МИНОБРНАУКИ РОССИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
## Дискретная математика

**Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контактную и самостоятельную работу;
- формах контактной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

**Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины**

## Тема 1. Рекуррентные соотношения. Суммы и рекуррентности

***План темы***

1. *Понятие рекуррентного соотношения.*
2. *Некоторые способы решения рекуррентных соотношений.*
3. *Преобразования сумм.*
4. *Связь конечных сумм и рекуррентных соотношений.*

***1. Понятие рекуррентного соотношения***

«Рекуррентная» последовательность в переводе на русский язык означает «возвратная», то есть такая последовательность, в которой все члены, начиная с некоторого, выражаются через предыдущие. Числовые последовательности будем обозначать следующим образом:

$$\{u_n\}: \quad u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \qquad (1).$$

**Определение.** Пусть $\{u_n\}$ – числовая последовательность. Если существуют натуральное число k и числа $a_1, a_2 \ldots, a_k$, ($a_k \neq 0$), такие что, начиная с некоторого номера m и для всех последующих номеров выполняется соотношение:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_n u_k, \quad n > m > 1 \qquad (2),$$

то последовательность $\{u_n\}$ называется *рекуррентной последовательностью порядка k,* а соотношение (2) – *рекуррентным соотношением порядка k.*

Простейшими примерами рекуррентных последовательностей являются геометрическая и арифметическая прогрессии. Покажем это.

Пусть последовательность $\{u_n\}$ есть геометрическая прогрессия, тогда ее члены можно записать в виде:

$$u_1 = a, u_2 = aq, \ldots, u_n = aq^{n-1}, u_{n+1} = aq^n, \ldots$$

Выражая $(n+1)-й$ член прогрессии через предыдущий, получим соотношение: $u_{n+1} = u_n q$, сравнив которое с соотношением (2), приходим к выводу, что в случае геометрической прогрессии $k = 1, a_1 = q$ .

Таким образом, любая геометрическая прогрессия есть рекуррентная последовательность *первого порядка.*

Пусть теперь $\{u_n\}$ есть арифметическая прогрессия, тогда ее члены можно записать в виде:

$$u_1 = a,\, u_2 = a + d, \ldots, u_{n+1} = u_n + d, u_{n+2} = u_{n+1} + d, \ldots$$

Из последних двух равенств выразим разность арифметической прогрессии $d$ :

$\begin{cases} d = u_{n+1} - u_n, \\ d = u_{n+2} - u_{n+1} \end{cases}$, $\Rightarrow$ $u_{n+1} - u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$ или

$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ - получили рекуррентное соотношение 2-го порядка. Следовательно, всякая арифметическая прогрессия есть рекуррентная последовательность 2-го порядка.

**Замечание**

1. Можно сказать, что всякая рекуррентная последовательность определяет рекуррентное соотношение, и, наоборот, по всякому рекуррентному соотношению можно построить рекуррентную последовательность. Поэтому в дальнейшем мы иногда будем использовать эти термины как синонимы.

2. Следует иметь в виду, некоторые прогрессии как геометрические, так и арифметические, могут удовлетворять рекуррентным соотношениям порядка выше 1 или 2. Поэтому, когда говорят, что геометрическая прогрессия есть последовательность 1-го порядка, то речь идет о *наименьшем* из возможных порядков.

### *2. Некоторые способы решения рекуррентных соотношений*

Пусть дано произвольное рекуррентное соотношение порядка k:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_n u_k, \quad (a_k \neq 0) \quad (1).$$

Очевидно, соотношение (1) позволяет рассчитывать члены последовательности, начиная с $u_k$, $(k \geq 1)$.

Члены $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ называются *начальными членами* или *начальными условиями* соотношения (1) и задаваемой этим соотношением последовательности. Задавая различные числовые значения начальным членам, будем получать различные числовые последовательности (они будут отличаться друг от друга хотя бы конечным числом первых членов). Поэтому из сказанного следует первое свойство рекуррентных соотношений порядка $k$.

**СВОЙСТВО 1.** Всякое рекуррентное соотношение порядка $k$ имеет бесконечное множество решений.

Обобщая понятия, введенные для соотношения Фибоначчи порядка 2, приведем некоторые определения и свойства рекуррентных соотношений порядка $k$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** $k$ решений соотношения порядка $k$ называются непропорциональными, если они попарно непропорциональны.

**СВОЙСТВО 2.** а). $k$ решений соотношения порядка $k$ являются базисными тогда и только тогда, когда $k$-мерные векторы, образованные начальными членами этих решений линейно независимы.

б). Среди бесконечного множества решений рекуррентного соотношения порядка $k$ можно выбрать $k$ базисных решений, через которые линейно выражается любое решение этого соотношения.

**СВОЙСТВО 3.** Базисные решения могут быть выбраны не единственным образом.

Если последовательности $\underbrace{\{x_n\}, \{y_n\}, \ldots, \{z_n\}}_{k \text{ решений}}$ уже выбраны в качестве базисных решений, то решение

$$u_n = Ax_n + By_n + \cdots + Cz_n \qquad (2)$$

называется *общим решением* соотношения (1).

Чтобы найти частное решение рекуррентного соотношения, нужно воспользоваться начальными условиями.

Одним из наиболее простых и эффективных методов отыскания базисных решений соотношения порядка $k$ также является метод геометрических прогрессий, когда базисные решения ищутся среди геометрических прогрессий с первым членом, равным 1, и знаменателем $q$:

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots \quad (3)$$

Чтобы прогрессия вида (4) была решением соотношения (1), необходимо, чтобы ее члены удовлетворяли этому соотношению. Подставим в (1) вместо $U_I$ члены прогрессии (4). Так как $i$-й член прогрессии (4) имеет вид $q^i$, то соотношение (1) примет вид:

$$q^{n+k} = A_1 \cdot q^{n+k-1} + A_2 \cdot q^{n+k-2} + \ldots + A_k \cdot q^n \quad (4).$$

Разделим обе части равенства (5) на $q^n$, получим алгебраическое уравнение той же степени, что и соотношение (1) с теми же коэффициентами:

$$q^k = A_1 \cdot q^{k-1} + A_2 \cdot q^{k-2} + \ldots + A_{k-1} \cdot q + A_k \quad (5),$$

которое называется *характеристическим уравнением* соотношения (1).

Решая уравнение (5), найдем $k$ его коней:

$$q_1, q_2, \ldots, q_k,$$

которые обозначим для удобства через $\underbrace{\alpha, \beta, \ldots, \gamma}_{k}$ (7) соответственно.

Таким образом, *если геометрическая прогрессия с первым членом 1 является решением соотношения (1), то знаменатель этой прогрессии удовлетворяет характеристическому уравнению этого соотношения.*

Обратно, пусть $q = \alpha$ - какой-либо корень характеристического уравнения (5). Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_n = \alpha^n$, $(N = 0,1,2,\ldots)$ и получим прогрессию с первым членом 1 и знаменателем $\alpha$, которая удовлетворяет соотношению (1).

Следовательно, *если $\alpha$ - корень характеристического уравнения (5), то ему соответствует геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем $\alpha$.*

Поэтому, чтобы найти базис соотношения (1) порядка $k$, состоящий из геометрических прогрессий с первым членом 1, характеристическое уравнение должно иметь $k$ различных корней.

Пусть все корни уравнения (5) различны: $q_1 = \alpha, q_2 = \beta, \ldots, q_k = \gamma$. По вышесказанному получим k геометрических прогрессий, каждая из которых есть решение соотношения (1) со знаменателями $\underbrace{\alpha, \beta, \ldots, \gamma}_{k}$:

$$\begin{array}{l} \{\alpha_n\}:\ \ 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots \\ \{\beta_n\}:\ \ 1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{\gamma_n\}:\ \ 1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^n, \ldots \end{array}$$

Осталось доказать, что эти прогрессии образуют базис соотношения (1), то есть, что любое решение этого соотношения единственным образом линейно выражается через данные. Иными словами, нужно доказать существование таких чисел $\underbrace{A, B, \ldots, C}_{k}$, что для любого номера $n$:

$$u_n = \underbrace{A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n + \ldots + C \cdot \gamma^n}_{k\ \ слагаемых} \quad (8).$$

Чтобы доказать существование таких чисел, достаточно доказать, что система линейных уравнений, полученная из равенства (8) подстановкой вместо $n$ чисел от 0 до $k-1$, имеет единственное решение относительно переменных $A, B, \ldots, C$ при любых фиксированных значениях свободных членов этой системы $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} n=0:\ \ A + B + \cdots + \ \ C = u_0, \\ n=1:\ \ A\alpha + B\beta + \cdots + C\gamma = u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n=k-1:\ \ A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} + \cdots + C\gamma^{k-1} = u_{k-1} \end{array}\right\} \quad (9).$$

Из курса линейной алгебры известно, что система k линейно независимых (непропорциональных) уравнений с k переменными имеет единственное решение.

Еще один метод решения рекуррентных соотношений в замкнутой форме дают так называемые *производящие функции.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть $\{g_n\},\ n \ge 0$ - рекуррентная последовательность. Степенной ряд вида:

$$G(z) = \sum_{n \ge 0} g_n z^n = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \cdots + g_n z^n + \cdots \qquad (*)$$

называется *производящей функцией* последовательности $\{g_n\}$.

**ЗАМЕЧАНИЯ.** 1. Иногда для общности рассуждений суммирование удобно проводить по множеству всех целых чисел, а не только неотрицательных. Сумма (*) может быть распространена и на слагаемые с отрицательными индексами, если положить, что $g_{-1} = g_{-2} = \cdots = g_{-n} = \cdots = 0$.

2. Функция $G(z)$ может восприниматься двояко: или как функция комплексного переменного z со всеми вытекающими свойствами, или как формальный степенной ряд с параметром z, природа которого не важна.

3. Роль параметра z заключается в том, чтобы находить в замкнутом виде решение рекуррентной последовательности как коэффициент при n-й степени z. При этом значение ряда, записанного в правой части равенства (*), никогда не вычисляется для конкретных значений параметра z. Над этими рядами (или производящими функциями) выполняются некие формальные операции, с помощью которых и находится решение последовательности $\{g_n\}$ в замкнутом виде.

Над производящими функциями можно выполнять ряд операций. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть $G(z)=\sum\limits_n g_n z^n$ *и* $F(z)=\sum\limits_n f_n z^n$ – производящие функции последовательностей $\{g_n\}$ и $\{f_n\}$ соответственно и $\alpha$ *и* $\beta$ - некоторые числовые константы.

**1.** Выражение вида:

$$\alpha\cdot F(z)+\beta\cdot G(z)=\alpha\cdot\sum_n f_n z^n+\beta\cdot\sum_n g_n z^n=\sum_n(\alpha\cdot f_n+\beta\cdot g_n)\cdot z^n \quad (1)$$

является производящей функцией последовательности $\{\alpha\cdot f_n+\beta\cdot g_n\}$. Эта операция называется *сложением* производящих функций.

**2.** Вместо последовательности $\{g_n\}$ рассмотрим последовательность, полученную из нее заменой первых $m$ членов нулями. В этой последовательности член $g_0$ ,будет стоять на $m+1$ -м месте:

$$\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m}, g_0, g_1,\ldots (**).$$

Говорят, что последовательность (**) получена из последовательности $\{g_n\}$ *сдвигом на m элементов вправо.* Чтобы найти производящую функцию последовательности (*), умножим исходную последовательность на $z^m$:

$$z^m\cdot\sum_n g_n z^n=\sum g_n z^{n+m}=\sum_n g_{n-m} z^n \quad (2).$$

Эта операция называется *сдвигом* производящей функции $G(z)$ *на m позиций вправо.*

**3.** Вместо последовательности $\{g_n\}$ рассмотрим последовательность, полученную из нее удалением первых $m$ членов $g_0, g_1,\ldots,g_{m-1}$. В этой последовательности член $g_m$ будет стоять на 0-м месте:

$$\{g_m, g_{m+1},\ldots, g_n,\ldots\}=\{g_{n+m}\}.$$

Построим ее производящую функцию. Для этого вычтем из $G(z)$ ее первые m членов и поделим на $z^m$:

$$\frac{G(z)-g_0-g_1z-g_2z^2-\cdots-g_{m-1}z^{m-1}}{z^m}=\sum_{n\ge m} g_n z^{n-m}=\sum_{n\ge 0} g_{n+m} z^n \quad (3).$$

Эта операция называется *сдвигом* производящей функции $G(z)$ *на m позиций влево.*

**4.** Пусть $C$ – некоторая константа. Функция

$$G(C\cdot z)=\sum_n g_n(C\cdot z)^n=\sum_n C^n\cdot g_n z^n \quad (4)$$

является производящей функцией последовательности $\{C^n\cdot g_n\}$.

Особо важен и часто используется случай, когда константа $C=-1$:

$$G(-z)=\sum_n(-1)^n\cdot g_n z^n \quad (4') -$$

функция последовательности $\{(-1)^n \cdot g_n\}$.

**5.** Операция *дифференцирования.* Найдем производную производящей функции $G(z)$ последовательности $\{g_n\}$:

$$G'(z) = g_1 + 2g_2 z + 3g_3 z^2 + \dots + = \sum_n (n+1) \cdot g_{n+1} \cdot z^n \quad (5).$$

Вместо данной формулы достаточно часто используют другую, полученную из нее сдвигом на одну позицию вправо:

$$n \cdot G'(z) = \sum_n n \cdot g_n \cdot z^n \quad (5'),$$

так как это есть производящая функция последовательности $\{n \cdot g_n\}$. Повторное дифференцирование позволяет *умножить* члены последовательности $\{g_n\}$ на любой требуемый многочлен от $n$.

**6.** Операция *интегрирования,* напротив, дает способ *поделить* элементы последовательности на $n$:

$$\int_0^z G(t)dt = g_0 z + \frac{1}{2} g_1 z^2 + \frac{1}{3} g_2 z^3 + \dots = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n} \cdot g_{n-1} \cdot z^n \quad (6).$$

Если нужно получить производящую функцию для последовательности $\{\frac{1}{n} \cdot g_n\}$, то в подинтегральном выражении нужно заменить $G(t)$ на $\frac{G(t) - g_0}{t}$, тогда:

$$\int_0^z \frac{G(t) - g_0}{t} dt = \sum_n \frac{1}{n} \cdot g_n \cdot z^n \quad (6').$$

**7.** Операция *умножения* производящих функций.

$$\begin{aligned} F(z) \cdot G(z) &= (f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots) \cdot (g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots) = \\ &= f_0 \cdot g_0 + (f_0 \cdot g_1 + f_1 \cdot g_0) \cdot z + (f_0 \cdot g_2 + f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_0) \cdot z^2 + \dots = \\ &= \sum_n \left( \sum_k f_k \cdot g_{n-k} \right) \cdot z^n \end{aligned} \quad (7).$$

Правая часть равенства (7) есть производящая функция для последовательности $\{f_k \cdot g_{n-k}\}$, которая называется *сверткой* последовательностей $\{g_n\}$ и $\{f_n\}$.

Из формулы (7) получается также один очень важный частный случай, когда функция $F(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$. Здесь все $f_k = 1$ для любого $k \ge 0$, поэтому:

$$F(z) \cdot G(z) = \frac{1}{1-z} \cdot G(z) = \sum_n \left( \sum_{k \ge 0} g_{n-k} \right) \cdot z^n = \sum_n \left( \sum_{k \le n} g_k \right) \cdot z^n \quad (7').$$

Все операции над производящими функциями можно свести в таблицу, которая представлена на с. 16.

**ЗАМЕЧАНИЕ**

Производящие функции являются важным инструментом при решении рекуррентных соотношений в замкнутом виде. В данном случае выражение «в замкнутом виде» может пониматься как в обычном смысле, то есть, выражение n-го члена последовательности $\{g_n\}$ через номер $n$, так и в смысле выражения самой производящей функции $G(z)$ в замкнутом виде через $z$.

Производящие функции, рассмотренные в предыдущем параграфе, называют *полиномиальными* или *обычными*. Однако существуют и другие виды производящих функций, некоторые могут задаваться самими автором исходя из вида решаемой им задачи.

Наиболее часто из других видов производящих функций используются *экспоненциальные*.

**<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u>** Пусть $\{g_n\},\ n \geq 0$ - рекуррентная последовательность.

Степенной ряд вида:

$$E(z) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{z^n}{n!} = g_0 + g_1 z + g_2 \frac{z^2}{2!} + \cdots + g_n \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (***)$$

называется *экспоненциальной производящей функцией* последовательности $\{g_n\}$.

**Таблица 1. Преобразования производящих функций**

| ***№ п/п*** | ***Название операции*** | ***Вид функции*** |
|---|---|---|
| 1. | Сложение | $\alpha \cdot F(z) + \beta \cdot G(z) = \sum_N (\alpha \cdot f_N + \beta \cdot g_N) \cdot z^N$ |
| 2. | Сдвиг на $m$ вправо | $z^m \cdot \sum_N g_N z^N = \sum_N g_{N-m} z^N$, m ≥ 0 – целое |
| 3. | Сдвиг на $m$ влево | $\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - g_2 z^2 - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{N \geq 0} g_{N+m} z^N$, m ≥ 0 – целое |
| 4. | Умножение на $C$=const | $a) G(C \cdot z) = \sum_N C^N \cdot g_N z^N$, $C$ – любое число;<br>$b) G(-z) = \sum_N (-1)^N \cdot g_N z^N \quad C = -1$ |
| 5. | Дифференцирование | $a) G'(z) = \sum_N (N+1) \cdot g_{N+1} \cdot z^N$ - общий случай;<br>$b) N \cdot G'(z) = \sum_N N \cdot g_N \cdot z^N$ - умножение на $n$ |
| 6. | Интегрирование | $a) \int_0^z G(t) dt = \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N} \cdot g_{N-1} \cdot z^N$ - общий случай;<br>$b) \int_0^z \frac{G(t) - g_0}{t} dt = \sum_N \frac{1}{N} \cdot g_N \cdot z^N$ - деление на $n$ |
| 7. | Умножение | $a) F(z) \cdot G(z) = \sum_N \left( \sum_k f_k \cdot g_{N-k} \right) \cdot z^N$ - общий случай;<br>$b) \frac{1}{1-z} \cdot G(z) = \sum_N \left( \sum_{k \leq N} g_k \right) \cdot z^N$ - $F(z) = \frac{1}{1-z}$. |

### *3. Преобразования сумм*

При изучении различных числовых последовательностей, в том числе и рекуррентных, часто приходится сталкиваться с необходимостью найти сумму конечного или бесконечного числа членов этих последовательностей. Например, сумма n первых членов арифметической или геометрической прогрессии и т.д. Понятие суммы, как будет видно в дальнейшем, тесно связано и с понятием рекуррентности. Рассмотрим поэтому различные способы записи и преобразования сумм, которые потребуются в дальнейшем.

Рассмотрим несколько простейших примеров. Пусть нужно записать сумму n первых членов натурального ряда и сумму n первых целых неотрицательных степеней числа 2.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \qquad (1);$$

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n \quad (2).$$

Символически эти суммы можно записать с использованием знака $\sum$ :

$$(1)=\sum_{k=1}^{n} k; \quad (2)=\sum_{k=0}^{n} 2^k \quad (3).$$

Запись вида (3), при которой и в верхней и в нижней строке знака суммы указаны пределы суммирования, называется записью *с явными пределами суммирования.*

Существуют и другие формы записи конечных и бесконечных сумм. Множество, по которому проходит суммирование обязательно должно быть указано в *нижней строке* знака суммы, о в верхней строке может быть не указано ничего:

$$(1)=\sum_{1\le k\le n} k; \quad (2)=\sum_{0\le k\le n} 2^k \quad (4).$$

Такая форма записи называется *обобщенной.* В абстрактных, обобщенных рассуждениях часто необходимо указать, что суммирование идет по некоторому множеству индексов *I*, не обязательно числовому, конечному или бесконечному:

$$\sum_{i\in I} a_i \quad (5).$$

Такая запись означает сумму всех элементов некоторого множества, пронумерованных элементами множества индексов *I.*

Обобщенная форма записи предпочтительнее, если нужно произвести некие преобразования суммы, например, переименование индекса. Если подобную операцию проделывать над суммой с явными пределами суммирования, то можно совершить ошибку при замене индекса: потерять несколько слагаемых, или, наоборот, добавить лишние.

В последнее время стала использоваться форма записи суммы, связанная с логическими исчислениями. Пусть $P(k)$ – некоторое высказывание (утверждение) о натуральном числе (или вообще, объекте $k$ ). Это утверждение берется в квадратные скобки и полагается, что результат равен 1, если само высказывание в скобках истинно, и 0 - если оно ложно:

$$[P(k)] = \begin{cases} 1, & \text{если } P(k) \text{ истинно}, \\ 0, & \text{если } P(k) \text{ ложно}. \end{cases}$$

Преимущество такого обозначения заключается в том, что оно позволяет не заботиться о пределах суммирования. В этом случае можно рассматривать $\sum_k a_k\cdot[P(k)]$.

Те слагаемые, для которых $P(k)$ ложно, примут вид $a_k\cdot 0=0$ и не будут влиять на итоговый результат. Подобная форма записи была использована в алгоритме решения рекуррентных соотношений с помощью производящих функций (§1.5., пример).

Пусть дана сумма $(1)=\sum_{k=1}^{n} k$ $n$ первых членов натурального ряда. Можно доказать (например, методом математической индукции), что она равна выражению $\frac{n(n+1)}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Аналогично можно доказать равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Выражения, стоящие в правых частях этих равенств не зависят от индекса $k$ и называются *решением суммы в замкнутом виде.* Часто говорят просто о *решении* некоторой суммы, имея ввиду ее решение в замкнутом виде.

***4. Связь конечных сумм и рекуррентных соотношений***

Уже из предыдущей темы видно, что между суммами и рекуррентными соотношениями существует тесная взаимосвязь. Рассмотрим, например, сумму:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Очевидно, что она равносильна рекуррентности:

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \quad n > 0 \end{cases} \qquad (1).$$

Поэтому, научившись решать рекуррентные соотношения в замкнутом виде, то есть без вычисления всех предыдущих членов последовательности, эти же способы можно применять и для решения сумм. Рассмотрим случай, когда слагаемое $a_n$ в сумме (1) имеет линейную зависимость от номера $n$:

$$a_n = \beta + \gamma \cdot n, \quad \beta = const .$$

Тогда сумма-рекуррентность (1) примет вид:

$$\begin{cases} U_0 = \alpha, \\ U_n = U_{n-1} + \beta + \gamma \cdot n, \quad n > 0 \end{cases} \qquad (2).$$

Будем искать решение соотношения (2) в замкнутом виде.

$$\begin{aligned} &n=1: \quad U_1 = U_0 + \beta + \gamma \cdot 1 = \alpha + \beta + \gamma, \\ &n=2: \quad U_2 = U_1 + \beta + 2\gamma = \alpha + 2\beta + 3\gamma, \\ &n=3: \quad U_3 = U_2 + \beta + 3\gamma = \alpha + 3\beta + 6\gamma \quad \text{и т.д.} \end{aligned} \qquad (3)$$

Поэтому искомое решение примет общий вид:

$$U_n = A(n)\cdot\alpha + B(n)\cdot\beta + C(n)\cdot\gamma \qquad (4),$$

где $A(n), B(n), C(n)$– коэффициенты, зависящие от индекса n при основных параметрах $\alpha, \beta, \gamma$. Чтобы найти эти коэффициенты, вместо $U_n$ будем рассматривать некие функции, имеющие достаточно простую зависимость от $n$.

1.) Найдем $A(n)$. Пусть $\{U_n\}$ – такая последовательность, у которой $U_n = 1$ при любом $n$, тогда согласно (2) и (3):

$$U_0 = \alpha = 1, \quad U_1 = U_0 + \beta + \gamma = 1, \quad \Rightarrow \beta + \gamma = 0,$$
$$U_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1, \Rightarrow 2\beta + 3\gamma = 0,$$
$$\text{откуда} \quad \beta = \gamma = 0.$$

С другой стороны, из (4) получаем:

$$1 = A(n)\cdot\alpha + B(n)\cdot\beta + C(n)\cdot\gamma .$$

Подставим в это выражение найденные значения параметров $\alpha, \beta, \gamma$:

$$1 = A(n)\cdot 1 + B(n)\cdot 0 + C(n)\cdot 0, \quad \Rightarrow \quad A(n) = 1 .$$

2.) Найдем $B(n)$. В качестве последовательности $\{U_n\}$ возьмем последовательность, у которой общий член задается функцией $U_n = n$. Тогда:

$$U_0 = \alpha = 0, \quad U_1 = U_0 + \beta + \gamma = 1, \quad \Rightarrow \beta + \gamma = 1,$$
$$U_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma = 2, \Rightarrow 2\beta + 3\gamma = 2,$$
$$\text{откуда} \quad \beta = 1, \ \ \gamma = 0.$$

Используя общий вид решения (4), получим:

$$n = A(n)\cdot 0 + B(n)\cdot 1 + C(n)\cdot 0\,, \quad \Rightarrow \quad B(n) = n\,.$$

3.) Найдем $C(n)$. В качестве последовательности $\{U_n\}$ возьмем последовательность, у которой общий член задается функцией $U_n = n^2$. Тогда:

$$U_0 = \alpha = 0^2 = 0, \quad U_1 = U_0 + \beta + \gamma = 1^2 = 1, \quad \Rightarrow \beta + \gamma = 1,$$

$$U_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma = 2^2 = 4, \ \Rightarrow \ 2\beta + 3\gamma = 4,$$

$$\textit{откуда} \quad \beta = -1, \ \gamma = 2.$$

Используя общий вид решения (4), получим:

$$n^2 = A(n)\cdot 0 + B(n)\cdot(-1) + C(n)\cdot 2\,, \quad \Rightarrow$$

$$2C(n) = n^2 + B(n)\,, \quad \Rightarrow \quad C(n) = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Итак, пусть требуется вычислить сумму:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(a + bk)\,,$$

которая сводится к рекуррентности:

$$\begin{cases} U_0 = \alpha, \\ U_n = U_{n-1} + \beta + \gamma\cdot n, \quad n > 0 \end{cases}, \text{ где } \ \alpha = \beta = a, \ \gamma = b.$$

Чтобы записать решение этого соотношения в замкнутой форме, подставим в равенство (4) найденные значения коэффициентов $A(n), B(n), C(n)$ и значения параметров $\alpha = \beta = a, \ \gamma = b.$:

$$U_n = 1\cdot a + n\cdot a + \frac{n(n+1)}{2}\cdot b\,,$$

$$U_n = a\cdot(n+1) + b\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad (5).$$

Верно и обратное - многие рекуррентности могут быть сведены к суммам.

Рассмотрим эту связь сначала на примере задачи о ханойской башне. Выше было сказано, что ее решение сводится к решению соотношения:

$$\begin{cases} T_0 = 0, \\ T_n = 2T_{n-1} + 1, \ n > 0 \end{cases} \qquad (6).$$

Рассмотрим преобразование, которое является частным случаем общего приема - разделим каждое из соотношений системы (6) на 2 в соответствующей степени:

$$\begin{cases} \dfrac{T_0}{2^0} = 0, \\ \dfrac{T_n}{2^n} = 2\dfrac{T_{n-1}}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}, \quad n > 0 \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} \dfrac{T_0}{2^0} = 0, \\ \dfrac{T_n}{2^n} = \dfrac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}, \quad n > 0 \end{cases} \qquad (7).$$

Положим теперь $S_n = \dfrac{T_n}{2^n}$ (8).

Тогда, так как $S_0 = \dfrac{T_0}{2^0}$, $S_{n-1} = \dfrac{T_{n-1}}{2^{n-1}}$, то равенства (7) перепишутся в виде:

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = S_{n-1} + \dfrac{1}{2^n}, \quad n > 0 \end{cases} \quad (9).$$

Из последнего равенства системы (9) можно получить цепочку равенств:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{2^n}, \quad S_{n-1} = S_{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, S_2 = S_1 + \frac{1}{2^2}, \quad S_1 = S_0 + \frac{1}{2^1},$$

которые позволяют записать $S_n$, используя знак суммирования $\sum$ .

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ – получили сумму n первых членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{2}$ и знаменателем $\frac{1}{2}$. Эту сумму можно вычислить и она равна $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (10).

Из (8) и (10) получаем, что:

$$T_n = 2^n \cdot S_n = 2^n \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2^n - 1.$$

Итак, решение рекуррентного соотношения (6) в замкнутой форме имеет вид:

$$T_n = 2^n - 1.$$

Общий прием состоит в том, что обе части рекуррентного соотношения вида $a_n \cdot T_n = b_n \cdot T_{n-1} + c_n$ (11) можно свести к *сумме,* умножая обе его части на так называемый *суммирующий множитель* $s_n$ :

$$s_n \cdot a_n \cdot T_n = s_n \cdot b_n \cdot T_{n-1} + s_n \cdot c_n \quad (12).$$

При этом множитель $s_n$ нужно подбирать таким образом, чтобы произведение $s_n \cdot b_n$ оказалось равным произведению $s_{n-1} \cdot a_{n-1}$:

$$s_n \cdot b_n = s_{n-1} \cdot a_{n-1} \quad (13).$$

Положим $S_n = s_n \cdot a_n \cdot T$ (14). Тогда, так как

$s_n \cdot b_n \cdot T_{n-1} \overset{(13)}{=} s_{n-1} \cdot a_{n-1} \cdot T_{n-1} = S_{n-1}$ , то (12) перепишется в виде:

$$S_n = S_{n-1} + s_n \cdot c_n \quad (15).$$

Так же как и в частном случае можно получить цепочку равенств, расписывая поочередно по формуле (15) $S_{n-1}$, $S_{n-2}$, и т.д.:

$$\begin{matrix} S_{n-1} = S_{n-2} + s_{n-1} \cdot c_{n-1}, \ldots, S_2 = S_1 + s_2 \cdot c_2, \\ S_1 = S_0 + s_1 \cdot c_1 = s_1 \cdot c_1 \end{matrix}, \Rightarrow$$

$$S_n = s_0 \cdot a_0 \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot c_k \overset{(13)}{=} s_1 \cdot b_1 \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot c_k \quad (16).$$

Из формулы (14) выразим $T_n$: $T_n = \dfrac{S_n}{s_n \cdot a_n}$ . Тогда из (16) получим:

$$T_n = \frac{1}{s_n \cdot a_n} \cdot \left(s_1 \cdot b_1 \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot c_k\right) \quad (17).$$

Например, при n = 1 получим:

$$T_1 = \frac{1}{s_1 \cdot a_1} \cdot \left( s_1 \cdot b_1 \cdot T_0 + s_1 \cdot c_1 \right) = \frac{s_1 \cdot (b_1 \cdot T_0 + c_1)}{s_1 \cdot a_1} = \frac{b_1 \cdot T_0 + c_1}{a_1}.$$

При использовании этого приема все трудности связаны с отысканием суммирующего множителя $s_n$. Чтобы правильно подобрать этот множитель, нужно использовать формулу (13), выражая из нее $s_n$ и затем «разворачивая» эту формулу $s_n = \frac{s_{n-1} \cdot a_{n-1}}{b_n}$, $s_{n-1} = \frac{s_{n-2} \cdot a_{n-2}}{b_{n-1}}$ $\Rightarrow$ $s_n = \frac{s_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{b_n \cdot b_{n-1}}$ и т.д., пока не придем к окончательному виду

$$s_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \cdots \cdot a_2 \cdot a_1}{b_n \cdot b_{n-1} \cdot \cdots \cdot b_3 \cdot b_2} \qquad (18).$$

«Разворачивая» формулу (13), нужно следить, чтобы ни один из множителей $a$ и $b$ не оказался равным 0.

**ПРИМЕР.** Применим метод суммирующего множителя к рекуррентности, которая возникает при «быстрой сортировке» данных в компьютере. Среднее число шагов сравнений, выполняемых алгоритмом «быстрой сортировки», применяемой к n элементам данных, удовлетворяет соотношению:

$$\begin{cases} T_0 = 0, \\ T_n = n + 1 + \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T_k, \quad n > 0 \end{cases} \qquad (19).$$

**Решение.**

Попробуем привести это соотношение к виду (11), понизив его сложность. Для этого сначала избавимся от деления, умножив обе части соотношения (19) на $n$:

$$n \cdot T_n = n^2 + n + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T_k, \quad n > 0 \quad (20).$$

Произведем замену $n$ на $n-1$:

$$(n-1) \cdot T_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} T_k, \quad n-1 > 0 \quad (21)$$

и вычтем из (20) – (21):

$$n \cdot T_n - (n-1) \cdot T_{n-1} = 2n + 2 \cdot T_{n-1}, \quad n > 1.$$

Итак, исходное соотношение (19) свелось к более простому:

$$\begin{cases} T_0 = 0, \\ n \cdot T_n = (n+1) \cdot T_{n-1} + 2n, \quad n > 0 \end{cases} \qquad (22).$$

Это соотношение имеет вид (11), где $a_n = n,\ b_n = n+1,\ c_n = 2n.$
Найдем для этого соотношения суммирующий множитель по формуле (18):

$$s_n = \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{n \cdot (n+1)}.$$

Тогда по общей формуле (17) решением соотношения (19) будет:

$$T_n = \frac{1}{\frac{2}{n \cdot (n+1)} \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k \cdot (k+1)} \cdot 2k = 2(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \qquad (23).$$

## Тема 2. Целочисленные функции $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, mod. Бином Ньютона

***План тема***

1. *Целочисленные функции $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, mod и их свойства*
2. *Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля.*

### *1. Целочисленные функции $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, mod и их свойства*

### *Функции $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ и их свойства*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x$ - произвольное действительное число. Тогда:

$\lfloor x \rfloor$ равно наибольшему целому числу, не превосходящему $x$ (функция «пол»);

$\lceil x \rceil$ равно наименьшему целому числу, большему или равному $x$ (функция «потолок»).

Таким образом, $\begin{array}{l} \lfloor x \rfloor = a, \quad a \in Z, \quad a \le x, \quad a - \text{наибольшее}; \\ \lceil x \rceil = b, \quad b \in Z, \quad b \ge x, \quad b - \text{наименьшее}. \end{array}$

Отметим некоторые свойства этих функций.

СВОЙСТВО 1.

$$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil \quad \Leftrightarrow \quad x \in Z.$$

СВОЙСТВО 2.

$$\text{Если} \quad x \notin Z, \quad \text{то} \quad \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1.$$

СВОЙСТВО 3.

$$(\forall x \in R)\ (x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1.$$

СВОЙСТВО 4.

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil \quad \text{и} \quad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor.$$

СВОЙСТВО 5.

$$\begin{array}{l} (\forall x \in R)\ (\forall n \in Z): \\ a) \lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \le x \le n + 1; \\ b) \lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 < n \le x; \\ c) \lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad n - 1 < x \le n; \\ d) \lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad x \le n < x + 1. \end{array}$$

СВОЙСТВО 6.

$$\begin{array}{c} (\forall x \in R)\ (\forall n \in Z)\ (\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \quad \text{и} \\ \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n, \end{array}$$

то есть целочисленное слагаемое можно выносить и вносить за скобки функций «пол» и «потолок».

СВОЙСТВО 7.

$$\begin{array}{l} (\forall x \in R)\ (\forall n \in Z): \\ a)\ x < n \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor < n; \\ b)\ n < x \quad \Leftrightarrow \quad n < \lceil x \rceil; \\ c)\ x \le n \quad \Leftrightarrow \quad \lceil x \rceil \le n; \\ d)\ n \le x \quad \Leftrightarrow \quad n \le \lfloor x \rfloor. \end{array}$$

Эти неравенства позволяют вставлять или опускать скобки функций «пол» и «потолок».

СВОЙСТВО 8.

$$\begin{array}{l} (\forall x \in R) \\ \lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor; \\ \lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil \lceil x \rceil \rceil = \lceil x \rceil. \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разность между числом $x$ и функцией $\lfloor x \rfloor$ называется *дробной частью* числа $x$ и обозначается

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

СВОЙСТВО 9. Пусть $f(x)$ – некоторая непрерывная, монотонно возрастающая функция, такая, что если $f(x)$ – целое число, то $x$ - тоже целое число. Тогда:

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \quad (1);$$
$$\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil \quad (2).$$

Следствием этого свойства является следующее свойство.

СВОЙСТВО 10.

$$(\forall x \in R)\ (\forall m \in Z)\ (\forall n \in N)$$
$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad (1);$$
$$\left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil \quad (2).$$

СВОЙСТВО 11. Пусть $\alpha$ и $\beta$ - произвольные действительные числа. Количество заключенных между ними целых чисел равно:

$$a)\ на\quad [\alpha,\beta]:\ \lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1,\quad \alpha \le \beta;$$
$$b)\ на\quad [\alpha,\beta):\ \lceil \beta \rceil - \lceil \alpha \rceil,\quad \alpha \le \beta;$$
$$c)\ на\quad (\alpha,\beta]:\ \lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor,\quad \alpha \le \beta;$$
$$d)\ на\quad (\alpha,\beta):\ \lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor,\quad \alpha < \beta.$$

***Функция mod и ее свойства***

Если $m, n$- целые числа, то частное от деления $n$ на $m$ равно значению функции «пол» от рационального числа $\frac{n}{m}$, то есть, равно $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$. Используя запись деления с остатком:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot q + r,$$

где $r$ есть остаток от деления. Для обозначения остатка используют специальную функцию $r = n \operatorname{mod} m$. Читается как «$r$ есть остаток от деления $n$ на $m$»:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot m + n \operatorname{mod} m \qquad (1).$$

Из (1) следует, что $n \operatorname{mod} m = n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot m \qquad (2).$

В выражении (2) можно считать $n$ и $m$ любыми действительными числами, $m \ne 0$.

Отметим некоторые свойства функции mod.

СВОЙСТВО 1.

$$(\forall x, y \in R)$$
$$0 \le x \operatorname{mod} y < y,\quad если\quad y > 0;$$
$$y < x \operatorname{mod} y \le 0,\quad если\quad y < 0.$$

СВОЙСТВО 2.

$$(\forall x \in R)\ (x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + x \operatorname{mod} 1.$$

СВОЙСТВО 3.

$$(\forall x \in R)\ (\forall y \ne 0 \in R)\ (\forall C = const, C \ne 0)$$
$$C \cdot (x \operatorname{mod} y) = (Cx) \operatorname{mod} (Cy).$$

СВОЙСТВО 4.

$$(\forall n \in Z)\ (\forall m \in N)$$

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n-(m-1)}{m} \right\rceil \quad и$$

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor.$$

СВОЙСТВО 5.

$$(\forall x \in R)\ (\forall m \in N)$$

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor.$$

### *2. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля*

Бином или двучлен Ньютона – это формула, которая позволяет находить коэффициенты при степенях $x^k y^{n-k}$ при возведении двучлена $(x+y)$ в степень с показателем $n$. Эти коэффициенты получили название *биномиальных.* Коэффициент при одночлене $x^k y^{n-k}$ принято обозначать:

$$\binom{n}{k} \quad или \quad C_n^k$$

и читать: «количество элементов из $n$ по $k$».

ЗАМЕЧАНИЕ. В комбинаторике символы $\binom{n}{k}$ *или* $C_n^k$ используют для обозначения числа сочетаний из $n$ элементов по $k$

ТЕОРЕМА 1. Количество элементов (число сочетаний) из $n$ по $k$ вычисляется по формулам:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-(k-1))}{k!} \qquad (1)$$

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad (2).$$

Доказательство.

Установим, сколькими способами можно выбрать $k$ элементов из $n$ данных без учета порядка их следования. Первый элемент из $n$ возможных, очевидно, можно выбрать $n$ способами, второй из $(n-1)$ оставшихся - $(n-1)$-м способом и т.д., $k$-й элемент – $(n-(k-1))$-м способом. Всего получается $n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-(k-1))$ последовательность длиной $k$. Так как $k$ выбираемых элементов можно упорядочить $k!$ способами, то среди этих последовательностей каждая перестановка $k$ элементов встречается ровно $k!$ раз. Чтобы получить число элементов (сочетаний) из $n$ по $k$, осталось поделить общее число последовательностей на $k!$:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-(k-1))}{k!}$$ - получили формулу (1).

Для получения второй формулы, достаточно умножить числитель и знаменатель дроби, записанной в правой части формулы (1) на $(n-k)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-k)$.

Приведем несколько начальных значений биномиальных коэффициентов, которые образуют так называемый треугольник Паскаля.

| n | $C_n^0$ | $C_n^1$ | $C_n^2$ | $C_n^3$ | $C_n^4$ | $C_n^5$ | $C_n^6$ | $C_n^7$ | $C_n^8$ | $C_n^9$ | $C_n^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **2** | **1** | **2** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **3** | **1** | **3** | **3** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | **1** | **4** | **6** | **4** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **5** | **1** | **5** | **10** | **10** | **5** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **6** | **1** | **6** | **15** | **20** | **15** | **6** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **7** | **1** | **7** | **21** | **35** | **35** | **21** | **7** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| **8** | **1** | **8** | **28** | **56** | **70** | **56** | **28** | **8** | **1** | **0** | **0** |
| **9** | **1** | **9** | **36** | **84** | **126** | **126** | **84** | **36** | **9** | **1** | **0** |
| **10** | **1** | **10** | **45** | **120** | **210** | **252** | **210** | **120** | **45** | **10** | **1** |

Итак, бином Ньютона в общем случае выражается формулой:

$$(x+y)^n = \sum_k C_n^k x^k y^{n-k} \quad \textit{или}$$

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (3)$$

Важную роль во многих приложениях играет частный случай бинома, когда $y=1$, а $x=z$ – произвольное комплексное число, $|z|<1$:

$$(1+z)^n = \sum_k \binom{n}{k} z^k = \sum_k C_n^k z^k \qquad (4).$$

## Тема 3. Введение в асимптотические методы

### *План темы*

1. *Символ $O$ и основные правила его использования.*
2. *Асимптотические решения рекуррентных соотношений*.

***Определение 1:***

$f(n) = O(g(n))$для всех $n \in N$ (1.1.1)

означает, что существует такая константа *C*, что

$|f(n)| \le C|g(n)|$ для всех $n \in N$; (1.1.2)

а если обозначение $O(g(n))$ использовано внутри формулы, то оно обозначает функцию $f(n)$, удовлетворяющую (1.1.2). Значения функции $f(n)$ неизвестны, но мы знаем, что они не слишком велики.

Символ «*O*» включает неопределенную константу *C*, каждое вхождение *O* может подразумевать различные *C*, но каждая из этих констант не зависит от *n*.

***Пример 1:*** мы знаем, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Можно записать $S_n = O(n^3)$,

так как $\left|\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right| \le \frac{1}{3}|n|^3 + \frac{1}{2}|n|^2 + \frac{1}{6}|n| \le \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^3| + \frac{1}{6}|n^3| = |n^3|$ для всех целых *n*.

Можно получить более точную формулу

$S_n = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$, так как

$\left|\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right| \le \frac{1}{3}|n|^3 + \frac{1}{2}|n|^2 + \frac{1}{6}|n| \le \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^2| + \frac{1}{6}|n^2| \le \frac{1}{3}|n^3| + |n^2|$ для всех целых *n*.

Можно также небрежно отбросить часть информации и записать $\square_n = O(n^{10})$. Определение *O* не заставляет нас давать наилучшую оценку.

***Определение 2:*** соотношение $f(n) = O(g(n))$ при $n\to\infty$ означает, что существуют две константы *C* и $n_0$, такие, что

$|f(n)| \le C|g(n)|$ при всех $n \ge n_0$. (1.1.3)

Замечание 1: Значения $C$ и $n_0$ могут быть разными для разных $O$, но они не зависят от $n$.

***Определение 3:*** запись $f(x) = O(g(x))$ при $x \to 0$ означает, что существуют две константы $C$ и $\varepsilon$, такие, что

$$|f(x)| \le C|g(x)|, \qquad \text{если только } |x| \le \varepsilon . \qquad (1.1.4)$$

Теперь $O$ представляет неопределенную функцию и одну или две неопределенные константы, зависящие от контекста.

Замечание 2: запись $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = O(n^3)$ корректна, но в этом равенстве нельзя менять местами правую и левую части. В противном случае мы можем прийти к нелепым выводам, наподобие $n = n^2$, исходя из верных тождеств $n = O(n^2)$ и $n^2 = O(n^2)$.

Работая с символом «$O$» мы имеем дело с односторонними равенствами. Правая часть уравнения содержит не больше информации, чем левая, и фактически может содержать меньше информации; правая часть является «огрублением» левой.

Если говорить строго формально, то запись $O(g(n))$ обозначает не какую-то одну функцию $f(n)$, а сразу множество функций $f(n)$, таких, что $|f(n)| \le C|g(n)|$ для некоторой константы $C$. Обычная формула $g(n)$, не включающая символ $O$, обозначает множество, содержащее одну функцию $f(n) = g(n)$. Если $S$ и $T$ суть множества функций от $n$, то запись $S + T$ обозначает множество всех функций вида $f(n) + g(n)$, где $f(n) \in S$ и $g(n) \in T$; другие обозначения вроде $S - T$, $ST$, $S/T$, $\sqrt{S}$, $e^S$, $\ln S$ определяются аналогично. Тогда «равенство» между двумя такими множествами функций есть теоретико-множественное включение; знак «=» в действительности означает «$\subseteq$».

***Пример 3:*** «Уравнение» $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2) = O(n^3)$ означает, что $S_1 \subseteq S_2$, где $S_1$ есть множество всех функций вида $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$, для которых найдется константа $C_1$, такая, что $|f_1(n)| \le C_1|n^2|$, а $S_2$ есть множество всех функций $f_2(n)$, для которых найдется константа $C_2$, такая, что $|f_2(n)| \le C_2|n^3|$.

Можно строго доказать это «равенство», если взять произвольный элемент из левой части и показать, что он принадлежит правой части: пусть $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$ таково, что $|f_1(n)| \le C_1|n^2|$, следует доказать, что существует такая константа $C_2$, что $\left|\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)\right| \le C_2|n^3|$. Константа $C_2 = \frac{1}{3} + C_1$ решает проблему, так как $n^2 \le |n^3|$ для всех целых $n$.

Замечание 3: Если в формуле используется несколько переменных, то символ $O$ представляет множество функций от двух или более переменных, а не только от одной. В область определения каждой функции входят все переменные, которые в данном контексте «свободны» для изменения.

Тут есть некоторая тонкость ввиду того, что переменные могут иметь смысл лишь в части выражения, если они связаны знаком $\Sigma$ или подобным.

***Соотношение 1:*** $n^m = O(n^{m'})$, *если* $m \le m'$; $m, m', n \in N$. (1.2.1)

*Доказательство*:

Пусть $m \le m'$, тогда $\left|n^m\right| \le \left|n^{m'}\right|$ по свойству степени и модуля. $\left|n^m\right| \le C\left|n^{m'}\right|$, где $C = 1$. А по определению (1.1.2) символа $O$ это и означает, что $n^m = O(n^{m'})$, при

$m \le m'$; $m, m', n \in N$ . Соотношение 1 доказано.

***Соотношение 2:*** $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$. (1.2.2)

*Доказательство*:

Покажем строго в соответствии с теоретико-множественным определением символа *O*, что левая часть является подмножеством правой части.

Любая функция из левой части имеет вид *a(n)* + *b(n)*, и существуют константы $m_0$, *B*, $n_0$, *C*, такие, что

$$|a(n)| \le B|f(n)| \quad \forall n \ge m_0 \qquad \text{и} \qquad |b(n)| \le C|g(n)| \quad \forall n \ge n_0 .$$

Следовательно, функция в левой части

$$|a(n) + b(n)| \le |a(n)| + |b(n)| \le B|f(n)| + C|g(n)| \le \max(B, C) \cdot (|f(n)| + |g(n)|)$$

$$\text{для} \quad n \ge \max(m_0, n_0)$$

А, значит, по определению символа *O* левая часть принадлежит правой части.

***Соотношение 3:*** *f(n) = O(f(n))*; (1.2.3)

*Доказательство:*

Для любой функции *f(n)* верно неравенство $|f(n)| \le |f(n)|$. $|f(n)| \le C|f(n)|$, где *C* = 1. По определению символа *O* (1.1.2) это и означает, что *f*(*n*) = O(*f*(*n*)). Соотношение 3 доказано.

***Соотношение 4:*** *O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))*; (1.2.4)

***Соотношение 5:*** *O(O(f(n))) = O(f(n))*; (1.2.5)

***Соотношение 6:*** *C · O(f(n)) = O(f(n)), если C – константа;* (1.2.6)

*Доказательство*:

Существует такая константа *B*, что $|C| \le B \cdot 1$, по определению (1.1.1) *C* = *O*(1). Тогда *C · O(f(n))* = *O*(1) *· O(f(n))* = (по 1.2.4) = *O(f(n)).*

***Соотношение 7:*** *O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n)).* (1.2.7)

*Доказательство:*

Покажем, что левая часть является подмножеством правой части.

В левой части функции имеют вид *a*(*n*), такие, что существуют константы *C*, $n_0$, что

$$|a(n)| \le C|f(n) \cdot g(n)| \le C|f(n)| \cdot |g(n)| = |f(n)| \cdot C \cdot |g(n)| \quad \forall n \ge n_0 .$$

По определению символа *O* мы получаем верное равенство (1.2.7).

***Соотношение 8:*** $O(f(n)^2) = O(f(n))^2$. (1.2.8)

*Доказательство:*

$O(f(n)^2) = O(f(n) \cdot f(n))$ = (по 1.2.7) = $f(n) \cdot O(f(n))$ = (по 1.2.3) = $O(f(n)) \cdot O(f(n)) = O(f(n))^2$

## 2. Асимптотические решения рекуррентных соотношений

В таблице 1 приведены самые полезные асимптотические формулы [2], половина из которых получена просто путем отбрасывания членов степенного ряда в соответствии с этим правилом.

Таблица 1. Асимптотические аппроксимации, справедливые при n $\to \infty$ и z $\to 0$

| | |
|---|---|
| $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ | (1.2.10) |
| $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$ | (1.2.11) |

| | |
|---|---|
| $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5)$ | (1.2.12) |
| $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + O(z^5)$ | (1.2.13) |
| $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + O(z^5)$ | (1.2.14) |
| $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + C_\alpha^2 z^2 + C_\alpha^3 z^3 + C_\alpha^4 z^4 + O(z^5)$ | (1.2.15) |

Асимптотические формулы для $H_n$, $n!$ не являются начальными отрезками сходящихся рядов; если неограниченно продолжить эти формулы, то полученные ряды будут расходиться при всех $n$.

Говорят, что асимптотическая аппроксимация имеет абсолютную погрешность $O(g(n))$, если она имеет вид $f(n) + O(g(n))$, где $f(n)$ не включает $O$. Аппроксимация вида $f(n)(1 + O(g(n)))$ имеет относительную погрешность $O(g(n))$, если $f(n)$ не включает $O$. Например, аппроксимация $H_n$ в таблице №1 имеет абсолютную погрешность $O(n^{-6})$; аппроксимация $n!$ - относительную погрешность $O(n^{-4})$. (Правая часть (1.2.11) не такая, как требуется, - $f(n)(1 + O(n^{-4}))$, но ее можно переписать как

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}\right)\left(1+O\left(n^{-4}\right)\right).$$

Абсолютная погрешность этой аппроксимации есть $O(n^{n-3.5}e^{-n})$. Абсолютная погрешность соотносится с числом верных десятичных цифр справа от десятичной точки, которые сохраняются после отбрасывания члена $O$; относительная погрешность связана с числом верных «значащих цифр».

## Тема 4. Основные комбинаторные конфигурации

***План темы***

1. *Основные тождества с биномиальными коэффициентами.*
2. *Метод включения-исключения и его применения.*

***1. Основные тождества с биномиальными коэффициентами***

Отметим некоторые важные свойства биномиальных коэффициентов.

СВОЙСТВО 1. *(Соотношение симметрии)*

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad \text{или} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad n \in Z^+, k \in Z.$$

Доказательство получается непосредственной проверкой при подстановке соответствующих индексов в формулы (1) или (2).

СВОЙСТВО 2 *(Правило внесения)*

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1} \qquad \text{или} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}, \qquad k \neq 0, k \in Z.$$

Доказательство также получается непосредственной проверкой при подстановке соответствующих индексов в формулы (1) или (2).

СВОЙСТВО 3

$$k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1} \qquad \text{или} \qquad k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}, \qquad \text{или}$$

$$(n-k) \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^k \qquad \text{или} \qquad (n-k) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k} k \neq 0, k \in Z.$$

Эти равенства следуют из свойства 2.

СВОЙСТВО 4 *(Формула сложения)*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad \text{или}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Доказательство.

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} =$$
$$= \frac{(n-1)! \cdot ((n-1)-(k-1)) + (n-1)! \cdot k}{k! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} =$$
$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k.$$

СВОЙСТВО 5 *(Выражение одного биномиального коэффициента в виде суммы других)*

$$\sum_{k \le n} C_{m+k}^k = C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^n \qquad \text{или}$$

$$\sum_{k \le n} \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}.$$

Частным случаем является *формула суммирования по верхнему индексу:*

$$\sum_{0 \le k \le n} C_m^k = C_m^0 + C_m^1 + \cdots + C_m^n = C_{m+1}^{n+1} \qquad \text{или}$$

$$\sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad m, n \in Z^+.$$

СВОЙСТВО 6 (*Правило обращения верхнего индекса)*

$$C_n^k = (-1)^k \cdot C_{k-n-1}^k \qquad \text{или}$$
$$\binom{n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k-n-1}{k}, \quad k \in Z.$$

Доказательство.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!} =$$
$$= \frac{(-1)^k \cdot (-n)(1-n)\cdots(k-n-1)}{k!} = (-1)^k \cdot C_{k-n-1}^k.$$

СВОЙСТВО 7

$$(-1)^m \cdot C_{-n-1}^m = (-1)^n \cdot C_{-m-1}^n \qquad \text{или}$$
$$(-1)^m \cdot \binom{-n-1}{m} = (-1)^n \cdot \binom{-m-1}{n}, \quad m, n \ge 0, \quad m, n \in Z.$$

Это свойство позволяет перемещать индексы из верхней строки в нижнюю и наоборот и является непосредственным следствием свойства обращения верхнего индекса. Еще одним следствием этого же свойства является формула:

$$\sum_{k \le m} (-1)^k \cdot C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^m \cdot C_n^m = (-1)^m \cdot C_{n-1}^m \qquad \text{или}$$

$$\sum_{k \le m} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^m \cdot \binom{n}{m} = (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m}.$$

СВОЙСТВО 8 *(Формула умножения биномиальных коэффициентов)*

$$C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} \qquad \text{или}$$

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}, \quad m,k \in Z.$$

<u>Доказательство.</u>

$$C_n^m \cdot C_m^k = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!((n-k)-(m-k))!} =$$

$$= C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}.$$

<u>СВОЙСТВО 9</u> *(Свертка Вандермонда)*

$$\sum_k C_m^k \cdot C_s^{n-k} = C_{m+s}^n \qquad \text{или}$$

$$\sum_k \binom{m}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{m+s}{n}.$$

<u>СВОЙСТВО 10</u> *(Некоторые полезные формулы преобразования сумм произведений биномиальных коэффициентов)*

$$a) \sum_k C_n^{m+k} \cdot C_s^{r-k} = C_{n+s}^{m+r} \quad \text{или} \quad \sum_k \binom{n}{m+k} \cdot \binom{s}{r-k} = \binom{n+s}{m+r}, m,n \in Z;$$

$$b) \sum_k C_l^{m+k} \cdot C_s^{n+k} = C_{l+s}^{l-m+n} \quad \text{или} \quad \sum_k \binom{l}{m+k} \cdot \binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}, l \in Z+, m,n \in Z;$$

$$c) \sum_k (-1)^k \cdot C_l^{m+k} \cdot C_{s+k}^n = (-1)^{l+m} \cdot C_{s-m}^{n-l}, \quad l \in Z^+, m,n \in Z$$

$$\text{или} \quad \sum_{л} (-1)^{л} \cdot \binom{l}{m+k} \cdot \binom{s+k}{n} = (-1)^{l+m} \cdot \binom{s-m}{n-l};$$

$$d) \sum_{k \le l} (-1)^k \cdot C_{l-k}^m \cdot C_s^{k-n} = (-1)^{l+m} \cdot C_{s-m-1}^{l-m-n}, \quad l,m,n \in Z^+$$

$$\text{или} \quad \sum_{л \le д} (-1)^k \cdot \binom{l-k}{m} \cdot \binom{s}{k-n} = (-1)^{l+m} \cdot \binom{s-m-1}{l-m-n};$$

$$e) \sum_{0 \le k \le l} C_{l-k}^m \cdot C_{q+k}^n = C_{l+q+1}^{m+n+1} \quad \text{или} \quad \sum_{0 \le k \le l} \binom{l-k}{m} \cdot \binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1},$$

$$l,m,n,q \in Z^+.$$

### *2. Метод включения-исключения и его применения*

$$\sum_k C_m^k \cdot C_s^{n-k} = C_{m+s}^n$$

Формула включений-исключений – это комбинаторная формула, позволяющая найти мощность объединения конечного числа конечных множеств с учётом того, что множества могут пересекаться друг с другом.

Для случая двух множеств $A$ и $B$ формула включений-исключений имеет вид:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{5}$$

В сумму $|A| + |B|$ элементы, принадлежащие множествам $A$ и $B$, одновременно включены дважды, и чтобы компенсировать это, необходимо вычесть их из правой части формулы.

Таким же образом поступают и в случае любого конечного числа множеств. Сначала в объединение этих множеств включают все элементы, в том числе принадлежащие сразу нескольким множествам, затем исключают включённые лишний раз, исключают включённые ошибочно и т.д. Отсюда происходит и название самой формулы. Сама формула для случая $n$ множеств имеет вид:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|, \tag{6}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества.

Впервые эту формулу опубликовал португальский математик Даниэль да Сильва в 1854 г. Но ещё в 1713 г. Николай Бернулли использовал этот метод для решения так называемой задачи о встречах. В теории вероятностей аналог этой формулы известен как принцип Пуанкаре.

Приведём вариант записи этой формулы в терминах свойств.

Пусть имеется $N$ предметов и $n$ свойств $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Каждый из предметов может как обладать, так и не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ количество элементов, обладающих свойствами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а через $N(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$ – количество элементов, не обладающих ни одним из свойств $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда справедлива формула:

$$N(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n) = N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \cdots + (-1)^{n-1} N(a_1 a_2 \ldots a_n) \tag{7}$$

## Тема 5. Основные понятия теории графов

### *План темы*

*1. Понятие графа. Способы представления графов.*

*2. Маршруты, пути, цепи и циклы. Изоморфизм графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы.*

*3. Деревья. Планарные и плоские графы. Теорема Эйлера и её следствия.*

*4. Раскраска вершин и ребер графа. Хроматическое число.*

*5. Раскрашиваемость вершин планарного графа пятью красками. Гипотеза четырех красок.*

### *1. Понятие графа. Способы представления графов*

**Определение.** Пусть $V$ – непустое множество, $V^2$ – множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара $(V, E)$, где $E$ – произвольное подмножество множества $V^2$, называется *графом* (неориентированным графом).

Элементы множества $V$ называются *вершинами* графа, а элементы множества $E$ – *ребрами.*

Будем рассматривать в дальнейшем только такие графы, у которых число вершин конечно.

Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г., хотя начальные задачи теории графов восходят еще к Эйлеру (XVIII в.).

Множества вершин и ребер графа $G$ обозначаются соответственно $V_G$ и $E_G$. Число вершин графа $G$ называется его *порядком* и обозначается $|G|$.

Если |$|V_G| = n, \quad |E_G| = m$ G|, то граф называют $(n,m)$ - *графом*.

**Определение.** 1. Вершины $u$ и $v$ графа $G$ называются *смежными*, если пара $(u,v)$ является ребром, и *не смежными* в противном случае.

Если $e = (u,v)$ – ребро, то вершины $u$ и $v$ называют его *концами*. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

2. Вершина $v$ и ребро $e$ называются *инцидентными,* если $v$ является одним из концов ребра $e$, и *не инцидентными* в противном случае.

Таким образом, отношение смежности задается между однородными элементами графа, а отношение инцидентности - между разнородными элементами.

**Определение.** Множество всех вершин графа $G$, смежных с некоторой вершиной $v$, называется *окружением вершины v* и обозначается $N(v)$. Число вершин в окружении вершины $v$ называется *степенью* этой вершины.

Можно также сказать, что степень вершины – это число инцидентных ей ребер. Если степень вершины $v$ равна $k$, то это обозначается следующим образом: $\deg(v) = k$.

**Определение.** Вершина степени 0 называется *изолированной*, вершина степени 1 – *висячей (или концевой)*. Ребро, инцидентное концевой вершине также называется *концевым*.

**Теорема.** Сумма степеней всех вершин графа есть число, равное удвоенному числу ребер.

**Следствие (***Лемма о рукопожатиях).* В любом графе число вершин нечетной степени четно.

**Определение.**

1. Граф называется *регулярным (или однородным)*, если степени всех его вершин равны.

2. *Степенью* регулярного графа называется степень его вершин. Степень регулярного графа G обозначается через $\deg(G)$.

**Определение.** 1. Граф G называется *полным*, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка $n$ обозначается $K_n$.

2. Граф называется *вырожденным (пустым)*, если любые две его вершины не смежны (т.е. у него нет ребер).

Графы допускают наглядное изображение в виде рисунков. При этом вершины графа изображаются точками на плоскости, а ребра графа - соединяющими их линиями.

**Примеры.**

1. Рассмотрим (5, 6) – граф $G$, множества вершин и ребер которого есть:

$$V_G = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E_G = \{(1,2); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5)\ (4,5)\}$$

и изобразим его графически:

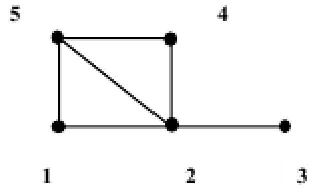



**Рис.** $G$

Смежными вершинами графа $G$ будут, например, вершины 1 и 2 или 1 и 5; несмежными – вершины 1 и 3 или вершины 1 и 4.

Вершина 4 и ребро (2,4) будут инцидентны, а вершина 4 и ребро (2,3) – не инцидентны.

Окружением вершины 2 является множество $N(2)=\{1,3,4,5\}$ и, следовательно, степень этой вершины равна 4: $\deg(2)=4$.

Изолированных вершин граф $G$ не имеет, вершина 3 является висячей или концевой.

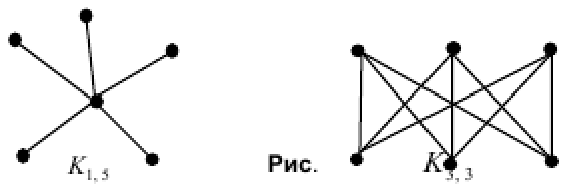
Так как граф $G$ имеет пары несмежных вершин, то он не является полным.

**Определение.** Граф называется *двудольным,* если существует такое разбиение множества его вершин на две части – *доли,* что концы каждого ребра принадлежат разным долям.

Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется *полным двудольным.*

Аналогично можно дать определение $k$*-дольного графа.*

Полный двудольный граф, доли которого содержат $p$ и $q$ вершин соответственно, обозначается $K_{p,q}$. При $p=1$ получаем граф $K_{1,q}$, который называют *звездой.*




$K_{1,5}$ **Рис**. 2 $K_{3,3}$

С каждым графом связаны две матрицы, которые полностью его определяют: *матрица смежности* $S$ и *матрица инцидентности* $I$.

**Определение.** *Матрицей смежности* $(n,m)$-графа $G$ называется матрица $A$ порядка $n$ следующего вида:

$$S=(s_{ij})=\begin{cases}1, & \text{если вершины с номерами } i \text{ и } j \text{ смежны};\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно, что матрица смежности – это симметричная матрица с нулями на главной диагонали. Число единиц в каждой строке равно степени соответствующей вершины.

Аналогично можно определить матрицы смежности $S$ мульти- и псевдографов:

$$S=(s_{ij})=\begin{cases}k, & \text{если вершины с номерами } i \text{ и } j \text{ соединены } k \text{ ребрами};\\ 0, & \text{если они не смежны.}\end{cases}$$

Следует заметить, что при этом петля означает два ребра.

Можно определить и матрицу смежности ориентированного графа:

$$S = (s_{ij}) = \begin{cases} +1, \textit{ если вершины с номерами } i \textit{ и } j \textit{ смежны, причем вершина } i \\ \textit{есть начало, а вершина } j \textit{ – конец ребра;} \\ -1, \textit{ если вершины с номерами } i \textit{ и } j \textit{ смежны, причем вершина } i \\ \textit{есть конец, а вершина } j \textit{ – начало ребра;} \\ 0, \textit{ если они не смежны.} \end{cases}$$

**Определение.** *Матрицей инцидентности* $(n,m)$-графа $G$ называется матрица $I$ размерности $n \times m$ следующего вида:

$$I = (x_{ij}) = \begin{cases} 1, \textit{ если вершина с номероми } i \textit{ инцидентна ребру} \\ \textit{с номером } j \textit{;} \\ 0 \quad \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы построить матрицу инцидентности, ребра графа нужно перенумеровать (в произвольном порядке).

В каждом столбце матрицы инцидентности ровно две единицы, равных столбцов нет. Число единиц в каждой строке равно степени соответствующей вершины.

***2. Маршруты, пути, цепи и циклы. Изоморфизм графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы***

**Определения.**

1. Чередующаяся последовательность

$$v_1, l_1, v_2, l_2, \ldots, v_i, l_i, v_{i+1}, \ldots, l_n, v_{n+1} \qquad (1)$$

вершин и ребер графа $G$ такая, что $l_i = (v_i, v_{i+1}),\ i \in \overline{1,n}$, называется *маршрутом,* соединяющим вершины $v_i$ и $v_{i+1}$ или $(v_i, v_{i+1})$ *маршрутом*.

Очевидно, что для задания маршрута в графе достаточно задать последовательность его вершин, либо последовательность его ребер.

2. Вершина $v$ называется *достижимой* из вершины $u$, если существует $(u,v)$-маршрут. Любая вершина считается достижимой из себя самой.

3. Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

4. Маршрут называется *циклическим*, если первая и последняя его вершины совпадают: $v_1 = v_{n+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь – *простым циклом.* Число ребер в маршруте называется его *длиной*.

5. Цикл длины 3 называют *треугольником*. Минимальная из длин циклов графа называется его *обхватом*.

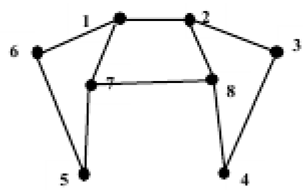



**Рис. 3. Граф G**

Например, в графе G на рис.  последовательность 5, (5,6), 6, (6,1), 1, (1,2), 2 является (4,1)-маршрутом. Очевидно, что любой маршрут может быть задан просто как последовательность вершин: 5, 6, 1, 2 или просто как последовательность ребер: (5,6), (6,1), (1,2). Любая вершина графа G достижима из любой другой вершины, поскольку граф связный.

Приведенный в качестве примера маршрут является также цепью и простой цепью.

Маршрут 1, 2, 8, 7 представляет собой цикл длины 4, причем этот цикл простой. Обхват графа G, как видно из рисунка, равен 4.

**Определение.** Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Очевидно, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы в нем для какой-либо фиксированной вершины $u$ и каждой другой вершины $v$ существовал $(u,v)$ - маршрут.

**Теорема 1.** Граф $G=(V,E)$ связен тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества $V_1$ и $V_2$ так, чтобы обе граничные точки каждого ребра находились в одном и том же множестве.

**Определение.** Всякий максимальный связный подграф графа *G* называется *связной компонентой* (или компонентой) графа *G*.

Слово "максимальный" означает максимальный относительно включения, т.е. не содержащийся в связном подграфе с большим числом элементов. Множество вершин связной компоненты называется *областью связности*.

***Свойства маршрутов, цепей и циклов***

**СВОЙСТВО 1.** Всякий незамкнутый $(u,v)$ - маршрут, содержит в себе простую $(u,v)$- цепь. В частности, любая $(u,v)$- цепь, содержит в себе простую $(u,v)$ - цепь.

**СВОЙСТВО 2.** Всякий непростой цикл можно разбить на два или более простых. Причем для замкнутого маршрута такое утверждение не верно.

**СВОЙСТВО 3.** Всякая непростая $(u,v)$ - цепь, может быть разбита на простую $(u,v)$- цепь и один или более простых циклов. Причем для незамкнутого маршрута такое утверждение не верно.

**СВОЙСТВО 4.** Для любых трех вершин $u,v,w$ из существования $(u,w)$ - цепи их и $(w,v)$ - цепи, следует существование $(u,v)$ - цепи. Причем может не существовать $(u,v)$ - цепи, содержащей вершину $w$.

**СВОЙСТВО 5.** Объединение двух несовпадающих простых $(u,v)$ - цепей содержит простой цикл.

**СВОЙСТВО 6.** Если граф содержит 2 несовпадающих цикла с общим ребром $l$, то после удаления этого ребра граф по-прежнему содержит цикл.

Начало теории графов как раздела математики связывают с так называемой задачей о кёнигсбергских мостах. Эта знаменитая с свое время задача состоит в следующем. Семь мостов города Кёнигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как изображено на рисунке. Спрашивается, можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту?

Эйлер доказал неразрешимость задачи о кёнигсбергских мостах. В своей работе, опубликованной в 1736 году, он сформулировал и решил следующую общую проблему теории графов: при каких условиях связный граф содержит цикл, проходящий через каждое его ребро?

**ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Цепь, содержащую все ребра графа, называют *эйлеровой цепью*.

Цикл в графе называется *эйлеровы*м, если он содержит все ребра графа.

Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

**ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА.** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, кода степени всех его вершин четны.

*Доказательство.*

*Необходимость.* Пусть *G* – эйлеров граф. Эйлеров цикл этого графа, проходя через каждую его вершину, входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это означает, что каждая вершина инцидентна четному числу ребер эйлерова цикла, а поскольку такой цикл содержит все ребра графа *G*, то отсюда следует четность степеней всех его вершин.

*Достаточность.* Предположим теперь, что степени вершин графа *G* четны.

Начнем цепь *P*1 из произвольной вершины *v*1 и будем продолжать ее, насколько возможно, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени всех вершин четны, то попав в очередную отличную от *v*1 вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Поэтому цепь *P*1 можно продолжить путем добавления этого ребра. Таким образом, построение цепи *P*1 закончится в вершине *v*1, т.е. *P*1 непременно будем циклом. Если окажется, что *P*1 содержит все ребра графа *G*, то это будет требуемый эйлеров цикл. В противном случае, удалив из *G* все ребра цикла *P*1, рассмотрим граф *G*1, полученный в результате такой операции. Поскольку *P*1 и *G* имели вершины только четных степеней, то, очевидно, и *G*1 будем обладать тем же свойством. Кроме того, в силу связности графа *G* графы *P*1 и *G*1 должны иметь хотя бы одну общую вершину *v*2. Теперь, начиная с вершины *v*2, построим цикл *P*2 в графе *G*1 подобно тому, как строили цикл *P*1. Обозначим через ' 1 *P* и " 1 *P* части цикла *P*1 от *v*1 до *v*2 и от *v*2 до *v*1 соответственно. Получим новый цикл, который, начиная с *v*1, проходит по ребрам цепи ' 1 *P* до *v*2, затем обходит все ребра цикла *P*2 и, наконец, возвращается в *v*1 по ребрам цепи " 1 *P* .

Если цикл *P*3 не эйлеров, то проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл и т.д. Этот процесс закончится построением эйлерова цикла.

Теорема доказана.

**<u>ОПРЕДЕЛЕНИЯ.</u>** Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.

Сам этот цикл также называется *гамильтоновым*.

*Гамильтоновой* называют и простую цепь, содержащую каждую вершину графа.

Слово «гамильтонов» в этих определениях связано с именем известного ирландского математика У. Гамильтона, которым в 1859 году предложена следующая игра «Кругосветное путешествие». Каждой из 20 вершин додекаэдра приписано название одного из крупных городов мира. Требуется, переходя от одного города к другому по ребрам додекаэдра, посетить каждый город в точности один раз и вернуться в исходный город.

Следующие теоремы дают достаточные условия существования гамильтоновых графов.

**<u>ТЕОРЕМА.</u>** Всякий полный граф является гамильтоновым. Действительно, он содержит такой простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа. Во-вторых, если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.

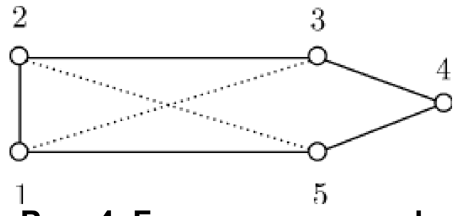



**Рис. 4. Гамильтонов граф.**

**<u>ТЕОРЕМА ХВАТАЛА.</u>** Граф со степенной последовательностью $d1 \le d2 \le \ldots \le dn$ является гамильтоновым, если для всякого *k*, удовлетворяющего неравенствам $1 \le k \le n/2$, истинна импликация

$$(dk \le k) \Rightarrow dn\text{-}k \le n-k).$$

**<u>ТЕОРЕМА ОРЕ.</u>** Если для любой пары *u* и *v* несмежных вершин графа *G* порядка $n \ge 3$ выполняется неравенство $\deg u + \deg v \ge n$, то *G* – гамильтонов граф.

Критерий же существования гамильтонова цикла в произвольном графе еще не найден. Поиск необходимого и достаточного условия для того, чтобы граф был гамильтоновым, стал одной из главных нерешенных задач теории графов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Изоморфизмом двух графов называют биекцию между множествами их вершин, сохраняющей смежность, кратности ребер, петли и направления дуг.

**ЛЕММА**

Если два графа изоморфны:

1) то они одного порядка;

2) у них одинаковое количество ребер;

3) количество вершин степени $i$ (*i*, $0 \le i \le n$, $n$ – порядок графов), у обоих графов одинаково;

4) у них совпадают обхваты;

5) у них одинаковое количество простых циклов минимальной длины.

**ТЕОРЕМА 1.** Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одинаковыми перестановками строк и столбцов.

**ТЕОРЕМА 2.** Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.

Понятия маршрута и цикла позволяют сформулировать необходимый и достаточный признак двудольности графа, а также решить ряд связанных с двудольными графами задач.

**Теорема Кёнига.** Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечётной длины.

**Следствие.** Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет простых циклов нечетной длины.

### *3. Деревья. Планарные и плоские графы. Теорема Эйлера и её следствия*

Класс деревьев занимает в теории графов особое положение. С одной стороны, это достаточно просто устроенные графы, и многие задачи, весьма сложные в общей ситуации, для деревьев решаются легко. С другой стороны, деревья часто встречаются в областях, на первый взгляд не имеющих отношения к теории графов.

Деревья открывались независимо несколько раз. Еще в прошлом веке

Г. Кирхгоф ввел деревья и применил их к исследованию электрических цепей, а А. Кэли, перечисляя изомеры насыщенных углеводородов, еще раз открыл деревья и первым исследовал их свойства. Тогда же деревья были введены и исследованы К. Жорданом как чисто математический объект.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф, не содержащий циклов, называется ациклическим (или лесом). Таким образом, компонентами леса являются деревья.

**ТЕОРЕМА.** Для ($n$, $m$)-графа $G$ следующие утверждения эквивалентны.

1) $G$ – дерево;

2) $G$ – связный граф и $m=n-1$;

3) $G$ – ациклический граф и $m=n-1$;

4) любые две несовпадающие вершины графа $G$ соединяет единственная, причем простая, цепь;

5) $G$ – ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его смежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

**ЛЕММА.** В любом графе порядка $n\geq 2$ имеется не менее двух висячих вершин.

Пусть $H$ – остовной подграф произвольного графа $G$. Если на каждой компоненте связности графа $G$ графом $H$ порождается дерево, то $H$ называется остовом (или каркасом) графа $G$. Очевидно, что в каждом графе существует остов: разрушая в каждой компоненте циклы, т.е. удаляя лишние ребра, придем к остову.

**ЛЕММА.** Число ребер произвольного графа $G$, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m(G)-|G|+k(G)$, где $m(G)$ и $k(G)$ – число ребер и число компонент графа $G$ соответственно.

Число $\gamma(G)=m(G)-|G|+k(G)$ называется цикломатическим числом графа $G$.

**ЛЕММА.** Граф $G$ является лесом тогда и только тогда, когда $\gamma(G)=0$.

**ЛЕММА.** Граф $G$ имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\gamma(G)=1$.

**ЛЕММА.** Граф, в котором число ребер не меньше, чем число вершин, содержит цикл.

**ЛЕММА.** Если в графе $G$ порядка $n\geq 3$, число висячих вершин равно числу ребер, то $G$ либо не связен, либо дерево.

***Корневые деревья***

Часто в дереве особо выделяется одна вершина, играющая роль своего рода "начала отсчета". Дерево с выделенной вершиной называют корневым деревом, а саму эту вершину – корнем. Из дерева с n вершинами можно, таким образом, образовать n различных корневых деревьев.

При графическом изображении корневого дерева обычно придерживаются какого-нибудь стандарта. Один из наиболее распространенных состоит в следующем. Возьмем на плоскости семейство параллельных прямых с равными расстояниями между соседними прямыми. Изобразим корень точкой на одной из этих прямых, смежные с корнем вершины - точками на соседней прямой, вершины, находящиеся на расстоянии 2 от корня, - на следующей, и т.д. Ребра изобразим отрезками прямых.

Ясно, что вершины на каждой прямой можно разместить так, чтобы ребра не пересекались. Пример нарисованного таким образом корневого дерева показан на рисунке (корень обведен кружком). Чаще, впрочем, дерево рисуют корнем вверх, а не вниз.

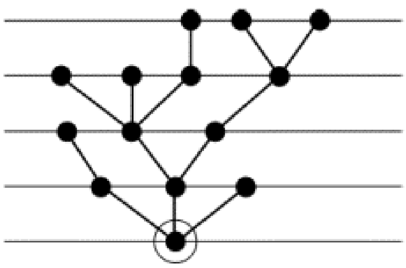


**Рис. 5. Дерево.**

Если добавить ребро, то добавляется и вершина. Таким образом, дерево с n вершинами имеет n-1 ребро.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ребра графа, принадлежащие дереву, называют ветвями, остальные ребра называют хордами.

Иногда бывает полезно ребра корневого дерева ориентировать так, чтобы в каждую вершину вел ориентированный путь из корня (для дерева на рисунке это означает, что каждое ребро ориентируется снизу вверх). Такое ориентированное корневое дерево будем называть исходящим деревом.

В исходящем дереве каждая вершина, кроме корня, является концом единственного ребра.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если в исходящем дереве имеется ребро xy, то вершину x называют *отцом* вершины y, а вершину y – *сыном* вершины x.

Естественный и для многих целей удобный способ задания корневого дерева состоит в указании для каждой вершины ее отца. При этом иногда считают, что корень приходится отцом самому себе – это равносильно добавлению петли при корне.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если в исходящем дереве T имеется ориентированный путь из вершины x в вершину y, то говорят, что x – *предок* y, а y – *потомок* x.

В частности, каждая вершина является предком и потомком самой себя. Множество всех предков вершины x порождает ориентированный путь из корня в x. Множество всех потомков вершины x порождает исходящее дерево с корнем в x, оно называется ветвью дерева T в вершине x.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Упорядоченным деревом* называется дерево, в котором поддеревья каждого узла образуют упорядоченное подмножество.

Для упорядоченных деревьев принята терминология: старший и младший сын для обозначения соответственно первого и последнего сыновей некоторого узла

**<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u>** *Высотой корневого дерева* называется эксцентриситет его корня. Если мы хотим превратить некоторое дерево в корневое и притом минимальной высоты, то в качестве корня следует взять центральную вершину.

**<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u>** *Взвешенным графом* называется пара (G, w), где G – граф, w - взаимнооднозначное отображение, которое каждому ребру l графа G сопоставляет положительное число w(l), называемое весом ребра. Сумма весов всех ребер графа G называется весом самого графа.

Задача нахождения остова минимального веса во взвешенном связном графе, возникает при проектировании линий электропередачи, трубопроводов, дорог и т.п., когда требуется заданные центры соединить некоторой системой каналов, связных либо непосредственно соединяющим их каналом, либо через другие центры и каналы, так, чтобы общая длина (или, например, стоимость) каналов связи была минимальной.

Решение этой задачи «слепым» перебором вариантов потребовало бы чрезвычайно больших вычислений даже при относительно малых *n* (можно доказать, что полный граф K*n* содержит *n*–2 различных остовных дерева).

Однако для ее решения имеются эффективные алгоритмы. Опишем два из них – алгоритмы Дж. Краскала (1956) и Р. Прима (1957), применяемые к произвольному связному графу (*G*, *w*) порядка n.

***Алгоритм Краскала***

Пусть G – связный взвешенный (n, m)-граф.

Шаг 1. Строим пустой граф $O_n$. Выбираем ребро $l_1$ минимального веса и строим граф $T_1$:

$T_1 = O_n + l_1$.

Шаг 2. Если граф $T_i$ уже построен, то строим граф $T_{i+1}$:

$T_{i+1} = T_i + l_{i+1}$, где $l_{i+1}$- ребро минимального веса из всех, не включенных в граф $T_i$, при этом необходимо следить, чтобы оно не образовывало циклов в графе $T_{i+1}$. Через n – 1 шаг остов минимального веса построен.

При этом весом остова называется суммарный вес входящих в него ребер. В общем случае остов минимального веса может быть выбран неоднозначно.

*Алгоритм Прима* отличается только тем, что сразу строится дерево, поэтому на втором шаге выбирается ребро минимального веса не из всех оставшихся, а только из тех ребер, которые в графе G были смежны с ребрами, уже включенными в дерево $T_i$.

Часто встречаются ситуации, когда важно выяснить, возможно ли нарисовать граф на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды и т.д..

Таким образом возникает понятие плоского графа.

**<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u>** *Плоским графом* называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Любой граф изоморфный плоскому графу будем называть *планарны*м.

О планарных графах говорят, что они укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку).

**ТЕОРЕМА.** Каждый граф можно уложить в трехмерном евклидовом пространстве $R^3$. Очевидно:

1) что всякий подграф планарного графа планарен;

2) граф планарен тогда и только тогда, когда каждая его связная компонента – планарный граф.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Гранью* плоского графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена кривой, не пересекающей ребра графа.

Тем самым каждая точка плоскости принадлежит хотя бы одной грани плоского графа. Границей грани будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих данной грани.

Отметим, что всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Такая грань называется внешней, а все остальные – внутренними.

**ЛЕММЫ.**

**1.** Всякий планарный граф допускает такую плоскую укладку, в которой любая выбранная вершина (ребро) графа будет принадлежать внешней грани.

**2.** Пусть граф $G$ состоит из двух компонент $H$ и $Q$, являющихся плоскими графами, и произвольным образом выбраны вершины $v1 \in VH$ и $v2 \in VQ$. Тогда граф $G'$, полученный из $G$ слиянием вершин $v1$ и $v2$ в вершину $v$, имеет плоскую укладку. При этом вершина $v$ является точкой сочленения графа $G'$.

3. Всякие две вершины, принадлежащие границе некоторой грани плоского графа, можно соединить простой цепью произвольной длины так, что выбранная грань разобьется на две грани.

4. Для любого плоского графа каждая точка плоскости, не лежащая на ребре, входит только в одну грань, а каждая точка ребра, не являющаяся вершиной, входит только в одну грань, если это ребро является мостом, и точно в две грани, если оно не мост.

**ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА.** Для всякого связного плоского графа верно равенство: $n-m+f=2$, где n – число вершин графа, $m$ – число ребер, $f$ – число граней.

**СЛЕДСТВИЯ.** **1.** Число граней любой плоской укладки связного планарного ($n$, $m$)- графа постоянно и равно $m-n+2$.

**2.** Для всякого планарного ($n$, $m$)-графа $m \leq 3n-6$ при $n \leq 3$.

**3.** Если в связном плоском ($n$, $m$)-графе граница каждой грани является r-циклом, $r \geq 3$, то $m(r-2)=r(n-2)$.

**4.** Плоский граф двусвязен тогда и только тогда, когда границей всякой его грани является простой цикл.

**5.** Связный граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок планарен.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Грань плоского графа, ограниченную циклом длины 3 называют *треугольником*.

Связный плоский граф называется *плоской триангуляцией*, если каждая его грань (в том числе и внешняя) является треугольником.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Максимальным плоским (планарным) графом* называется $n$-вершинный ($n \leq 3$) граф, который перестает быть плоским (планарным) при добавлении любого ребра.

**ТЕОРЕМА.** Граф является максимальным плоским графом тогда и только тогда, когда он представляет собой плоскую триангуляцию.

**ТЕОРЕМА ПОНТРЯГИНА–КУРАТОВСКОГО.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K5 и K3,3.

Очевидно, что если граф планарен, то любой граф, гомеоморфный ему, также является планарным.

**ОПРЕДЕЛЕНИЯ.** Пусть построена некоторая укладка подграфа *H* графа *G*. *Сегментом S* относительно *H* (иногда просто сегментом) будем называть подграф графа *G* одного их следующих двух видов:

1) связную компоненту графа *G–H*, дополненную всеми ребрами графа *G*, инцидентными вершинам взятой компоненты.

2) Вершину *v* сегмента *S* относительно *H* будем называть *контактной*, если $v \in VH$.

Поскольку граф H плоский, то он разбивает плоскость на грани.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Допустимой гранью* для сегмента S относительно H называется грань Г графа H, содержащая все контактные вершины сегмента S. Через Г(S) будем обозначать множество допустимых граней для S.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Простую цепь L сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин, назовем *$\alpha$-цепью*.

Очевидно, что всякая $\alpha$-цепь, принадлежащая сегменту, может быть уложена в любую грань, допустимую для этого сегмента.

***Алгоритм укладки графа на плоскости***

Шаг 1. Выбрать некоторый простой цикл C графа G и уложить его на плоскости; положить H=C.

Шаг 2. Найти грани графа H и сегменты относительно H. Если множество сегментов пусто, то перейти к шагу 7.

Шаг 3. Для каждого сегмента S определить множество Г(S). Если существует сегмент S, для которого $Г(S)=\emptyset$, то граф G непланарен, конец. Иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если существует сегмент S, для которого имеется единственная допустимая грань Г, то перейти к шагу 6. Иначе к шагу 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента S (Г(S)>1) выбирать произвольную допустимую грань Г.

Шаг 6. Поместить произвольную -цепь $L \in S$ в грань Г; заменить H на $H \cup L$ и прейдем к шагу 1.

Шаг 7. Построена укладка H графа G на плоскости.

***4. Раскраска вершин и ребер графа. Хроматическое число. Раскрашиваемость вершин планарного графа пятью красками. Гипотеза четырех красок.***

Возникновение гипотезы четырех красок исторически связано с раскрашиванием географических карт. Если имеется карта с изображением нескольких стран, то интересно узнать, сколько понадобится цветов для такой раскраски этих стран, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один и тот же цвет. Возможно, самая привычная форма гипотезы четырех красок такова: любую карту можно раскрасить с помощью четырех красок.

Чтобы сделать это утверждение точным, надо определить, что означает слово "карта". Поскольку в рассматриваемых нами задачах о раскраске требуется, чтобы страны, расположенные по обе стороны ребра, были разного цвета, придется исключить карты, обладающие мостом. Таким образом, удобно определить карту как связный плоский граф, не содержащий мостов. Заметим, что при таком определении карты не исключаем петель или кратных ребер.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Карта называется *k-раскрашиваемой*, если ее грани можно раскрасить k красками так, чтобы никакие две смежные грани, то есть грани, границы которых имеют общее ребро, не были одного цвета.

Там, где можно запутаться, будем использовать термин вершинно k-раскрашиваемой, имея в виду k-раскрашиваемость в описанном выше смысле. Например, изображенный ниже граф является 3-раскрашиваемым и вершинно 4-раскрашиваемым.

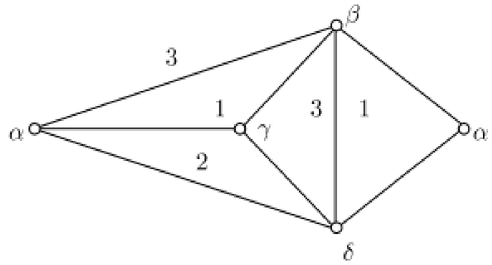



**Рис. 6. 3-раскрашиваемый граф.**

Теперь сформулируем гипотезу четырех красок для карт: всякая карта 4-раскрашиваема.

**ТЕОРЕМА.** Карта G является 2-раскрашиваемой тогда и только тогда, если G представляет собой эйлеров граф.

*Доказательство.* Любую вершину v из G должно окружать четное число граней, так как их можно раскрасить в два цвета. Отсюда следует, что степень каждой вершины четна, и поэтому G — эйлеров граф.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Жордановой кривой* или *жордановой дугой* на плоскости называется непрерывная кривая, не имеющая самопересечений; замкнутой жордановой кривой называется жорданова кривая, начало и конец которой совпадают.

Опишем метод, дающий нужную раскраску граней графа G.

Выберем произвольную грань F и окрасим ее в красный цвет. Проведем жорданову кривую из точки x грани F в некоторую точку любой грани, причем так, чтобы эта кривая не проходила ни через какую вершину графа G. Если на пути от точки x до точки y грани F' наша кривая пересечет четное число ребер, окрасим грань F' в красный цвет; в противном случае — в синий.

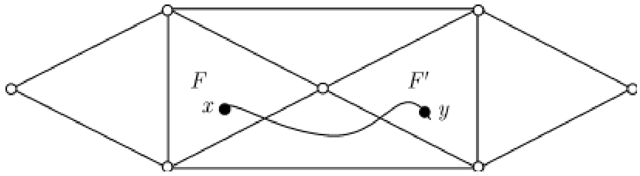



**Рис. 7. Жорданова кривая.**

Нетрудно показать, что раскрашивание определено корректно: берем "цикл", состоящий из двух таких жордановых кривых (то есть замкнутую жорданову кривую), и показываем, что он пересекает четное число ребер графа G (надо использовать индукцию по числу вершин, находящихся внутри цикла, и тот факт, что каждой вершине графа G инцидентно четное число ребер).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ .** Наименьшее число красок, необходимое для правильной раскраски графа G называется *хроматическим числом* графа G. Правильную раскраску таким числом красок будем называть *оптимальной*.

Хроматическое число обозначается через $\gamma(G)$.

Исторически понятие хроматического числа возникло с проблемой четырех красок. Проблема возникла в математике в середине 19 века. Первоначально вопрос формулировался так: сколько нужно красок для раскраски любой географической карты, при которой соседние страны раскрашены в разные цвета? Под географической картой понимается разбиение плоскости на конечное число связных областей, стран, границы которых состоят из замкнутых непрерывных линий без самопересечений, а соседними являются страны, имеющие общую границу ненулевой длины. Довольно очевидно, что четырех красок недостаточно. и вопрос формулировался обычно в более конкретном виде: достаточно ли четырех красок для раскраски любой географической карты? Это и есть проблема четырех красок. Положительный ответ на вопрос называется гипотезой четырех красок.

Проблема раскраски географических карт сводится к проблеме (правильной) раскраски плоских графов. Проиллюстрируем это сведение картой, изображенной на рисунке.

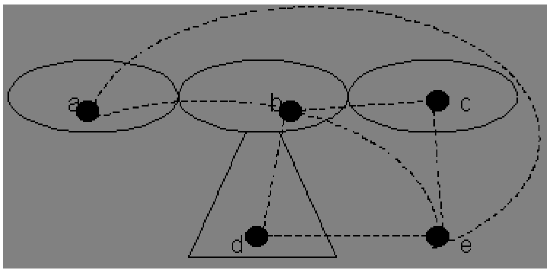



**Рис. 8. Раскраска графа.**

На рисунке изображена карта, имеющая пять стран (внешняя область - тоже страны). Внутри каждой страны зафиксируем точку, точки соединим ребром, если страны имеют общую границу. (На рисунке ребра проведены пунктирными линиями). Ребра при этом можно провести так, чтобы они не пересекались, т.е. чтобы полученный граф был плоским. Ясно, что раскраска карты определяет правильную раскраску графа и обратно. Проблему четырех красок можно теперь сформулировать так: достаточно ли четырех красок для правильной раскраски плоского графа?

Эта проблема вызвала большой интерес в математике. Есть свидетельства, что ей занимались известные математики Мебиус и де Морган. В 1880 году А. Компе опубликовал положительное решение проблемы четырех красок. Однако в 1890 году Р. Хивуд обнаружил ошибку в этом доказательстве.

Одновременно он показал, что пяти красок достаточно для раскраски любого плоского графа. После этого появлялось довольно много «доказательств» гипотезы четырех красок и «контрпримеров» к ней, в которых обнаруживались ошибки. В 1969 году Х. Хели свел проблему четырех красок к исследованию множества С так называемых конфигураций. Множество с является конечным. Но довольно большим (порядка нескольких тысяч). Несколькими годами позже, в 1976 году математикам К. Аппелю и В. Хейкену удалось показать. Что все конфигурации из множества С можно правильно раскрасить в четыре цвета. В возникающем при этом переборе существенно использовался компьютер. Такое решение проблемы четырех красок долгое время не признавалось многими математиками, поскольку его сложно повторить. Однако сейчас практически общепризнано, что К. Аппелем и В. Хейкеном доказана гипотеза четырех красок.

Рассмотрим примеры графов, изображенных на рисунке 9.

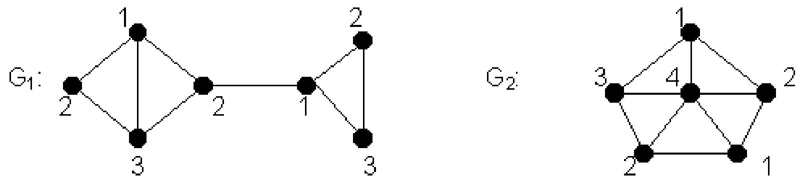



**Рис. 9. Компоненты связности графов.**

Оба графа содержат трехэлементный полный подграф К3, поэтому для правильной раскраски необходимо, по крайней мере, три краски. Для графа G1 этого достаточно. Граф G2 имеет цикл длины 5. Нетрудно понять, что для правильной раскраски вершин цикла необходимо три краски. Но центральная вершина графа G2 смежна со всеми вершинами цикла, поэтому для правильной раскраски графа понадобится четвертая краска. Итак, $\gamma(G1)=3$ и $\gamma(G2)=4$.

Очевидно, что если компоненты связности графа G правильно раскрасить k красками, то и сам граф окажется правильно раскрашенным этими красками. Отсюда следует, что если $G1,G2,\ldots,G\gamma$ – (все) компоненты связности графа G, то

$$c(G)=\max\{\gamma\ (G1),\ \gamma\ (G2),\ldots,\ \gamma\ (Gc)\}.$$

Оказывается, что аналогичное утверждение справедливо и для компонент двусвязности.

**ТЕОРЕМА.** Пусть любой блок графа G можно правильно раскрасить k красками. Тогда и сам граф G можно правильно раскрасить k красками.

*Доказательство* проведем индукцией по числу блоков. Можно считать, что G – связный граф.

Если граф содержит один блок, то утверждение теоремы, очевидно, справедливо. Предположим, что теорема справедлива для любых графов, имеющих не более k блоков. Пусть граф G имеет k+1 блок. Зафиксируем один из концевых блоков графа G. Этот блок обозначим через B, а объединение остальных блоков – через B' . Графы B и B' имеют точно одну общую вершину a (которая является точкой сочленения графа G). По предположению индукции графы B и B' можно правильно раскрасить k красками. Если вершина a в обоих графах B и B' окрашена одинаково, то в результате получаем правильную раскраску графа G. Если вершина a в графах B и B' окрашена по-разному, то очевидным образом перекрашиваем граф B так, чтобы новая краска вершины a совпадала с краской этой вершины в графе B'.

Приведем примеры задач, которые сводятся к нахождению хроматического числа и соответствующей оптимальной раскраски.

*Задача составления расписаний*.

Предположим, что в учебном центре надо провести несколько занятий за кратчайшее время. Длительность всех занятий одинакова, скажем, один час. Некоторые занятия не могут проводиться одновременно, например, это занятия в одной и той же учебной группе (по разным предметам), или занятия проводит один и тот же преподаватель. Для решения задачи построим граф G, вершинам которого биективно соответствуют занятия. Две вершины соединены ребром, если соответствующие занятия нельзя проводить одновременно. Ясно, что правильная раскраска графа G определяет расписание, удовлетворяющее требованиям несовместимости по времени: занятия, соответствующие вершинам, окрашенным одинаково, можно проводить одновременно. Справедливо и обратное, любое такое расписание определяет правильную раскраску графа G. Следовательно, кратчайшее время необходимое для проведения всех занятий равно $\gamma$ (G), а из оптимальной раскраски графа G получается необходимое расписание.

*Задача распределения ресурсов*.

Необходимо выполнить некоторое множество V={v1,v2,…,vn} работ. Имеется множество S={s1,s2,…,sr} ресурсов, необходимых для выполнения этих работ. Каждая работа использует часть указанных ресурсов, одновременно могут выполняться работы, использующие разные ресурсы. Все работы выполняются за одно и то же время t. Необходимо распределить ресурсы так, чтобы общее время выполнения всех работ было минимальным.

Рассмотрим граф G с множеством вершин V. Две различные вершины v и v' графа G смежны тогда и только тогда, когда для выполнения работ v и v' требуется хотя бы один общий ресурс. Наименьшее время выполнения всех работ равно $\gamma$ (G)·t. Оптимальная раскраска графа G определяет распределение ресурсов.

## Тема 6. Элементы теории нечетких множеств

### *План темы*

1. *Понятие нечеткого множества. Основные свойства нечетких множеств.*
2. *Лингвистические переменные и термы. Дефаззификация нечеткого множества.*
3. *Операции над нечеткими множествами.*

### *1. Понятие нечеткого множества. Основные свойства нечетких множеств*

*Нечетким множеством* $\mathrm{A}$ на универсальном множестве U называется совокупность пар ($\mu$(x), x), где $\mu$(x) - степень принадлежности элемента x $\in$ U к нечеткому множеству $\mathrm{A}$ .

Степень принадлежности – это число из диапазона [0, 1]. Чем выше степень принадлежности, тем в большей мере элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества.

*Высотой* нечеткого множества $\mathrm{A}$ называется максимум степеней принадлежности его элементов:

$$\mathrm{hgt}\,\mathrm{A} = \underbrace{\max\{\mu(x_i)\}}_{x_i \in U}.$$

Нечеткое множество $\mathrm{A}$ называется *нормальным,* если его высота равна единице. Нечеткие множества не являющиеся нормальными называются *субнормальными.*

*Носителем* нечеткого множества $\mathrm{A}$ называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют ненулевые степени принадлежности

Нечеткое множество называется *пустым*, если его носитель является пустым множеством.

*Ядром* нечеткого множества $\mathrm{A}$ называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице. Ядро субнормального нечеткого множества пустое.

*$\alpha$ -сечением (или множеством $\alpha$ -уровня)* нечеткого множества $\mathrm{A}$ называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют степени принадлежности большие или равные $\alpha$:

$$A_\alpha = \{x : \mu(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1].$$

Значение $\alpha$ называют $\alpha$ *-уровнем*. Носитель (ядро) можно рассматривать как сечение нечеткого множества на нулевом (единичном) $\alpha$-уровне.

Нечеткие множества $\mathrm{A}$ и $B$ называются *равными,* если:

$$(\forall x_i \in U)(\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)).$$

***2. Лингвистические переменные и термы. Дефаззификация нечеткого множества***

*Лингвистической переменной* называется переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного языка.

*Терм–множеством* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной.

*Термом* называется любой элемент терм–множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.

*Дефаззификацией* называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число.

Существуют такие методы дефаззификации конечных нечетких множеств, как метод центра тяжести; метод медианы; метод наибольшего из максимумов; наименьшего из максимумов; центра максимумов.

Дефаззификация нечеткого множества *по методу центра тяжести* осуществляется по формуле:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mu(x_i)}.$$

Дефаззификация *по методу медианы* состоит в нахождении такого числа а, что:

$$a = \forall j \sum_{i=1}^{j} \mu(x_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \mu(x_i)$$

***3. Операции над нечеткими множествами***

*Дополнением* нечеткого множества $\mathrm{A}$ ,заданного на универсальном множестве U, называется нечеткое множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), (\forall x \in U).$$

*Пересечением* нечетких множеств $\mathrm{A}$ и $B$, заданных на одном и том же универсальном множестве U, называется нечеткое множество $C$ с функцией принадлежности:

$$\mu_C = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, (\forall x \in U).$$

*Объединением* нечетких множеств $\mathrm{A}$ и $B$, заданных на одном и том же универсальном множестве U, называется нечеткое множество $D$ с функцией принадлежности:

$$\mu_D = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, (\forall x \in U).$$

*Разностью* нечетких множеств $\mathrm{A}$ и $B$, заданных на одном и том же универсальном множестве U, называется нечеткое множество $E$, равное пересечению множества $\mathrm{A}$ с дополнением множества $B$:

$$E = \mathrm{A} \setminus B = \mathrm{A} \cap \overline{B}.$$

Его функция принадлежности равна:

$$\mu_E = \min\{\mu_A(x), (1 - \mu_B(x))\}, (\forall x \in U).$$

Операции над нечёткими множествами обладают теми же свойствами, что и операции над чёткими множествами:

-коммутативность и ассоциативность операций объединения и пересечения множеств

-дистрибутивность операции объединения относительно операции пересечения и наоборот

-законы де Моргана и двойного отрицания и т.д.

## 9. Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

### Тема. Рекуррентные соотношения

1. *Решение рекуррентных соотношений методом геометрических прогрессий*
2. *Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций*

***1. Решение рекуррентных соотношений методом геометрических прогрессий***

**Пример.** Решить методом геометрических прогрессий рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} U_{N+2} = -3 \cdot U_{N+1} + 10 \cdot U_N, N \geq 0, \\ U_0 = 1, U_1 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Порядок этого соотношения K = 2, следовательно, базис его содержит два решения, коэффициенты $A_1$ = -1, $A_2$ = 10. Составим характеристическое уравнение данного соотношения:

$$q^2 = -3q + 10,$$

где q- знаменатель геометрической прогрессии с первым членом, равным 1.

Перенесем все слагаемые в правую часть с противоположными знаками и решаем квадратное уравнение:

$$q^2 + 3q - 10 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$q_1 = \alpha = -5,\ \ q_2 = \beta = 2.$$

Следовательно, базис соотношения имеет вид:

$$\{\alpha_N\}: 1, -5, (-5)^2, \ \ , (-5)^N, \ldots$$

$$\{\beta_N\}: 1, 2, 2^2, \ldots 2^N, \ldots$$

Тогда общее решение примет вид:

$$U_N = A\cdot(-5)^N + B\cdot 2^N,\ N \ge 0 \quad (*)$$

Найдем коэффициенты A и B из начальных условий.

N = 0, $\Rightarrow$ $U_0 = 1$, $(-5)^0 = 2^0 = 1$, $\Rightarrow$ (*) примет вид: 1 = A + B;

N = 1, $\Rightarrow$ $U_1 = 3$, $(-5)^1 = -5$, $2^1 = 2$, $\Rightarrow$ (*) примет вид: 3 = -5A + 2B.

Итак, получили систему:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -5A + 2B = 3, \end{cases}$$

решая которую, найдем значения коэффициентов A и B.

$$B = 1 - A,\ \Rightarrow\ -5A + 2(1 - A) = 3,\ \Rightarrow\ -7A = 1, \text{ откуда}$$

$$A = -\tfrac{1}{7},\ B = \tfrac{8}{7}.$$

Окончательно общее решение исходного соотношения имеет вид:

$$U_N = -\frac{1}{7}\cdot(-5)^N + \frac{8}{7}\cdot 2^N.$$

**Задание.**

Решить рекуррентное соотношение методом геометрических прогрессий.

а) $\begin{cases} U_{N+2} = 2\cdot U_{N+1} + 3\cdot U_N + (-1)^N, \ldots N \ge 2; \\ U_0 = 0, U_1 = 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -U_{N+3} = 6\cdot U_{N+2} + 11\cdot U_{N+1} + 6\cdot U_{N,\ldots} N \ge 0, \\ U_0 = 1, U_1 = 2, U_2 = 3. \end{cases}$

### *2. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций*

Опишем общий алгоритм решения рекуррентных соотношений в замкнутом виде с помощью производящих функций. Он содержит четыре основных шага.

**ШАГ 1.** Записать соотношение, выражающее *любой* член последовательности через некоторые другие члены этой последовательности (включая начальные условия) в виде одного равенства.

**ШАГ 2.** Умножить обе части полученного равенства на $z^n$ и просуммировать по всем n. В результате в левой части получим производящую функцию последовательности $\{f_n\}$: $F(z) = \sum\limits_{n\ge 0} f_n z^n$, а в правой – выражение, содержащее суммы вида $\sum\limits_{k\in I} f_k z^k$, где $k$ пробегает некоторое множество индексов I. Выражение в правой части равенства нужно преобразовать, используя операции над производящими функциями таким образом, чтобы оно превратилось в выражение от $F(z)$.

**ШАГ 3.** Решить полученное в результате выполнения шага 2 уравнение относительно $F(z)$. Это решение даст выражение производящей функции в замкнутой форме.

**ШАГ 4.** Разложить $F(z)$ в степенной ряд и просчитать коэффициент при $z^n$. Значение этого коэффициента и будет замкнутой формой для $f_n$.

**ПРИМЕР.** Покажем, как работает этот алгоритм на уже известном нам примере последовательности Фибоначчи $\{F_n\}$:

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ n \geq 0, \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases} \quad (1).$$

Каждое число в ряде Фибоначчи, начиная со второго, равно сумме двух предыдущих, поэтому можно переписать систему (1) в виде:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 2, \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases} \quad (2).$$

**ШАГ 1.** Запишем соотношение, которое включает в себя оба уравнения системы (2), используя следующий прием. Запись $[n=1]$ означает, что это выражение равно 1 только в том случае, когда n = 1, для всех остальных значений n, оно равно 0:

$$[n=1] = \begin{cases} 1, \text{ если } n=1, \\ 0, \text{ если } n \neq 1 \end{cases} \quad (3).$$

Получим равенство: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n=1]$ (4), которое означает, что при $n=1$ к правой части первого уравнения системы (2) прибавляется 1, при любом другом значении $n$ правая часть равенства остается без изменения. Проверим, поучаются ли из равенства (4) начальные условия. При этом необходимо помнить, что любой член последовательности $\{F_n\}$ с отрицательным индексом, равен 0.

$$\begin{aligned} n=0: \quad & F_0 = F_{-1} + F_{-2} = 0 + 0 = 0, \\ n=1: \quad & F_1 = F_0 + F_{-1} = 0 + 0 = 0 \end{aligned},$$

следовательно, в равенстве (4) учтены начальные условия.

**ШАГ 2.** Умножим обе части равенства (4) на $z^n$ и просуммируем по всем n:

$$\sum_n F_n \cdot z^n = \sum_n F_{n-1} \cdot z^n + \sum_n F_{n-2} \cdot z^n + \sum_n [n=1] \cdot z^n \quad (5).$$

В левой части равенства поучили сумму $\sum_n F_n \cdot z^n$, которая равна производящей функции последовательности $\{F_n\} : F(z) = \sum_n F_n \cdot z^n$ (6).

Преобразуем правую часть равенства (5). Первое и второе слагаемые в правой части этого равенства похожи на производящую функцию $F(z)$, и отличаются от нее только индексами членов последовательности $\{F_n\}$.

Произведем в первой сумме сдвиг на одну, а во второй – на две позиции вправо (см. таблицу 1) и учтем, что согласно (3), из всех слагаемых последней суммы $\sum_n [n=1] \cdot z^n$ ненулевым будет только то, у которого $n=1$.

Поэтому, $\sum_n [n=1] \cdot z^n = z^1$. С учетом всех преобразований получим:

$$\sum_n F_n \cdot z^n = z \cdot \sum_n F_n \cdot z^n + z^2 \cdot \sum_n F_n \cdot z^n + z \quad (7).$$

Наконец, согласно (6) и (7), на втором шаге приходим к уравнению от $F(z)$:

$$F(z) = z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \quad (8).$$

**ШАГ 3.** Решим полученное в результате выполнения шага 2 уравнение относительно $F(z)$:

$$F(z)\cdot[1-z-z^2]=z \quad \text{или}$$

$$F(z)=\frac{z}{1-z-z^2} \qquad (9) –$$

выражение для производящей функции в замкнутом виде.

**ШАГ 4.** Чтобы разложить функцию $F(z)$ в степенной ряд, сначала найдем корни многочлена $Q(z)=1-z-z^2$, который стоит в знаменателе выражения (9). Перепишем его в виде: $Q(z)=-z^2-z+1$ и найдем корни квадратного трехчлена.

Так как $D=(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 1=5$, то корни имеют вид:

$$z_1=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad z_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому $F(z)=\dfrac{z}{-(z-z_1)\cdot(z-z_2)}$. Разложим правую часть поученного равенства на простейшие дроби:

$$\frac{-z}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)}=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}=\frac{A(z-z_2)+B(z-z_1)}{(z-z_1)\cdot(z-z_2)},$$

откуда следует, что

$$-z=A(z-z_2)+B(z-z_1) \qquad (10).$$

Так как это равенство должно выполняться при любых значениях $z$, то воспользуемся методом частных решений и возьмем в равенстве (10) сначала $z=z_1$, а затем $z=z_2$.

$$z=z_1: \quad -z_1=A(z_1-z_2)+B(z_1-z_1)=A(z_1-z_2).$$

Подставляя численные значения $z_1$ *и* $z_2$, получим:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=A\cdot\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=A\cdot\sqrt{5}, \Rightarrow \quad A=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

$$z=z_2: \quad -z_2=A(z_2-z_2)+B(z_2-z_1)=B(z_2-z_1) \quad \text{или}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=B\cdot\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-B\cdot\sqrt{5}, \Rightarrow \quad B=-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Итак, производящая функция последовательности Фибоначчи может быть представлена в следующем виде:

$$F(z)=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z-z_1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{z-z_2}.$$

Чтобы разложить $F(z)$ в степенной ряд, достаточно разложить в ряд каждую из дробей $\dfrac{1}{z-z_1}$ и $\dfrac{1}{z-z_2}$. Из теории рядов известна формула разложения в ряд Маклорена для функции вида

$$f(t)=\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n, \quad |t|<1, \ 11).$$

Приведем дроби $\dfrac{1}{z-z_1}$ и $\dfrac{1}{z-z_2}$ к такому виду.

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{z_1\left(1+\left(-\frac{z}{z_1}\right)\right)}=\frac{1}{z_1(1+t)},\ t=-\frac{z}{z_1} \quad (12).$$

Аналогично:

$$\frac{1}{z-z_2}=\frac{1}{z_2\left(1+\left(-\frac{z}{z_2}\right)\right)}=\frac{1}{z_2(1+u)},\ u=-\frac{z}{z_2} \quad (13).$$

Тогда с учетом формулы (11) получим:

$$F(z)=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1}{z_1(1+t)}\right)-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1}{z_2(1+t)}\right)=$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{1+u}= \qquad (14).$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\sum_n(-1)^n\cdot t^n-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\sum_n(-1)^n\cdot u^n$$

Выполнив необходимые сокращения в последнем из равенств (14) и подставив вместо $t$ и $u$ их значения по формулам (12) и (13), придем к равенствам:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sum_n(-1)^n\cdot\left(\frac{2z}{1-\sqrt{5}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sum_n(-1)^n\cdot\left(\frac{2z}{1+\sqrt{5}}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\sum_n\left((-1)^n\cdot 2^n\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{((1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}))^n}\right)\cdot z^n\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\sum_n\left((-1)^n\cdot 2^n\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{(-4)^n}\right)\cdot z^n\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\sum_n\left((-1)^n\cdot 2^n\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{(-1)^n 2^{2n}}\right)\cdot z^n\right]=$$

$$=\sum_n\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)\cdot z^n$$

При выполнении этих преобразований использовались операции сложения производящих функций и умножения на константу (табл. 1). Получили, что с одной стороны:

$$F(z)=\sum_n F_n\cdot z^n\ ,$$

а с другой:

$$F(z)=\sum_n\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)\cdot z^n\ .$$

Приравняем коэффициенты при $z^n$ в первом и втором равенствах:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right) \quad (15) –$$

замкнутая форма $n$-го члена последовательности Фибоначчи.

## Тема. Целочисленные функции $\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$, mod

1. *Целочисленные функции $\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$, mod и их свойства.*
2. *Решение задач с использованием целочисленных функций.*

ПРИМЕР 1.

$$5\bmod 3 = 5 - 3\cdot\left\lfloor\frac{5}{3}\right\rfloor = 5 - 3\cdot 1 = 2;$$

$$5\bmod(-3) = 5 - (-3)\cdot\left\lfloor\frac{5}{-3}\right\rfloor = 5 + 3\cdot(-2) = -1;$$

$$-5\bmod 3 = -5 - 3\cdot\left\lfloor\frac{-5}{3}\right\rfloor = -5 - 3\cdot(-2) = 1;$$

$$-5\bmod(-3) = -5 - (-3)\cdot\left\lfloor\frac{-5}{-3}\right\rfloor = -5 + 3\cdot 1 = -2.$$

ПРИМЕР 2. Доказать свойство 3 функции mod

$$(\forall x \in R)\ (\forall y \neq 0 \in R)\ (\forall C = const,\ C \neq 0)$$

$$C\cdot(x\bmod y) = (Cx)\bmod(Cy).$$

Доказательство.

$$C\cdot(x\bmod y) \overset{def}{=} C\cdot\left(x - y\cdot\left\lfloor\frac{x}{y}\right\rfloor\right) = Cx - Cy\cdot\left\lfloor\frac{Cx}{Cy}\right\rfloor = (Cx)\bmod(Cy).$$

**Тема. Введение в асимптотические методы.**
**Основные комбинаторные конфигурации.**

1. *Решение задач с использованием свойств символа О.*
2. *Решение задач на основные тождества с биномиальными коэффициентами.*
3. *Решение задач на метод включения-исключения.*

***1. Решение задач с использованием свойств символа О***

***Задача 1.*** Что неверно в следующих рассуждениях? Поскольку $n = O(n)$ и $2n = O(n)$ и так далее, то заключаем, что $\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n) = O(n^2)$ ?

*Решение*:

Замена $kn$ на $O(n)$ подразумевает различные $C$ для различных $k$; а нужно, чтобы все $O$ имели общую константу. В действительности, в данном случае требуется, чтобы $O$ обозначало множество функций двух переменных, $k$ и $n$. Правильно будет записать $\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n^2) = O(n^3)$.

***Задача 2.*** Докажите или опровергните: $O(f(n) + g(n)) = f(n) + O(g(n))$, если $f(n)$ и $g(n)$ положительны для всех $n \in N$.

*Решение*:

Утверждение ложно.

Пусть f(n) = n2, а g(n) = 1. Найдем такую функцию φ(n), которая бы принадлежала левому множеству, но не принадлежала бы правому множеству, т.е. (∃C1) (∀n) [φ(n) ≤ C1(n2 + 1)] и (∀C2) (∃n≥n0) [φ(n) > n2 + C2].

Возьмем φ(n) = 2n2.

1). Пусть C1 = 3, тогда (∀n≥n0) 2n2 ≤ 3(n2 + 1). Значит функция φ(n) принадлежит левому множеству.

2). (∀C2) (∃n> $\sqrt{C_2}$ ) 2n2 > n2 + C2. Значит функция φ(n) не принадлежит правому множеству.

***Задача 3.*** Докажите или опровергните: $\cos O(x) = 1 + O(x^2)$ для всех вещественных $x$.

*Решение*:

Если функция $g(x)$ принадлежит левой части так, что $g(x) = \cos y$ для некоторого $y$, причем $|y| \le C|x|$ для некоторой константы $C$, то $g(x) = \cos y = 1 - 2\sin^2 (y/2) \le 1 = 1 + 0 \cdot x^2$. Значит существует такая константа $B$, что $g(x) \le 1 + B \cdot x^2$. Следовательно, множество из левой части содержится в правой части, и формула верна.

***Задача 4.*** Докажите, что $1+\frac{2}{n}+O(n^{-2}) = \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+O(n^{-2})\right) \quad \text{при } n \to \infty$.

<u>*Решение*</u>:

Преобразуем левую часть следующим образом:

$$1+\frac{2}{n}+O(n^{-2}) = \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{O(n^{-2})}{1+\frac{2}{n}}\right).$$

Заметим, что $\frac{1}{1+\frac{2}{n}} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty$, тогда $\frac{1}{1+\frac{2}{n}} \le C$, где $C$ – константа, тогда можно записать по определению символа $O$, что $\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = O(1)$. Используя это для преобразованного равенства, получаем, что

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{O(n^{-2})}{1+\frac{2}{n}}\right) = \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+O(1)O(n^{-2})\right) = \text{(по 1.2.4)}$$

$$= \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot(1+O(1\cdot n^{-2})) = \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot(1+O(n^{-2}))$$

Что и требовалось доказать.

***2. Решение задач на основные тождества с биномиальными коэффициентами***

Рассмотрим на нескольких примерах, каким образом свойства биномиальных коэффициентов можно использовать для решения конечных сумм.

<u>**ЗАДАЧА 1.**</u> *Сумма отношений.*

Решить в замкнутой форме сумму:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k}{C_n^k}, \qquad n \ge m \ge 0, \quad n, m \in Z \qquad (1).$$

<u>Решение:</u>

Разделим обе части формулы 8 (умножение биномиальных коэффициентов) на $C_n^k \cdot C_n^m$:

$$\frac{C_n^m \cdot C_m^k}{C_n^k \cdot C_n^m} = \frac{C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}}{C_n^k \cdot C_n^m} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_m^k}{C_n^k} = \frac{C_{n-k}^{m-k}}{C_n^m}.$$

В результате сумма (1) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{n-k}^{m-k}}{C_n^m} \qquad (2).$$

Так как выражение в знаменателе не зависит от индекса суммирования $k$, то его можно вынести из-под знака суммы:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{n-k}^{m-k}}{C_n^m}=\frac{1}{C_n^m}\cdot\sum_{k=0}^{m}C_{n-k}^{m-k} \qquad (3).$$

Чтобы упростить сумму в правой части равенства (3), перейдем к обобщенной записи пределов суммирования: будем считать, что суммирование ведется по всем целым неотрицательным $k$. Это допустимо и не изменит суммы, так как при $k>m$ все члены суммы все равно будут равны нулю. В полученной сумме с обобщенными пределами произведем переименование индексов с $k$ на $m-k$:

$$\sum_{k=0}^{m}C_{n-k}^{m-k}=\sum_{k\geq 0}C_{n-k}^{m-k}=\sum_{m-k\geq 0}C_{n-(m-k)}^{m-(m-k)}=\sum_{k\leq m}C_{n-m+k}^{k} \quad (4).$$

К последней сумме применим свойство 5 биномиальных коэффициентов, согласно которому:

$$\sum_{k\leq m}C_{n-m+k}^{k}=\sum_{k\leq m}C_{(n-m)+k}^{k}=C_{(n-m)+m+1}^{m}=C_{n+1}^{m} \qquad (5).$$

С учетом выполненных преобразований и формулы числа сочетаний из $n$ элементов по $m$, получим:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^k}{C_n^k}=\frac{1}{C_n^m}\cdot C_{n+1}^{m}=\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}\cdot\frac{m!(n-m)!}{n!}=\frac{n+1}{n+1-m}.$$

<u>Ответ:</u> $\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^k}{C_n^k}=\frac{n+1}{n+1-m}.$

<u>**ЗАДАЧА 2.**</u> *Упростить сумму*

$$\sum_{k}C_n^k\cdot C_s^k\cdot k \qquad (1).$$

<u>Решение:</u>

Воспользуемся правилом внесения (свойство 2 биномиальных коэффициентов):

$$C_s^k=\frac{s}{k}\cdot C_{s-1}^{k-1}, \quad\Rightarrow\quad k\cdot C_s^k=s\cdot C_{s-1}^{k-1}, \quad\Rightarrow\quad \sum_{k}C_n^k\cdot C_s^k\cdot k=\sum_{k}C_n^k\cdot C_{s-1}^{k-1}\cdot s=$$

$$=s\cdot\sum_{k}C_n^k\cdot C_{s-1}^{k-1} \qquad (2).$$

Для преобразования суммы произведений биномиальных коэффициентов, поученной в формуле (2), воспользуемся формулой b) свойства 10:

$$s\cdot\sum_{k}C_n^k\cdot C_{s-1}^{k-1}=s\cdot C_{n+s-1}^{n-k+k-1}=s\cdot C_{n+s-1}^{n-1}=\frac{s\cdot(n+s-1)!}{(n-1)!s!}=\frac{(n+s-1)!}{(n-1)!(s-1)!}.$$

<u>Ответ:</u> $\sum_{k}C_n^k\cdot C_s^k\cdot k=\frac{(n+s-1)!}{(n-1)!(s-1)!}.$

<u>**ЗАДАЧА 3.**</u> *Упростить сумму*

$$\sum_{k\geq 0}C_{n+k}^{2k}\cdot C_{2k}^{k}\cdot\frac{(-1)^k}{k+1} \qquad (1).$$

<u>Решение:</u>

Применим к произведению биномиальных коэффициентов под знаком суммы свойство 8:

$$C_{n+k}^{2k}\cdot C_{2k}^{k}=C_{n+k}^{k}\cdot C_{(n+k)-k}^{2k-k}=C_{n+k}^{k}\cdot C_n^k, \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \sum_{k\geq 0}C_{n+k}^{2k}\cdot C_{2k}^{k}\cdot\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}C_{n+k}^{k}\cdot C_n^k\cdot\frac{(-1)^k}{k+1} \qquad (2).$$

Полученная сумма (2) проще первоначальной, так как индекс суммирования $k$ встречается в ней 5 раз вместо 6. Внесем теперь множитель $\frac{1}{k+1}$ в коэффициент $C_n^k$ по правилу внесения:

$$C_{n+1}^{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\cdot C_n^k, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k+1}\cdot C_n^k=\frac{1}{n+1}\cdot C_{n+1}^{k+1}, \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k\ge 0} C_{n+k}^{2k}\cdot C_{2k}^k\cdot\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k\ge 0} C_{n+k}^k\cdot C_{n+1}^{k+1}\cdot(-1)^k.$$

Применим к коэффициенту $C_{n+k}^k$ правило обращения верхнего индекса:

$$(-1)^k\cdot C_{n+k}^k=C_{k-(n+k)-1}^k=C_{-n-1}^k.$$

Тогда сумма примет вид:

$$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k\ge 0} C_{n+k}^k\cdot C_{n+1}^{k+1}\cdot(-1)^k=\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k\ge 0} C_{-n-1}^k\cdot C_{n+1}^{k+1} \qquad (3).$$

Воспользуемся формулой b) свойства 10, со следующей заменой:

$$l\to n+1,\quad s\to -n-1,\quad n\to 0,\quad m\to 1:$$
$$\sum_{k\ge 0} C_{n+1}^{k+1}\cdot C_{-n-1}^k=C_{n+1-n-1}^{n+1-1+0}=C_0^n.$$

Ответ: $\sum_{k\ge 0} C_{n+k}^{2k}\cdot C_{2k}^k\cdot\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\cdot C_0^n.$

### *3. Решение задач на метод включения-исключения*

Рассмотрим примеры использования метода включения-исключения при решении задач.

**Задача 1.** *В группе 25 студентов. Среди них 20 сдали сессию успешно, 12 занимаются в спортивных секциях, причём 10 из них сдали сессию успешно. Сколько неуспевающих студентов не посещают спортивных секций?*

**Решение**. Обозначим множество всех студентов группы через $U$, $|U|=25$, множество студентов группы, успешно сдавших сессию через $A$, $|A|=20$, а множество студентов, занимающихся в спортивных секциях – через $B$, $|B|=12$.

Тогда множество неуспевающих студентов будет дополнением множества $A$ до множества всех студентов группы, то есть $\overline{A}$, множество студентов, непосещающих спортивные секции – дополнением множества $B$ до множества всех студентов группы, то есть $\overline{B}$. В задаче требуется найти, сколько студентов не сдали сессию и при этом не посещают секции, то есть найти нужно мощность множества $\overline{A}\cap\overline{B}$.

По законам де Моргана для множеств справедливо соотношение $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$. Таким образом, $|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|$.

Найдём сначала мощность множества $A\cup B$, а затем – мощность множества $\overline{A\cup B}$ как его дополнения до множества $U$ всех студентов группы.

По формуле (5) имеем $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

В нашем случае: $|A\cup B|=20+12-10=22$.

Так как $\overline{A\cup B}=U-(A\cup B)$, то

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|U|-|A\cup B|=25-22=3.$$

**Ответ: 3 студента**.

**Задача 2**. Пусть дана стопка из 3 карточек, на каждой из которых стоит номер от 1 до 3. Сколькими способами можно расположить карточки в стопке так, чтобы ни одна карточка с номером $i(1 \le i \le 3)$ не оказалась на $n$-м месте?

**Решение**. В нашем случае число карточек $n=3$, свойство $a_i$ означает, что карточка с номером $i(1 \le i \le 3)$ *оказалась* на $n$-м месте. Тогда свойство $\overline{a}_i$ означает, напротив, что карточка с номером $i$ *не оказалась* на $n$-м месте.

Число всех возможных расположений трёх карточек в стопке равно $N = n! = 3! = 6$.

$N(a_1)$ – число способов расположения трёх карточек в стопке, при котором карточка с номером 1 окажется на первом месте (расположение остальных карточек неважно), следовательно, $N(a_1)=2$. Аналогично, $N(a_2)=N(a_3)=2$.

$N(a_1a_2)$ – число способов расположения трёх карточек в стопке, при котором карточка с номером 1 окажется на первом месте, с номером 2 – на втором. Тогда карточка с номером 3 обязательно окажется на третьем месте. Аналогично произойдёт для случаев $N(a_1a_3)$ и $N(a_2a_3)$. Следовательно, эти случаи совпадают и совпадают с $N(a_1a_2a_3)=1$.

$N(a_1a_2a_3)$ – число способов расположения трёх карточек в стопке по порядку их номеров, поэтому $N(a_1a_2a_3)=1$.

В задаче требуется найти число $N(\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_3)$. Найдём его по формуле (7).

$$\sum_i N(a_i) = N(a_1)+N(a_2)+N(a_3) = 2+2+2=6; \ \sum_{i<j} N(a_ia_j) = N(a_1a_2a_3)=1;$$

$$(-1)^{n-1}N(a_1a_2\ldots a_n) = (-1)^2 N(a_1a_2a_3) = 1; \ N(\overline{a}_1\overline{a}_2\overline{a}_3) = 6-6+1+1=2.$$

**Ответ: 2 способами**.

## Тема. Основные понятия теории графов

*1. Способы представления графов. Маршруты, пути, цепи и циклы. Изоморфизм графов.*

*2. Эйлеровы и гамильтоновы графы.*

*3. Деревья. Планарные и плоские графы.*

*4. Раскраска вершин и ребер графа. Хроматическое число.*

***1. Способы представления графов. Маршруты, пути, цепи и циклы. Изоморфизм графов.***

**Задача 1.** Изобразите графически:

1. Неориентированное и ориентированное ребра;
2. Неориентированный граф G(V,E), заданный множеством $V=\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и соответствием: $E(v_0)=\{v_1, v_2\}=\{v_0, v_2, v_4\}$; $E(v_1)=\{v_0, v_2, v_4\}$; $E(v_2)=\{v_0, v_1, v_5\}$; $E(v_3)=\{v_4\}$; $E(v_5)=\{v_2\}$;
3. Плоский граф;
4. Полный неориентированный граф на трех, четырех и пяти вершинах;
5. Неполный ориентированный граф на пяти вершинах;
6. Петлю графа;
7. Неориентированный и ориентированный мультиграф.

**Задача 2.** Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с остальными по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся два шахматиста, сыгравшие одинаковое число партий.

Решение.

Переведем условие задачи на язык графов. Каждому шахматисту поставим в соответствие вершину графа, соединим ребрами попарно вершины, соответствующие шахматистам, уже сыгравшим между собой партию. Получим граф с девятью вершинами. Степени его вершин равняются числу партий, сыгранных соответствующими игроками. Покажем, что во всяком графе с девятью вершинами всегда найдутся хотя бы две вершины одинаковой степени.

Каждая вершина графа с девятью вершинами может иметь степень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Предположим, что существует граф G, все вершины которого имеют разную степень, т.е. каждое из чисел последовательности 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 является степенью одной и только одной из его вершин. Но этого не может быть, так как если в графе есть вершина $v_i$ степени 0, то в нем найдется вершина $v_j$ со степенью 8. Эта вершина $v_j$ должна быть соединена ребрами со всеми остальными вершинами графа, в том числе и с $v_i$, поэтому степень вершины $v_i$ не может равняться 0. Таким образом, в графе с девятью вершинами не могут быть одновременно вершины степень 0 и 8. Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, степени которых равны между собой. Таким образом, доказано, что в любой момент найдутся хотя бы два шахматиста, сыгравшие одинаковое число партий.

**Задача 3.** (Для самостоятельного решения.)

Девять человек проводят шахматный турнир в один круг. К некоторому моменту выясняется, что двое сыграли одинаковое число партий. Докажите, что тогда либо один участник еще не сыграл ни одной партии, либо один сыграл все партии.

**Задача 4.** Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими?

Решение.

Участников этой компании изобразим вершиной графа (рис. 1), а отношение знакомства между двумя участниками – ребром. Изобразим графы, которые могут соответствовать такой компании.

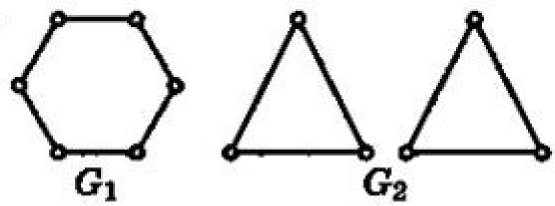



Рис. 1

Про граф $G_1$ говорят, что он связный, так как из каждой вершины по ребрам можно попасть в любую другую. Делаем вывод, что в этом случае каждый через своих знакомых может познакомиться со всеми остальными.

Про граф $G_2$ говорят, что он несвязный, так как состоит из двух простых циклов. Делаем вывод, что граф соответствует двум компаниям, участники одной из них могут быть не знакомы с участниками другой.

**Задача 5.** Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, черная, красная, синяя, зеленая. Черная едет впереди синей, зеленая – впереди белой, но позади синей, красная впереди черной. Какая машина едет первой и какая последней?

Решение.

Решаем задачу, построив ориентированный граф для отношения f: «x едет сзади y». На плоскости отметим пять точек, соответствующих каждой машине, и обозначим их первой буквой цвета машины (рис. 2)

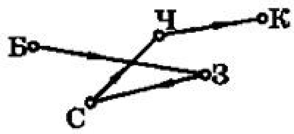



Рис. 2

Анализируя граф, получаем следующий порядок движения: красная, черная, синяя, зеленая, белая.

**Задача 6.** Задан граф G(V,E), где V={$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$}; $E_{v_1}$={$v_1$, $v_3$, $v_5$}; $E_{v_i}$=∅; $E_{v_3}$={$v_1$, $v_2$, $v_5$}; $E_{v_4}$={$v_1$}; $E_{v_5}$={$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$}.

1. Задайте граф с помощью бинарного отношения, т.е. совокупности множества V и подмножества множества упорядоченных пар <$v_i$, $v_j$> $\in$ V×V.

1. Изобразите орграф на рисунке.

2. Постройте матрицу смежности.

Решение.

1. V={$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$}.

Множество пар: {<$v_1$, $v_1$>; <$v_1$, $v_3$>; <$v_1$, $v_5$>; <$v_3$, $v_1$>; <$v_3$, $v_2$>; <$v_3$, $v_5$>; <$v_4$, $v_1$>; <$v_5$, $v_2$>; <$v_5$, $v_3$>; <$v_5$, $v_4$>; <$v_5$, $v_5$>}.

2. См. рис. 3.

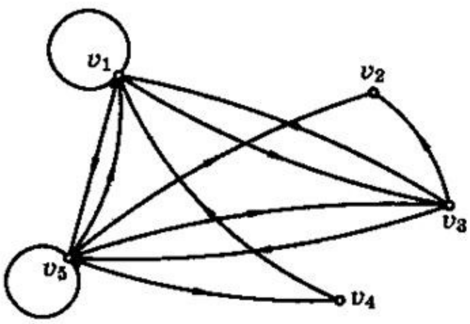



Рис. 3.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Задания.** Для графа заданного матрицей смежности

1. найти матрицу инцидентности
2. построить граф
3. задать граф бинарным отношением
4. определить является ли граф эйлеровым
5. можно ли получить эйлеров цикл удалив некоторые ребра
6. сделайте предположение, является ли граф гамильтоновым

***2. Эйлеровы и гамильтоновы графы***

*Алгоритмы построения эйлерова цикла*

Выше был установлен эффективный способ проверки наличия эйлерова цикла в графе. А именно, для этого необходимо и достаточно убедиться, что степени всех вершин четные, что нетрудно сделать при любом представлении графа. Осталось заметить, что предложенный в доказательстве алгоритм линеен, т.е. число действий прямо пропорционально числу ребер.

*Вход:* эйлеров граф G

*Выход*: список ребер графа G в той последовательности, в которой они образуют эйлеров цикл.

1. Положить текущий граф равным G , а текущую вершину – равной произвольной вершине v∈V(G).

2. Выбрать произвольное, с учетом ограничения (см. ниже) ребро e текущего графа, инцидентное текущей вершине.

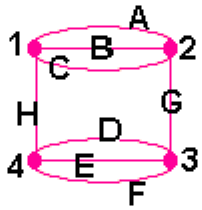
3. Назначить текущей вторую вершину, инцидентную e.

4. Удалить e из текущего графа и внести в список.

5. Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2.

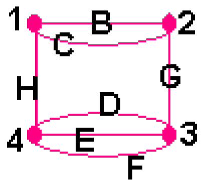
*Ограничение:* если степень текущей вершины в текущем графе больше 1, нельзя выбирать ребро, удаление которого из текущего графа увеличит число компонент связности в нем.

**Задача**. Используя алгоритм Флёри, найти эйлерову цепь в графе:



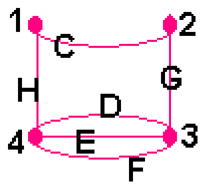

*Решение*. Здесь вершины обозначены цифрами 1, 2, 3, 4, а рёбра — буквами латинского алфавита — A, B, C, D, E, F, G, H.

Начнём именно с вершины 1, пройдём по ребру A и сотрём его:

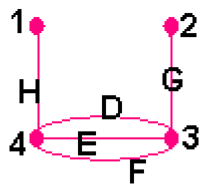



Отметим пройденный «путь» A(1, 2). Это означает, что из вершины 1 перешли в вершину 2 по ребру A.

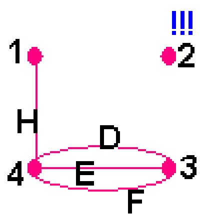
Следующее перемещение B(2, 1):



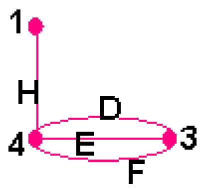

Затем C(1, 2):



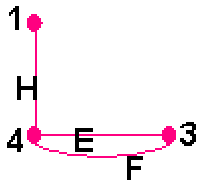

Далее G(2, 3):



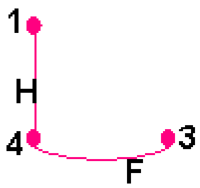

Вершина 2 стала изолированной, значит, её тоже стираем D(3, 4):



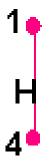

E(4, 3):



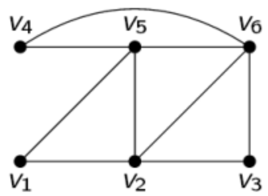

F(3, 4):

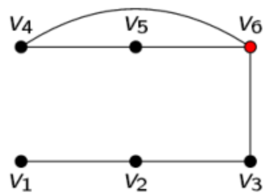



H(4, 1) — заключительный шаг в поиске эйлеровой цепи.




2. Рассмотрим эйлеров граф, изображенный на рисунке.




Пусть на шаге 1 выбрана вершина v1. На выборе на шаге 2 ограничение никак не сказывается; пусть выбрано ребро (v1,v5). На двух следующих итерациях ограничений на выбор по-прежнему не возникает; пусть выбраны ребра (v5,v2) и (v2,v6).

Тогда текущим графом становится граф, изображенный на рисунке справа (текущая вершина – v6). На следующей итерации нельзя выбрать ребро (v6,v3) из-за ограничения; пусть выбрано ребро (v6,v5).

Дальнейший выбор ребер определен однозначно (текущая вершина всегда будет иметь степень 1), так что в итоге будет построен следующий эйлеров цикл:

v1→v5→v2→v6→v5→v4→v6→v3→v2→v1.

### *3. Деревья. Планарные и плоские графы*

На практике часто возникает задача отыскания в нем остова минимального веса. Существует простой алгоритм решения этой задачи, который называется алгоритм Краскала (алгоритм Прима отличается от него очень незначительно).

### *Алгоритм Краскала*

Пусть G – связный взвешенный (n, m)-граф.

<u>Шаг 1.</u> Строим пустой граф $O_n$. Выбираем ребро $l_1$ минимального веса и строим граф $T_1$ :

$T_1 = O_n + l_1$.

<u>Шаг 2.</u> Если граф $T_i$ уже построен, то строим граф $T_{i+1}$:

$T_{i+1} = T_i + l_{i+1}$, где $l_{i+1}$- ребро минимального веса из всех, не включенных в граф $T_i$, при этом необходимо следить, чтобы оно не образовывало циклов в графе $T_{i+1}$. Через n – 1 шаг остов минимального веса построен.

При этом *весом остова* называется суммарный вес входящих в него ребер. В общем случае остов минимального веса может быть выбран неоднозначно.

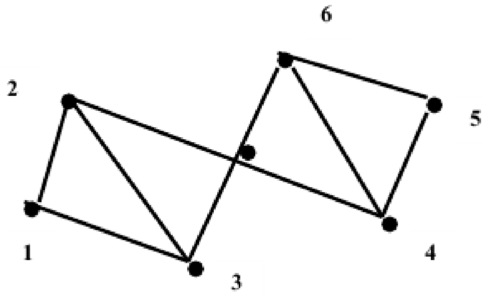
**_Алгоритм Прима_**

отличается только тем, что сразу строится дерево, поэтому на втором шаге выбирается ребро минимального веса не из всех оставшихся, а только из тех ребер, которые в графе G были смежны с ребрами, уже включенными в дерево $T_i$.

**ПРИМЕР.** Найти метрические характеристики графа G, построить для него матрицы смежности и инцидентности и найти остов минимального веса по алгоритму Краскала и алгоритму Прима**.**

Веса ребер графа G:

w(12) = 4; w(13) = 5; w(23) = 8; w(24) = 6;
w(36) = 2; w(45) = 5; w(46) = 7; w(56) = 8




РЕШЕНИЕ.

Найдем остов минимального веса графа G по алгоритмам Краскала и Прима.

**Алгоритм Краскала**

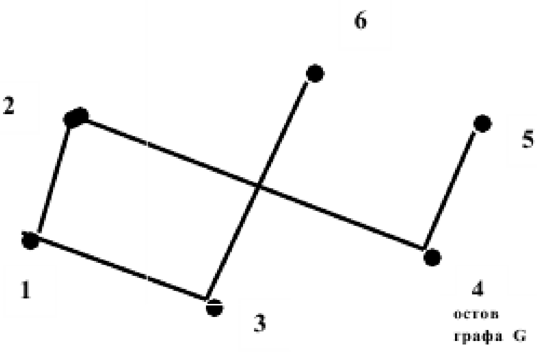
| Шаг | Ребро | Вес ребра |
|---|---|---|
| 1 | (36) | граф |
| 2 | (12) | G |
| 3 | (13) | 5 |
| 4 | (45) | 5 |
| 5 | (24) | 6 |
| Суммарный вес остова | | 22 |

Больше ни одного шага добавить нельзя, так как в результате образуется цикл.

**_Алгоритм Прима_**

| Шаг | Ребро | Вес ребра |
|---|---|---|
| 1 | (36) | 2 |
| 2 | (13) | 5 |
| 3 | (12) | 4 |
| 4 | (24) | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | (45) | 5 |
| Суммарный вес остова | | 22 |




### 4. *Раскраска вершин и ребер графа. Хроматическое число*

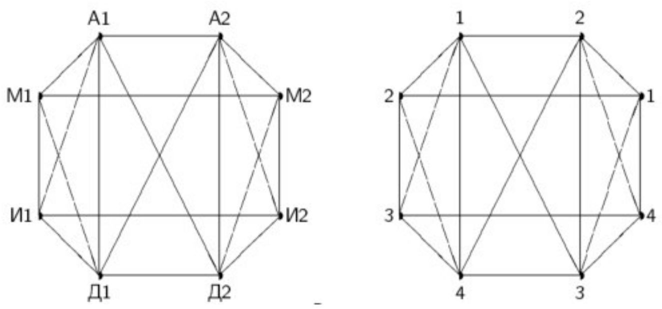
***Задача составления расписания***

В студенческих группах 01 и 02 надо провести занятия по алгебре, дискретной математике, математическому анализу и истории России (по одному занятию по каждому предмету). Занятия по каждому предмету проводятся с каждой группой отдельно. Занятия по алгебре и по дискретной математике ведет преподаватель X, по математическому анализу – преподаватель Y, по истории России – преподаватель Z.

Найти минимальное число пар, в которые можно уложить все занятия, и составить соответствующее расписание.

*Решение*.

Построим граф с вершинами А1, А2, Д1, Д2, М1, М2, И1 и И2 (буква соответствует предмету, а цифра – номеру группы). Соединим ребрами вершины, соответствующие парам, которые нельзя проводить одновременно. Получим граф, изображенный на рисунке слева. Вершины А1, А2, Д1 и Д2 этого графа порождают в нем подграф, изоморфный графу K4. Следовательно, хроматическое число нашего графа не меньше 4. На рисунке справа указана правильная раскраска нашего графа в 4 краски. Следовательно, хроматическое число графа равно 4, т. е. все занятия можно провести за 4 пары.




Соответствующее расписание указано в таблице:

| | Группа 01 | Группа 02 |
|---|---|---|
| 1 пара | Алгебра | Математический анализ |
| 2 пара | Математический анализ | Алгебра |
| 3 пара | История России | Дискретная математика |
| 4 пара | Дискретная математика | История России |

***Задача распределения оборудования***

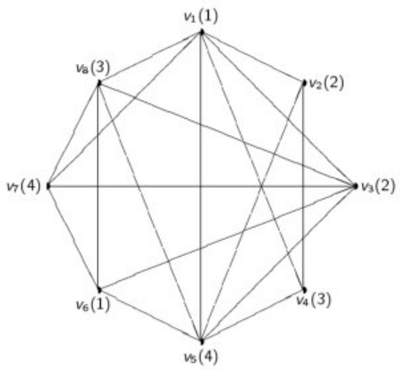
На предприятии планируется выполнить 8 работ: v1,v2,…,v8. Для выполнения этих работ необходимы механизмы a1,a2,…,a6. Использование механизмов для каждой из работ определяется следующей таблицей:

| Механизм | Работа | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
| $a_1$ | + | | + | | | | + | + |
| $a_2$ | | + | | + | | | | |
| $a_3$ | | | + | | | + | + | |
| $a_4$ | + | + | | + | + | | | |
| $a_5$ | | | + | | + | | | + |
| $a_6$ | | | | | + | + | | + |

Ни один из механизмов не может быть использован одновременно на двух работах. Выполнение каждой работы занимает 1 час. Как распределить механизмы, чтобы суммарное время выполнения всех работ было минимальным и каково это время?

*Решение*.

Рассмотрим граф G, вершинами которого являются планируемые работы v1,v2,…,v8, а ребра соединяют работы, в которых участвует хотя бы один общий механизм (и которые, по этой причине, нельзя проводить одновременно). Этот граф изображен на рисунке




Вершины v1,v2,…,v8 порождают подграф графа G, изоморфный K4. Следовательно, χ(G)≥4. Цифры в скобках на рисунке указывают правильную раскраску графа G в 4 краски. Следовательно, χ(G)=4. Таким образом, все работы можно выполнить за 4 часа. Для этого, в соответствии с найденной раскраской графа G, надо в 1-й час выполнять работы v1 и v6 , во 2-й – работы v2 и v3, в 3-й – работы v4 и v8, в 4-й – работы v5 и v7.

## Тема. Элементы теории нечетких множеств

*1. Основные свойства нечетких множеств.*

*2. Лингвистические переменные и термы. Дефаззификация нечеткого множества.*

*3. Операции над нечеткими множествами.*

### *1. Основные свойства нечетких множеств*

**ПРИМЕР.** Найти все характеристики (носитель, ядро, высоту) нечеткого множества $A = \frac{0,5}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0,7}{x_3} + \frac{0,8}{x_4} + \frac{0,4}{x_5}$.

**РЕШЕНИЕ**

Высота нечеткого множества $A$ равна 0,8:

hgt $A$ = max{0,5; 0; 0,7; 0,8; 0,4} = 0,8.

Носителем множества $A$ является множество:

$$\{x_1, x_3, x_4, x_5\} \subset U.$$

Так как множество $A$ – субнормальное, то его ядро пусто.

0,5 – сечением множества $A$ является множество:

$$A_\alpha = \{ x_1, x_3, x_4 \}.$$

**Задача 1.** Найти все характеристики (носитель, ядро, высоту) нечеткого множества $A$

а) $A = \frac{0,4}{x_1} + \frac{0,1}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0,8}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0,6}{x_6};$

б) $A = \frac{0,2}{x_1} + \frac{0,5}{x_2} + \frac{0,1}{x_3} + \frac{0}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0,5}{x_6};$

в) $A = \frac{0,2}{x_1} + \frac{0,5}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0,2}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0,5}{x_6} + \frac{0,9}{x_7};$

### *2. Лингвистические переменные и термы. Дефаззификация нечеткого множества*

**ПРИМЕР.** Представить в виде нечеткого множества понятие «немолодой человек» и выполнить дефаззификацию этого множества.

**РЕШЕНИЕ**

Пусть $A$ – нечеткое множество, представляющее понятие «немолодой человек». Тогда это можно записать следующим образом, учитывая способы задания нечетких множеств:

$$A = \frac{0,1}{45} + \frac{0,3}{50} + \frac{0,5}{55} + \frac{1}{60} + \frac{0,4}{65} + \frac{0,1}{70}.$$

Проведем дефаззификацию этого множества по методу центра тяжести:

$$a = \frac{45\cdot 0,1 + 50\cdot 0,3 + 55\cdot 0,5 + 60\cdot 1 + 65\cdot 0,4 + 70\cdot 0,1}{0,1+0,3+0,5+1+0,4+0,1} = \frac{140}{2,4} = 58,(3)\cdots \approx 58\ (\textit{лет}).$$

**Задача 2.** Представить в виде нечеткого множества понятия

а) «нормальная температура тела человека»

б) «средняя стоимость автомобиля»

в) «высокая заработная плата»

и выполнить дефаззификацию этого множества.

**ПРИМЕР.** Определить лингвистическую переменную и термы, составляющие терм-множество.

**РЕШЕНИЕ**

Рассмотрим переменную “скорость автомобиля”, которая оценивается по шкале “низкая", "средняя", "высокая” и “очень высокая".В этом примере лингвистической переменной является “*скорость автомобиля*”, термами - лингвистические оценки “*низкая*", "*средняя*", "*высокая*” и “*очень высокая*”, которые и составляют терм–множество.

**Задача 3.** Определить лингвистическую переменную и термы, составляющие терм-множество.

а) стоимость автомобиля оценивается по шкале “низкая", "средняя", "высокая” и “очень высокая"

б) температура тела человека оценивается по шкале «пониженная», «нормальная», «повышенная», «высокая», «очень высокая»

в) размер заработной платы оценивается по шкале «минимальная», «маленькая», «средняя», «высокая», «очень высокая».

***3. Операции над нечеткими множествами***

**ПРИМЕР.** Найти объединение, пересечение, дополнение и разности нечетких множеств $\mathrm{A}$ и $B$, если:

$$\mathrm{A} = \frac{0,5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,2}{x_3}+\frac{0,8}{x_4}+\frac{1}{x_5};$$

$$B = \frac{0,5}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0,5}{x_3}+\frac{0,6}{x_4}+\frac{0,4}{x_5}.$$

**РЕШЕНИЕ**

$$\overline{A} = \frac{0,5}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0,8}{x_3}+\frac{0,2}{x_4}+\frac{0}{x_5};\quad \overline{B} = \frac{0,5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,5}{x_3}+\frac{0,4}{x_4}+\frac{0,6}{x_5}.$$

$$\mathrm{A}\cap B = \frac{0,5}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0,2}{x_3}+\frac{0,6}{x_4}+\frac{0,4}{x_5};\quad \mathrm{A}\cup B = \frac{0,5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,5}{x_3}+\frac{0,8}{x_4}+\frac{1}{x_5};$$

$$\mathrm{A}\setminus B = \frac{0,5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,2}{x_3}+\frac{0,4}{x_4}+\frac{0,6}{x_5};\quad B\setminus \mathrm{A} = \frac{0,5}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0,5}{x_3}+\frac{0,2}{x_4}+\frac{0}{x_5}.$$

**Задача 4.** Найти объединение, пересечение, дополнение и разности нечетких множеств $\mathrm{A}$ и $B$, если:

а) А = $\frac{0,4}{x_1}+\frac{0,1}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0,8}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{0,6}{x_6};$

В = $\frac{0,2}{x_1}+\frac{0,5}{x_2}+\frac{0,1}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{0,5}{x_6};$

б) А = $\frac{0,4}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,3}{x_3}+\frac{0,8}{x_4}+\frac{1}{x_5};$

В = $\frac{0,5}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0,7}{x_3}+\frac{0,8}{x_4}+\frac{0,4}{x_5};$

в) А = $\frac{0,5}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0,7}{x_3}+\frac{0,8}{x_4}+\frac{0,4}{x_5};$

В = $\frac{0,5}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0,3}{x_3}+\frac{0,2}{x_4}+\frac{0,6}{x_5};$

## Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

### Темы докладов (сообщений) по дисциплине Дискретная математика

1. Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода.
2. Вывод формулы Стирлинга.
3. Различные достаточные условия гамильтоновости графа.
4. Доказательство теоремы Жордана.
5. Графы в математике. Примеры решения различных задач средствами теории графов.
6. Занимательные задачи теории графов.
7. Применение формулы Эйлера к решению некоторых прикладных задач.
8. История создания и развития нечеткой логики.

### Разноуровневые задания по дисциплине Дискретная математика

1 Составление глоссария и кластера основных терминов раздела (нескольких разделов) дисциплины (реконструктивный уровень)

2 Составление сравнительных, концептуальных таблиц по заданной теме (творческий уровень)

3 Составление, коррекция синквейнов и денотатных графов с основными понятиями (творческий уровень)

4 Составление аннотированного перечня источников сети Интернет (реконструктивный уровень)

5 Написание рецензий на готовые рефераты по разделам дисциплины, скачанные с различных сайтов (творческий уровень)

6 Составление таблицы толстых и тонких вопросов по разделам дисциплины (реконструктивный уровень)

7 Составление вопросов к ромашке Блума (таксономия целей) к разделам дисциплины (творческий уровень)

**Комплект тестовых заданий по дисциплине Дискретная математика**

| № п/п | Вопрос | Варианты ответов |
|---|---|---|
| 1. | Рекуррентной называется последовательность, у которой каждый член определяется как: | а) некоторая функция от предыдущих членов;<br>б) некоторая функция от последующих членов;<br>в) некоторая числовая константа;<br>г) произвольным образом. |
| 2. | Решить рекуррентное соотношение «в замкнутой форме» - это значит: | а) найти сумму n первых членов рекуррентной последовательности;<br>б) получить аналитическое выражение n-го члена последовательности через номер n;<br>в) получить аналитическое выражение n-го члена, не зависящее от номера n;<br>г) вычислить n- й член последовательности. |
| 3. | Последовательность чисел Фибоначчи задается соотношением: | 1. $\begin{cases} U_N = U_{N-1} + U_{N-2}, \\ U_1 = U_2 = 1. \end{cases}$<br>2. $\begin{cases} U_N = U_{N-1} + U_{N-2} + U_{N-3}, \\ U_1 = U_2 = U_3 = 1. \end{cases}$<br>3. $U_N = U_{N-1} + U_{N-2}$;<br>4. $\begin{cases} U_{N+2} = U_{N+1} + U_N, \\ U_0 = U_1 = 1. \end{cases}$ |
| 4. | Равенство: $C_n^k = (-1)^k \cdot C_{k-n-1}^k$ выражает: | а) соотношение симметрии;<br>б) формулу сложения биномиальных коэффициентов;<br>в) правило обращения верхнего индекса;<br>г) правило внесения. |
| 5. | Метод замены сумм интегралами заключается в: | а) выдвижении гипотезы о виде общего члена суммы, которая затем проверяется по индукции;<br>б) замене суммы на вычисление площади некоторой фигуры;<br>в) выделении первого и последнего членов суммы;<br>г) замене суммы соответствующим рекуррентным соотношением |
| 6. | | а) необходимо проверять непропорциональность всех |

| | | |
|---|---|---|
| | Чтобы проверить непропорциональность двух решений рекуррентного соотношения: | соответствующих членов этих последовательностей;<br>б) достаточно проверить непропорциональность первых двух членов; |
| 7. | Равенство:<br>$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$$<br>выражает: | а) соотношение симметрии;<br>б) формулу сложения биномиальных коэффициентов;<br>в) правило обращения верхнего индекса;<br>г) правило внесения. |
| 8. | Рекуррентное соотношение порядка k: | а) всегда имеет ровно k решений;<br>б) всегда имеет бесконечное множество решений;<br>в) может не иметь ни одного решения;<br>г) имеет либо бесконечное множество решений, либо единственное. |
| 9. | Базис рекуррентного соотношения k- го порядка:<br>1) может быть выбран однозначно;<br>2) состоит из k решений;<br>3) состоит из (k + 1)- го решения;<br>4) может быть выбран неоднозначно. | а) 1) и 3);<br>б) 2) и 4);<br>в) 3) и 4);<br>г) 1) и 4). |
| 10. | Следующее равенство<br>$$\sum_{k \in K} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k \in K} a_k$$<br>выражает: | а) свойство переименования индексов суммы;<br>б) сочетательный закон суммирования;<br>в) распределительный закон;<br>г) переместительный закон. |
| 11. | Метод суммирования, который состоит в решении вместо данной суммы соответствующего ей рекуррентного соотношения в замкнутой форме, называется: | а) метод приведения;<br>б) метод усложнения и упрощения;<br>в) метод гипотезы с подтверждением по индукции;<br>г) метод подбора репертуара. |
| 12. | Сумма всех биномиальных коэффициентов равна: | а) 2n;<br>б) $2^n$;<br>в) $n^2$;<br>г) $2^{n+1}$. |
| 13. | Эффект «комбинаторного взрыва», который возникает при решении некоторых задач, заключается: | а) в экспоненциальном росте числа решений задачи при линейном увеличении ее размеров;<br>б) в неограниченном возрастании численных решений задачи;<br>в) в том, что решение задачи выражается числом, которое равно некоторому биномиальному коэффициенту. |
| 14. | Следующее равенство<br>$$\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$$<br>выражает: | а) свойство переименования индексов суммы;<br>б) сочетательный закон суммирования;<br>в) распределительный закон;<br>г) переместительный закон. |
| 15. | Решение комбинаторной задачи с помощью рекуррентного соотношения означает, что: | а) решение сводится к решению той же задачи при меньших значениях n;<br>б) решение выражается положительным числом; |

| | | |
|---|---|---|
| | | в) решение находится в приближенном виде;<br>г) при решении возникает эффект «комбинаторного взрыва». |
| 16. | Равенство:<br>$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$<br>выражает: | а) соотношение симметрии;<br>б) формулу сложения биномиальных коэффициентов;<br>в) правило обращения верхнего индекса;<br>г) правило внесения. |
| 17. | Метод приведения заключается в: | а) выдвижении гипотезы о виде общего члена суммы, которая затем проверяется по индукции;<br>б) замене суммы на вычисление площади некоторой фигуры;<br>в) выделении первого и последнего членов суммы;<br>г) замене суммы соответствующим рекуррентным соотношением |
| 18. | Суммирующий множитель позволяет: | а) упростить выражение, стоящее под знаком суммы;<br>б) найти решение рекуррентного соотношения в «замкнутом виде» методом геометрических прогрессий;<br>в) свести решение рекуррентного соотношения к решению соответствующей суммы в «замкнутом виде»;<br>г) избавиться от суммы и перейти к решению соответствующего рекуррентного соотношения. |
| 19. | Геометрическая прогрессия является: | а) рекуррентным соотношением 1-го порядка;<br>б) второго порядка;<br>в) вообще не является рекуррентным соотношением. |
| 20. | Следующее равенство<br>$$\sum_k a_k = \sum_{p(k)} a_{p(k)}$$<br>выражает: | а) свойство переименования индексов суммы;<br>б) сочетательный закон суммирования;<br>в) распределительный закон;<br>г) переместительный закон. |
| 21. | Метод гипотезы с подтверждением по индукции заключается в: | а) выдвижении гипотезы о виде общего члена суммы, которая затем проверяется по индукции;<br>б) замене суммы на вычисление площади некоторой фигуры;<br>в) выделении первого и последнего членов суммы;<br>г) замене суммы соответствующим рекуррентным соотношением |
| 22. | Правило, по которому вычисляются значения биномиальных коэффициентов называется: | а) формула суммирования Эйлера;<br>б) алгоритм Краскала;<br>в) треугольник Паскаля;<br>г) бином Ньютона. |
| 23. | Арифметическая прогрессия является: | а) рекуррентным соотношением 1-го порядка;<br>б) второго порядка;<br>в) вообще не является рекуррентным |

| | | |
|---|---|---|
| | | соотношением. |
| 24. | Метод геометрических прогрессий при решении рекуррентного соотношения используется, если: | а) его характеристическое уравнение степени n имеет кратные корни;<br>б) вообще не имеет корней;<br>в) имеет n различных корней;<br>г) имеет только целые корни. |
| 25. | Метод подбора репертуара заключается в: | а) выдвижении гипотезы о виде общего члена суммы, которая затем проверяется по индукции;<br>б) замене суммы на вычисление площади некоторой фигуры;<br>в) выделении первого и последнего членов суммы;<br>г) замене суммы соответствующим рекуррентным соотношением |
| 26. | Равенство: $C_n^k = C_n^{n-k}$ выражает: | а) соотношение симметрии;<br>б) формулу сложения биномиальных коэффициентов;<br>в) правило обращения верхнего индекса;<br>г) правило внесения. |

**Критерии оценки результата**

Каждое правильно выполненное задание – 1 б.

«5» – 24-26 баллов, «4» – 18-25 баллов,
«3» – 12-17 баллов, «2» – 0-11 баллов