

Имеем: $k^2 - 6k + 25 = 0,\ k_1 = 3 + 4i,\ k_2 = 3 - 4i.$ По формуле:

$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$, получаем общее решение уравнения:

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

Ответ: $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

6. В задачах 6.1-6.10 решить линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

6.1. $y'' - 10y' + 21y = 0$.

6.2. $y'' - 16y' + 64y = 0$.

6.3. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
6.4. $y'' + 3y' - 4y = 0$.
6.5. $y'' - 81y = 0$.
6.6. $y'' + 10y' + 25y = 0$.
6.7. $y'' - 8y' = 0$.
6.8. $y'' + 36y = 0$.
6.9. $y'' + 2y' + 10y = 0$.
6.10. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Пример 7.1. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$.

Решение: Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 4i, k_2 = -2 - 4i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой $y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Переходим к отысканию частного решения исходного уравнения. Так как в данном случае $\varphi(x) = 34e^{-x}$ (т.е. имеет вид (15): $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 34$ и $m = -1$) не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (16) ищем частное решение в виде $y_1 = Ae^{-x}$. Находя производные этой функции $y_1' = -Ae^{-x}$, $y_1'' = Ae^{-x}$ и подставляя выражения для y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение, получаем $Ae^{-x} - 4Ae^{-x} + 20Ae^{-x} = 34e^{-x}$.

Так как y_1 – решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т.е. является тождеством:

$17Ae^{-x} = 34Ae^{-x}$, откуда $17A = 34$, $A = 2$.

Следовательно, частное решение имеет вид $y = 2e^{-x}$. На основании формулы (14) получаем общее решение

$y = 2e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + 2e^{-x}$.

Пример 7.2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x - 4$.

Решение: Найдем общее решение $\hat{y}$ линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеем корень $k_1 = 1$ кратности 2.

Значит, $\hat{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Находим частное решение исходного уравнения. В нем правая часть $x - 4 = (x - 4) \cdot e^{0 \cdot x}$ есть формула вида $P_1(x) \cdot e^{0 \cdot x}$, причем $\alpha = 0$, не является корнем характеристического уравнения $\alpha \neq k_1$. Поэтому, согласно формуле $y^* = x^\gamma \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$, частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_1(x) \cdot e^{0 \cdot x}$, т.е. $y^* = Ax + B$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Тогда $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$. Подставив $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение, получим $-2A + Ax + B = x - 4$, или $Ax + (-2A + B) = x - 4$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A=1 \\ -2A+B=4. \end{cases}$$

Отсюда $A=1$, $B=-2$. Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид $y^*=x-2$. Следовательно, $y=(\hat{y}+y^*)=c_1e^x+c_2xe^x+x-2$ – искомое общее решение уравнения.

7. В задачах 7.1-7.10 решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

7.1. $y''-3y'=x^2+x$.

7.2. $y''-3y'=xe^x$.

7.3. $y''-3y'=\cos 3x$.

7.4. $y''-y'-2y=x$.

7.5. $y''-y'-2y=e^{-x}$.

7.6. $y''-y'-2y=\sin 2x$.

7.7. $y''+4y=\cos x$.

7.8. $y''+4y=2\cos 2x-5\sin 2x$.

7.9. $y''+4y=e^{2x}\cos 2x$.

7.10. $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$.

Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

В данных методических материалах рассматриваются темы в объеме рабочей программы по дисциплине «Дифференциальные уравнения», позволяющие самостоятельно выполнить контрольные задания.

Выполнению работы должны предшествовать ознакомление с соответствующими разделами курса рекомендуемой литературы и лекциями.

При подготовке к контрольным работам необходимо рассмотреть теоретический материал и разобрать примеры решения аналогичных задач.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

В примерах 1-10найти частные решения дифференциальных уравнений первого порядка, удовлетворяющие начальным условиям:

1	$2y'\sqrt{x}=y$	$y_0=1$ при $x_0=4$.
2	$y'=(2y+1)\text{ctg}x$	$y_0=0{,}5$ при $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.
3	$x^2y'+y^2=0$	$y_0=1$ при $x_0=-1$.
4	$(1+e^x)yy'=e^x$	$y_0=1$ при $x_0=0$.
5	$y'=2\sqrt{y}\ln x$	$y_0=1$ при $x_0=e$.
6	$xy'=\dfrac{y}{\ln x}$	$y_0=1$ при $x_0=e$.

7	$y'tgx - y = 1$	$y_0 = 1$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
8	$2\sqrt{y}dx = dy$	$y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.
9	$y'\sin x = y\ln y$	$y_0 = 1$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
10	$(2x+1)dy + y^2 dx = 0$	$y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.

В примерах 11-24 найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка:

11	$xy' - y = 0$.	12	$xy' + y = 0$.
13	$yy' + x = 0$.	14	$x^2 y' + y = 0$.
15	$x + xy + y'(y + xy) = 0$.	16	$(1+y^2)dx = (1+x^2)dy$.
17	$y - xy' = 1 + x^2 y'$.	18	$(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$.
19	$y' = \dfrac{y}{x}$.	20	$y' = y$.
21	$y'x - y = 0$.	22	$y' - y = 0$.
23	$y' = 3x^2$.	24	$yy' = x$.
25	$3y - xy' = 0$.		

Пример. Найти общее и частное решение уравнения $y'' = 2$ при начальных условиях $y_0 = 1,\ y_0' = 1$, при $x_0 = 1$.

Решение. Общее решение данного уравнения найдем двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя, находим сначала первую производную $y' = 2x + C_1$,а затем общее решение: $y = x^2 + C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя значения начальных условий в выражения для общего решения $y = x^2 + C_1 x + C_2$ и его производной $y' = 2x + C_1$, для определения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 1 + C_1 + C_2, \\ 1 = 2 + C_1, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = -1$ и $C_2 = 1$. Следовательно, искомым частным решением данного уравнения является функция $y = x^2 - x + 1$, график которой – парабола, проходящая через точку (1;1).

В примерах 25-38 найти общее решение линейных дифференциальных уравнений.

25	$y' - y = e^x$.	26	$y' = x + y$.
27	$y' + x^2 y = x^2$.	28	$xy' + y = 3$.
29	$xy' + y = e^x$	30	$y' - \dfrac{3y}{x} = x$.
31	$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.	32	$y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$.

33 $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.

34 $xy' + y = \ln x + 1$.

35 $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

36 $y' - ytgx = ctgx$.

37 $y' + y\cos x = \sin 2x$.

38 $xy' + 2y = x^2$.

39 $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Здесь $p(x) = 3;\ f(x) = e^{2x}$.Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y' + 3y = 0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -3dx$ и интегрируя, находим $\ln|y| = -3x + \ln|C_1|$ или $y = \pm C_1 e^{-3x} = Ce^{-3x}$.Общее решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-3x}$, произвольную постоянную будем считать функцией от x. Здесь применен метод вариации постоянной. Дифференцируя, имеем $y' = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для y и y', получаем $C'(x)e^{-3x} = e^{2x}$, $C'(x) = e^{5x}$ или $dC = e^{5x}dx$, откуда $C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2$, где C_2– произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C(x)e^{-3x} = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_2\right)e^{-3x} \text{ или } y = \frac{1}{5}e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Найдем теперь общее решение данного уравнения методом подстановки. Положим $y = uv$. Тогда будем иметь $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим $u'v + uv' + 3uv = e^{2x}$ или $u'v + u(v' + 3v) = e^{2x}$. Теперь потребуем, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы $v' + 3v = 0$, откуда $\frac{dv}{3v} = -dx$; $\frac{1}{3}\ln v = -x$; $\sqrt[3]{v} = e^{-x}$; $v = e^{-3x}$. Подставляя найденное значение v в $u'v + u(v' + 3v) = e^{2x}$, найдем $u'e^{-3x} = e^{2x}$; $du = e^{5x};u = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.Но $y = uv$,поэтому $y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-3x}$ или $y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$.

В примерах 40-48 решить дифференциальныеуравнения Бернулли.

40 $y'x + y = -xy^2$.

41 $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

42 $y' + y = xy^3$.

43 $y' = x^3y^3 - xy$.

44 $x^2 + y' = y^2 + xy$.

45 $xy' + y = y^2\ln x$.

46 $y' + xy = xy^3$.

47 $xy' + 2y = x^5y^2$.

48 $y' - 2xy = 3x^2y^2$.

Пример. Решить уравнение $y' - 2xy = 3x^3y^2$.

Решение. Это уравнениеБернулли (левая часть у него такая же, как и у линейного, а в правой части стоит выражение $f(x)y^n$, где n –постоянное число; в данном примере $3x^3y^2$).Разделим обе части данного уравнения на $y^2: y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3$.Положим $z = y^{-1}$, тогда $-y^{-2}y' = z'$.Умножая обе части уравнения ($y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3$ на (-1) и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение $z' + 2xz = -2x^3$.Решая это уравнение, находим $z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2$. Следовательно, общим решением данного уравнения будет

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}.$$

В примерах 49-48 найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка.

49	$y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$.	50	$y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$.
51	$y'' + y = x + 2e^x$.	52	$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$.
53	$y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$.	54	$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$.
55	$y'' + y = x\cos x$.	56	$y'' + 4y' = \sin 2x$.
57	$y'' + 4y = 3\sin 2x$.	58	$y'' + 2y' + 2{,}5y = 25\cos 2x$.
59	$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.	60	$y'' - 4y = 8x^3$.
61	$y'' - 2y = xe^{-x}$.	62	$y'' + 3y' = 9x$.
63	$y'' + y' - 2y = 6x^2$.	64	$y'' - 3y' + 2y = e^x$.
65	$y'' + 2y' + y = e^x$.	66	$y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.
67	$y'' - y = 3e^{2x}$.	68	$y'' + y = \sin 2x$.
69	$y'' + y = \sin x$.	70	$y'' - 4y' + 3y = xe^x$.
71	$y'' - 5y' + 4y = 0$.	72	$y'' - 6y' + 9y = 0$.
73	$y'' + 8y' + 25y = 0$.		

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = 3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\hat{y} = c_1e^x + c_2e^{3x}$. Так как среди корней только один равен единице $k_1 = 1$, то частное решение этого уравнения ищем в виде

$$\tilde{y} = (Ax + B)xe^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Дифференцируя дважды $\tilde{y}$ и подставляя результаты в заданное уравнение, получаем $-Ax + 2A - 2B = x$, откуда находим $A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$. Подставляя A и B в выражение для $\tilde{y}$, получаем частное решение данного уравнения:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x.$$

Общее решение имеет вид: $y = \tilde{y} + \hat{y} = c_1e^x + c_2e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

Тесты по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

а) готовясь к тестированию, проработайте информационный материал по дисциплине. Проконсультируйтесь с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

б) четко выясните все условия тестирования заранее. Вы должны знать, сколько тестов Вам будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т.д.

в) приступая к работе с тестами, внимательно и до конца прочтите вопрос и предлагаемые варианты ответов. Выберите правильные (их может быть несколько). На отдельном листке ответов выпишите цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

г) в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант.

д) если Вы встретили чрезвычайно трудный для Вас вопрос, не тратьте много времени на него. Переходите к другим тестам. Вернитесь к трудному вопросу в конце.

е) обязательно оставьте время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Тесты по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Вариант 1

1. Дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$ имеет вид:

A. $(C_1 + C_2 x)e^{2x}$,
B. $C_1 \sin x + C_2 \cos x$,
C. $C_1 e^x + C_2 e^{3x}$,
D. $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$ имеет вид:

A. $C_1 e^{2x} + C_1 e^x$,
B. $e^{2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$,
C. $e^x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$,
D. $(C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

4. Частное решение дифференциального уравнения $y' - y = e^x$ имеет вид:

A. xe^x,
B. $2xe^x$,
C. $x^2 e^x$,
D. Ce^x.

5. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ имеет вид:

A. $k^2 + 5k = 0$,

B. $k^2 - 5k - 6 = 0$,

C. $k^2 - 5k + 6 = 0$,

D. $k^2 + 6k = 0$.

6. Дифференциальное уравнение $(xy + x)dx - y^2 dy = 0$ является:

A. Уравнением Бернулли,
B. Уравнением Клеро,
C. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
D. Уравнением с разделяющимися переменными.

7. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:

A. $\lambda^2 + 4x + 5 = 0$,

B. $\lambda^2 - 4x + 3 = 0$,

C. $4\lambda^2 - 1 = 0$,

D. $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$.

8. Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ имеет вид:

A. $C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{2x}$,

B. $(C_1 + C_2 x)e^{-2x}$,

C. $(C_1 + C_2 x)e^{2x}$,

D. $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$.

9. Дифференциальное уравнение $(x+1)\operatorname{tg} x\,dt + (t+1)\operatorname{tg} t\,dx = 0$ является:

A. Уравнением с разделенными переменными,
B. Уравнением Бернулли,
C. Уравнением с разделяющимися переменными,
D. Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

10. Для дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^x$ начальные условия могут быть:

A. $y(0) = 2, y'(0) = -4$,

B. $y(1) = 1, y'(0) = 2$,

C. $y(0) = -1, y'(1) = 3$,

D. $y(-1) = 0, y'(0) = 1$.

11. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:

A. $\lambda^2-1=0$,

B. $\lambda^2+1=0$,

C. $(\lambda-1)^2=0$,

D. $\lambda^2+\lambda=0$.

12. Дифференциальное уравнение $y'+\frac{y}{x}=y^2\frac{\ln x}{x}$ является:

A. Уравнением с разделяющимися переменными,
B. Уравнением Бернулли,
C. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
D. Уравнением в полных дифференциалах.

13. Общее решение дифференциального уравнения $y'=\frac{y+1}{2x-1}$ имеет вид:

A. $y=\sqrt{2x-1}$,

B. $y+1=3\sqrt{2x-1}$,

C. $y=C\sqrt{2x-1}-1$,

D. $y=4x-3+C$.

14. Общее решение дифференциального уравнения $y''-5y'-6y=0$ имеет вид:

A. $C_1e^{x}+C_2e^{-6x}$,

B. $C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$,

C. $C_1e^{-x}+C_2e^{-6x}$,

D. $C_1e^{x}+C_2e^{6x}$.

15. Дифференциальное уравнение $xy'+x^2y=1$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

Вариант 2

1. Дифференциальное уравнение $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y''+2y'=0$ имеет вид:

A. $C_1e^{x}+C_2e^{2x}$,

B. $C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$,

C. $(C_1+C_2x)e^{-x}$,

D. $C_1+C_2e^{-2x}$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y''-6y'+10y=0$ имеет вид:

A. $C_1e^{3x}+C_2e^{x}$,

B. $e^{3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$,

C. $e^{x}\left(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x\right)$,

D. $C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

4. Частное решение дифференциального уравнения $y'+y=2e^{-x}$ имеет вид:

A. $2xe^{-x}$,

B. $3xe^{-x}$,

C. x^2e^{-x},

D. Ce^{-x}.

5. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y''+9y=0$ имеет вид:

A. $k^2+9k=0$,

B. $k^2+2k+1=0$,

C. $k^2+9=0$,

D. $k^2+9k-1=0$.

6. Дифференциальное уравнение $\sin x\cos y dy-\sin^2 y dx=0$ является:

A. Уравнением Клеро,

B. Уравнением Бернулли,

C. Дифференциальным уравнением 1-го порядка,

D. Уравнением с разделяющимися переменными.

7. Для системы $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y\end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:

A. $\lambda^2+4\lambda-1=0$,

B. $\lambda^2+\lambda-4=0$,

C. $\lambda^2-4=0$,

D. $\lambda^2-\lambda-4=0$.

8. Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ имеет вид:

A. $\left(C_1+C_2x\right)\sin x$,

B. $C_1\cos x+C_2\sin x$,

C. $\left(C_1+C_2x\right)\cos x$,

D. $C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

9. Дифференциальное уравнение $\left(x^2+x\right)dt+\left(t^2+t\right)dx=0$ является:

A. Уравнением с разделенными переменными,

B. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,

C. Уравнением с разделяющимися переменными,

D. Уравнением Бернулли.

10. Для дифференциального уравнения $y''+4y'+5y=1$ начальные условия могут быть:

A. $y(0)=3, y'(0)=1$,

B. $y(0)=1, y'(1)=0$,

C. $y(1)=0, y'(0)=2$,

D. $y(0)=1, y''(0)=4$.

11. Для системы $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1 \end{cases}$ характеристическое уравнение имеет вид:

A. $\lambda^2+\lambda=0$,

B. $\lambda^2-1=0$,

C. $\lambda^2-\lambda=0$,

D. $(\lambda-1)^2=0$.

12. Дифференциальное уравнение $y'-\dfrac{y}{x}=2x^3y^4$ является:

A. Уравнением с разделяющимися переменными,
B. Уравнением Бернулли,
C. Однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка,
D. Уравнением в полных дифференциалах.

13. Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-3}{x+4}$ имеет вид:

A. $y=Cx+3C$,

B. $y=x+4+3C$,

C. $y=C(x+4)+3$,

D. $y-3=x+4$.

14. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения $y''+2y'+y=0$ имеет вид:

A. $n^2+2n-1=0$,

B. $n^2+2n+1=0$,

C. $n^2-1=0$,

D. $n^2+1=0$.

15. Дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{2x-y}{x+2y}$ является:

A. Уравнением в полных дифференциалах,
B. Уравнением с разделяющимися переменными,
C. Уравнением Бернулли,
D. Однородным уравнением 1-го порядка.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Готовиться к экзамену необходимо последовательно, с учетом контрольных вопросов, разработанных ведущим преподавателем кафедры. Сначала следует определить место каждого контрольного вопроса в соответствующем разделе темы учебной программы, а затем внимательно прочитать и осмыслить рекомендованные научные работы, соответствующие разделы рекомендованных учебников. При этом полезно делать хотя бы самые краткие выписки и заметки. Работу над темой можно считать завершенной, если вы сможете ответить на все контрольные вопросы и дать определение понятий по изучаемой теме.

Для обеспечения полноты ответа на контрольные вопросы и лучшего запоминания теоретического материала рекомендуется составлять план ответа на контрольный вопрос. Это позволит сэкономить время для подготовки непосредственно перед экзаменом за счет обращения не к литературе, а к своим записям.

При подготовке необходимо выявлять наиболее сложные вопросы, с тем, чтобы обсудить их с преподавателем на лекциях и консультациях.

Нельзя ограничивать подготовку к экзамену простым повторением изученного материала. Необходимо углубить и расширить ранее приобретенные знания за счет новых идей и положений.