МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
История математики

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на аудиторные занятия и на самостоятельную работу;
- формах аудиторных занятий и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Основными формами аудиторных занятий по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе подготовки к практическим занятиям студенту необходимо изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. При подготовке доклада о жизни и творчестве выдающегося ученого студенту необходимо подобрать интересные биографические сведения; доклад должен сопровождаться презентацией в соответствии с требованиями, приведенными ниже:

–соответствие содержания презентации поставленной цели;

–соблюдение принятых правил орфографии, пунктуации, сокращений и правил оформления текста (отсутствие точки в заголовках и т.д.);

–отсутствие фактических ошибок, достоверность представленной информации;

–лаконичность текста на слайде;

–завершенность (содержание каждой части текстовой информации логически завершено);

–сжатость и краткость изложения, максимальная информативность текста.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим/лабораторным занятиям

№	Тема занятия	Рассматриваемые вопросы
1	История развития математики. Математика Древнего Египта и Вавилона	Древнейшие цивилизации. Древний Египет, египетская нумерация, математические знания египтян. Искусство счета, египетские дроби, геометрические знания. Значение математики Древнего Египта. Древний Вавилон, вавилонская нумерация. Вычислительная техника, арифметические задачи, алгебраические методы, геометрия у вавилонян. Значение математики Древнего Вавилона.
2	Математика Древней Греции	Греческая нумерация, развитие науки Древней Греции, Фалес Милетски, Пифагор, алгоритм Евклида, Архимед, Зенон Элейский, Демокрит, Евдокс Ксидский. Наука в эллинистических странах, «Начала» Евклида, Аполлоний

3		Пергский и его «Конические сечения», Герон Александрийский и «Метрики», «Математические построения» Клавдия Птолемея, Диофант. Значение греческой математики.
3	Особенности развития математики в Китае и в Индии	Древний и средневековый Китай. Основные математические трактаты. Математика в девяти книгах, правило Фэн чэн, Лю Хуэй «Математика морского острова», Сунь-Цзы, Чжу ши Цзе, Цинь Цзю-шао. Древняя и средневековая Индия. VII-V вв. до н.э – «Шулва сутра» («Книга веревки»), IV в. н.э. – Сиддханты, 499 – «Ариабхатиам» Ариабхатты, VI-VIII вв. – анонимная рукопись по арифметике и алгебре, 628 – «Усовершенствованная наука Брахмы» Брахмагупты, 850 – «Краткий курс арифметики» Магавиры, XI в. – «Курс арифметики» Шриддхары, XII в. – «Венец науки» Бхаскары II. Индийский метод составления магических квадратов.
4	Математика в Римской империи	Диофант Александрийский, Папп Александрийский, Теон Смирнский, Архимед
5	Математика народов Средней Азии и Ближнего Востока	Арабские нумерации, «Об индийском счете Мухаммед ал-Хорезми. Развитие математики в странах ислама, введение десятичных дробей ал-Каши, Омар Хайам, извлечение корня любой степени из целого числа в «Сборнике по арифметике с помощью доски и пыли» Насир ад-Дина ат-Туси, «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических представлений» Абу-л-Вафы ал-Бузджани, «Рассуждение о циркуле для больших кругов» Ибн ал-Хайсама, «Книга о науке звезд» Абу Абдаллаха ал-Баттани, «Канон Масуда» ал-Бируни. Значение математики стран ислама.
6	Математика Средневековья и эпохи Возрождения	Математика Средневековья, «Арифметика по образцу индийцев» Максима Плануда, Иоанн Педиасим и Исаак Аргир, квадриум, Аниций Манлий Северин Боэций, монах Беда Достопочтенный, «Книга абака» и другие труды Леонардо Фибоначчи, Иордан Неморарий, Томас Брадвардин, Николя Орем. Эпоха Возрождения, алгебраист Фра Лука Бартоломео де Пачоли, Никола Шюке, Николо Тарталья, Джероламо Кардано, «Алгебра» Рафаэль Бомбелли и мнимые величины, «Десятая» Симона Стевина и десятичные дроби, Франсуа Виетт, Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер. Значение математики эпохи Возрождения.
7	Математика Нового времени	Развитие математики в XVII веке. Аналитическая геометрия, Рене Декарт, Ферма, Л. Эйлер. Усовершенствование вычислительных методов и средств в XVII веке. Джон Непер, Джон Спейдель, Генри Бригг и таблицы логарифмов. Вильгельм Шиккард, Блез Паскаль, Лейбниц и первые счетные машины. Интеграционные и дифференциальные методы, Кеплер, Исаак Ньютон, Готфрид Лейбниц. Развитие математики в XVIII веке, И. Бернули, Леонард Эйлер. Развитие аппарата математического анализа, теорема Тейлора, Жан Лерон Даламбер Развитие геометрии, Гаспар Монж, Создание предпосылок современной алгебры, «Всеобщая арифметика» И. Ньютона, Жозеф Луи Лагранж. Теория чисел, работы Эйлера, Пьер Ферма. Методы теории вероятностей и комбинаторного анализа.
8	Развитие математики в России	Древнерусская нумерация, практические арифметика и геометрия, русские арифметические учебники XVII века, «Арифметика» Магницкого. Основание Петербургской Академии наук, Леонард Эйлер и его ученики и ближайшие соратники. XIX век: Н.И. Лобачевский, М.В. Остроградский,

		О.И. Сомов, П.Л. Чебышев, А.Ю. Давидов, С.В. Ковалевская. XX век: Н.Н. Лузин, А.Я. Хинчин и А.Н.Колмогоров, П.С. Александров и др.
9	Современная математика	Математика XIX века. Геометрия, Карл Фридрих Гаусс, У Гамильтон, школа проективных геометров в Германии, Бернхард Риман, геометрия Лобачевского, Феликс Клейн. Математический анализ, Огюстен Луи Коши, Вейерштрасс, Абель, Якоби и др. Алгебра и теория чисел, Эварист Галуа. Теория вероятностей, Карл Пирсон, Огаст де Морган, Джордж Буль. Обоснование математики. Коши, Вейерштрас, Пеано. Теория множеств, Георг Кантор, Анри Пуанкаре, Давид Гильберт. XX век: основные достижения, Герман Минковский

Общая характеристика основных этапов развития математики

Тема: Математика Древнего Египта и Вавилона

Древнейшие цивилизации

Наиболее древние письменные математические тексты, известные в настоящее время, сохранились примерно от начала II тысячелетия до н. э. К этому времени относится расцвет двух великих цивилизаций древности – Египта и Вавилона. Именно в этих государствах появляются математические задачи, к которым приводит необходимость расчетов при проведении каналов, строительстве плотин, дворцов, храмов, военных укреплений и т.д. Об этих задачах и говорят те математические документы, которые в том или ином виде сохранились до нашего времени. В Египте математические тексты писались па хрупком папирусе, иногда на коже, и сохранились только те тексты, которые были положены в пирамиды, вавилонские же тексты были написаны клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась, и до нас дошло огромное число математических клинописных текстов. Между египетскими и вавилонскими математическими текстами есть существенные различия.

Рис. 1. Карта Древнего Египта

Древний Египет

Большинство математических текстов, сохранившихся в памятниках Древнего Египта, написаны на папирусе – бумаге, выделанной из стебля одноименного растения. В эпоху Древнего царства египтяне писали при помощи иероглифов – рисуночного письма, в котором каждый рисунок изображал слово или слог. Затем иероглифическое письмо было заменено более простым иератическим письмом, где от каждого иероглифа осталось несколько характерных штрихов, а ещё позже возникает скорописное демотическое письмо.

Рис. 2. Папирус Райнда (Ахмеса)

Самый большой, сохранившийся до наших дней древнеегипетский математический текст – это так называемый папирус Райнда, содержащий 84 задачи. Ещё один большой папирус содержит 25 задач. Эти два текста – важнейшие, хотя и не единственные. Оба папируса относятся примерно к началу II тысячелетия до н. э. Почти никаких данных нет о математических знаниях Раннего и Древнего царств. Сохранились только числовые записи, да рисунки на каменных плитах и стенах, свидетельствующие, что художники умели изображать предметы в уменьшенном масштабе с помощью квадратных сеток. Однако известно, что на протяжении III тысячелетия до н. э. существовали развитая письменность, нумерация и метрология, на основании астрономических наблюдений был разработан календарь. Это было время строительства первых пирамид.

Рис. 3. Писец

Носителями научных знаний в Древнем Египте были так называемые писцы – чиновники, состоявшие на государственной или храмовой службе. Писцы обучались в специальных школах. Имелись и высшие писцовые школы, имевшие торжественное название «дома жизни». Упомянутые выше математические папирусы были составлены для учебных целей.

Египетская нумерация

Египетская иероглифическая нумерация была чисто аддитивной: египтяне имели особые знаки только для единицы, десяти, ста, тысячи, десяти и ста тысяч, миллиона и десяти миллионов. При записи числа иероглифы писались столько раз, сколько в данном числе единиц в соответствующих разрядах, причем разряды записывались в порядке, обратном нашему (справа налево).

Рис. 4. Система счёта

В более скорописном иератическом письме, которым и написаны дошедшие до нас математические папирусы, имеются уже особые знаки как для первых девяти чисел, так и для десятков, сотен и тысяч, выработавшиеся из иероглифических изображений этих чисел.

Кроме обозначений целых чисел, египтяне имели также специальные обозначения для некоторых дробей.

Математические знания египтян

Математические знания египетского писца позволяли ему производить расчеты при строительных работах, сборе налогов, обмене и распределении продуктов, измерении площадей полей и объемов плотин и зернохранилищ и т. п. Основное внимание в египетских текстах сконцентрировано не на методах решения задач, а на самих вычислениях. И сами методы часто зависят от тех вычислительных трудностей, которые встают перед решающим задачу. Задачи в подавляющем большинстве еще совсем не абстрагированы и не обобщены.

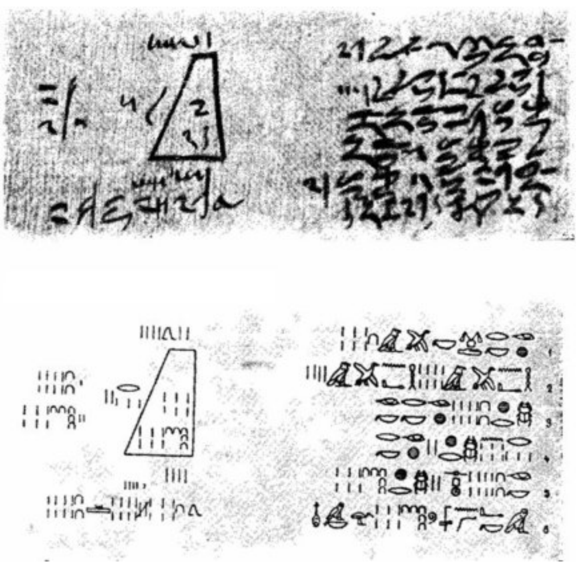


Рис. 5. Московский папирус

Конечно, изложение математики, письменное или устное, предполагает некоторую систематизацию материала. Она встречается в папирусе Райнда. Классификация задач производилась не по методам, а по темам. При этом фактически определялась математическая суть данной группы, а значит, единый метод решения, хотя он не был сформулирован общим образом. Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах. Однако при решении вычислитель пользуется некоторыми общими законами. Иногда дается проверка найденного решения. Для тренировки учащихся составлялись задачи развлекательного характера, не имевшие прямого практического применения, либо только имевшие вид практических.

Искусство счета

Счет у египтян был по своей идее очень прост. Он состоял из умения складывать, удваивать, дополнять дроби до единицы. Сама система счисления была аддитивной. В такой системе счисления сложение в принципе возможно без знания наизусть таблицы сложения, достаточно механически присчитывать единицы и уметь переходить из разряда в разряд.

Умножение на целое число и деление без остатка производились с помощью удвоения, т. е. однократного сложения числа с самим собой. У египетского писца не было в распоряжении правил для умножения и деления чисел, не было таблицы умножения. Удвоение – простейший случай умножения, но ограничение им влекло за собой громоздкость умножения и деления даже в пределах области целых чисел, не говоря уже о дробях. Особо выделялись еще умножение на 10 и 5, т. е. учитывались свойства десятичной системы. Деление производилось как действие, обратное умножению. Непосредственно «пробуется», сколько раз делитель содержится в делимом. Частное складывается из чисел, соответствующих отмеченным слагаемым делителя. Наряду с удвоением при делении употреблялось раздвоение.

Рис. 6. Иероглифическая запись числа 35736

С возведением в степень и извлечением корня египтяне имели дело при нахождении площади квадрата и объема куба или стороны квадрата по его площади. Однако специальной терминологии дл этих действий ещё не существовало.

Египетские дроби

Самым трудным был случай нецелого деления. Общими рациональными дробями египтяне не оперировали. Но представления, равносильные идее общей дроби, у египтян имелись, ибо они умели по-своему выражать частные. Для этого им служили аликвотные дроби – доли единицы. Это первое появление дробей из процесса дробления целого на части, если не считать «натуральных» дробей типа 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/6 и 1/8, которые имели индивидуальные названия. Деление же единицы на большое число в практике вряд ли встречалось, но выполнялось в задачах вычислителями «теоретически», при мысленном дроблении.

Аликвотные дроби типа *1/п* являются первыми алгоритмическими дробями. В древнеегипетской математике далее этих основных дробей, получивших название египетских, развитие не пошло. Тем самым в вычислительной технике древнего Египта появилась теоретико-числовая задача о разложении дробей па сумму аликвотных. Задача, не имеющая единственного решения, решалась египтянами эмпирически, в несколько этапов.

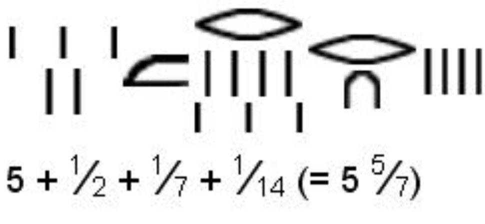


Рис. 7. Пример записи дробей из папируса Райнда

Самые простые разложения писцы должны были знать наизусть, они встречались на каждом шагу, и к ним привыкли. В текстах они употребляются без особых разъяснений. В дальнейшем, начиная с *п* = 31, когда вычисления усложняются, прибегают методу так называемых красных вспомогательных чисел. Они представляют собой при известной модернизации дополнительные множители. Но от современных дополнительных множителей они отличаются принципиально – красные числа могут быть не только целыми, но и дробными, т.к. здесь общим знаменателем является не наименьшее общее кратное, а просто в большинстве случаев наибольший из знаменателей данных дробей. Все остальные дроби выражаются через эту наименьшую дробь, «измеряются» некоторой минимальной мерой, которая не всегда может целое число раз уложиться в заданных величинах.

При решении вычислительных задач понятие числа развивалось. Дробь стала пониматься как мера, как именованное число: «столько-то таких-то». Однако это обобщение не привело еще к выделению более общего понятия дроби. Вместе с тем поражает искусство, с каким владел древнеегипетский вычислитель техникой операций.

Геометрические знания

Геометрические знания египтян относятся к измерению площадей и объемов. Некоторые найденные при этом результаты были замечательными, но в отдельную отрасль математики геометрия еще не превратилась.

Площади прямоугольников, треугольников и трапеций вычислялись по точным правилам, площадь произвольного четырехугольника – по приближенному правилу, как произведение полусумм пар противоположных сторон. Все такие задачи возникли из практики землемерия. Не было термина «сторона» фигуры и самого термина «фигура» – говорили о поле, об участке с границами или с «шириной» и «длиной». Почему египтяне пользовались только что приведенным правилом для площади произвольного четырехугольника, погрешность которого в общем случае может быть сколь угодно велика? Вероятно, на деле это правило применялось к участкам, которые по форме своей близки к прямоугольнику. Сознавали ли землемеры, что правило только приближенное – неизвестно. При вычислении площади круга египтяне пользовались довольно хорошим приближением, полагая ее равной квадрату со стороной в 8/9 диаметра.

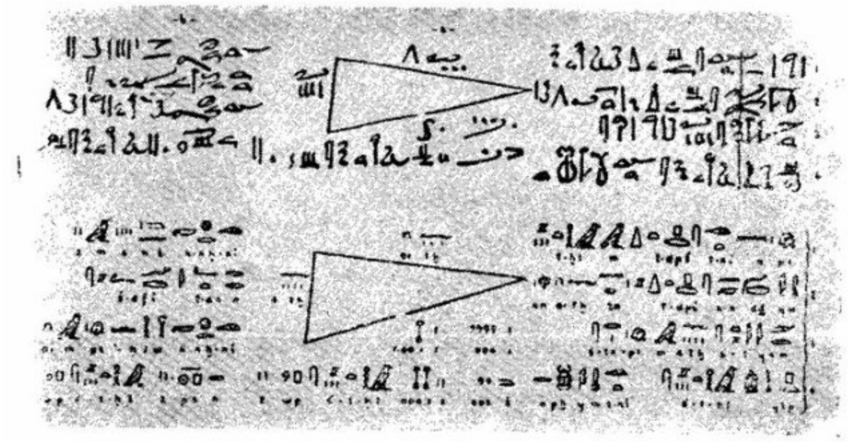


Рис. 8. Площадь треугольника

Также египтяне вычисляли объемы многих тел: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра – как произведение площади основания на высоту. Такие расчеты производились в задачах на обмер зерна в амбарах, имеющих эти формы, и главное внимание уделялось переводу мер ёмкости сыпучих тел в геометрические меры объема и обратно.

Кроме того, египетские строители умели математически охарактеризовать угол наклона α боковой грани к квадратному основанию пирамиды числом локтей, на которое высота, опущенная из вершины пирамиды на сторону основания, отходит от вертикали при подъеме на один локоть (в сущности, котангенс α).

Значение математики Древнего Египта

В Древнем Египте математика представляла собой совокупность знаний, еще не расчленившуюся на арифметику, алгебру, геометрию и выступающую как собрание правил для численного решения простейших арифметических, алгебраических и геометрических задач. Проблемы, стоявшие перед египетскими писцами, были главным образом практические. Многие решения находили эмпирически, и не удивительно, что они оказывались иногда громоздкими и требовали преодоления больших трудностей. Но наряду с этим еще в начале II тысячелетия до н. э. шла интенсивная работа творческой мысли, задачи обобщались и начинали принимать более абстрактный характер. При исследовании отдельных проблем вырабатываются приемы геометрических и арифметико-алгебраических преобразований, которые, как и проверка решений, уже предвещали дальнейший рост этих составных частей математической дедукции.

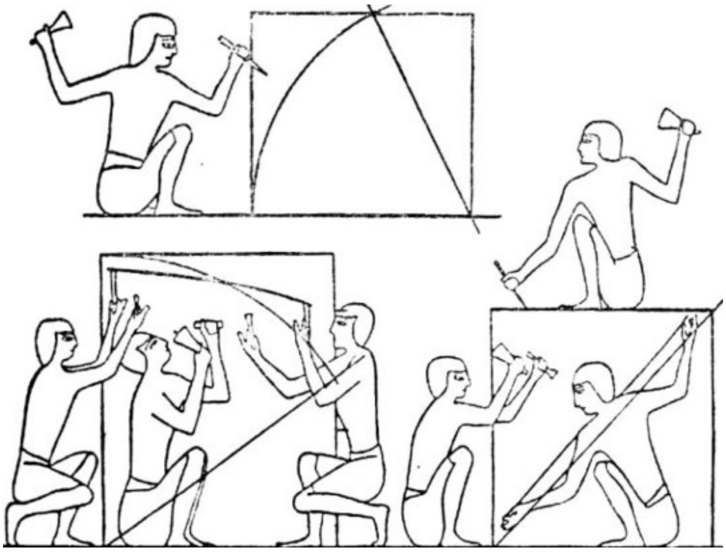


Рис. 9. Строительство пирамид

Древний Вавилон

Культуру Древнего Двуречья называют вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. Однако первоначально эта культура возникла значительно южнее, на берегу Персидского залива, где жили шумеры. Именно они изобрели клинописное письмо, при котором буквы выдавливаются в виде нескольких клиньев деревянной палочкой на сырой глине, подвергаемой затем обжигу. Шумеры пользовались шестидесятеричным счетом, который лег в основу вавилонской математики и отразился на нашем делении круга и счете времени.

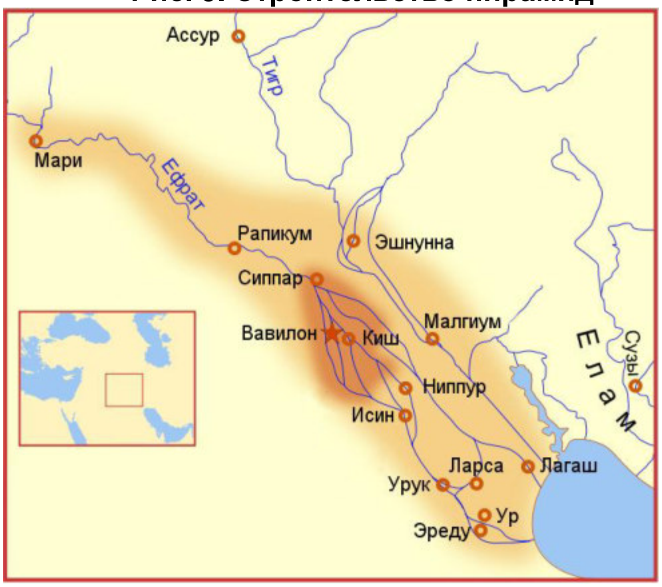


Рис. 10. Карта Древнего Вавилона

Рис. 11. Два писца

переписывают дань

Источниками для изучения математики Вавилона являются математические клинописные тексты. Среди множества глиняных табличек (около 500 000) самых разных эпох, известно примерно 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами.

В Древнем Двуречье общественными работами также руководили писцы, занимавшиеся учётом хозяйства, составлением торговых документов и деловой перепиской. Писцы были тесно связаны с храмами, в которых и хранились глиняные таблички с клинописными текстами. Специальность писца была почетной. Нередко писцами становились сыновья правителей, ведь писцы относились к правящему классу. «Дом табличек» – так называлась школа или академия, где писцы обучались.

Математические клинописные тексты, как и египетские, носят учебный характер и содержат в основном расчетные задачи; однако вавилонская вычислительная техника была гораздо более совершенна, а среди задач выделяется обширный класс алгебраических задач, которые выражаются системами линейных уравнений и уравнений второй степени. И, хотя в клинописных текстах нет доказательств, методы вычислений показывают, что их авторы знали и применяли законы алгебраических дробей и преобразований. В целом вавилонская математика в большей мере, чем египетская, приобретает знакомый нам вид самой абстрактной из наук, и внутренние потребности получают в ее развитии большее значение.

Рис. 12. Шумерская клинописная табличка

Вавилонская нумерация

В Вавилоне впервые встречается с последовательной позиционной нумерацией. Эта нумерация была построена на использовании только двух клинописных знаков, один из которых обозначал 1 и 60, а второй – 10 и 600. Шумеры, впервые применившие шестидесятеричный счет, обозначали 60 и 600 клиньями большего размера, чем 1 и 10, но вавилоняне стали обозначать соответственные числа одинаковыми клиньями. При записи чисел от 1 до 59 знаки единицы и десяти записывались столько раз, сколько в данном числе единиц и десятков, причем разряды располагались в том же порядке, что и у нас. Числа, кратные 60, от 60 до 59–60 записывались точно так же, как соответственные множители от 1 до 59 слева от чисел, меньших 60. Вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счисления и шестидесятеричными дробями. В более позднее время вавилоняне ввели знак, имеющий значение нуля. Также специальными знаками обозначались дроби 1/2, 1/3 и 2/3.

Рис. 13. Вавилонская нумерация

Вычислительная техника

И позиционный характер вавилонской нумерации, и довольно большое её основание наложили печать на всю технику вычислений. Сложение и вычитание производили так же, как это делается в десятичной позиционной системе целых и дробей. При умножении затруднение, связанное с большим основанием системы нумерации, преодолевалось с помощью набора специальных таблиц. Операцию деления в вавилонской математике можно назвать проблемой №1. В отличие от египтян, вавилоняне деление свели к умножению на обратное, даже термина «делить» у них не существовало. Главное внимание было уделено составлению таблиц обратных величин.

Рис. 14. Вавилонские таблицы

Широкое применение различных таблиц – характерная особенность математики древнего Вавилона. Имелись таблицы степеней некоторых чисел до десятой включительно, пригодные одновременно для отыскания содержащихся в них корней, таблицы, ставящие в соответствие степени 2^n их показатели n, таблицы чисел вида $n^2 + n^3$, применявшихся в задачах, которые приводились к кубическому уравнению.

Арифметические задачи

Арифметические задачи не составляют характерной особенности вавилонской математики. Методы решения опирались в основном на идеи пропорциональной зависимости и среднего арифметического. Даже задачи на раздел серебра между братьями в арифметической прогрессии решались па основе пропорциональной зависимости. Более развиты, чем у древних египтян, были представления об арифметической и геометрической прогрессиях. Вавилоняне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии с данными первым и последним членами. В некоторых текстах находятся задачи с суммированием n членов геометрической прогрессии, правда способ решения из текста не совсем ясен.

В клинописных текстах встречаются первые задачи на проценты. В отличие от Египта с его натуральным хозяйством, в Древнем Вавилоне, стоявшем на перепутье торговых караванов многих народов Передней Азии, рано появились денежные знаки и кредит. Начисляли здесь 12 на 60, т. е. 20%. Вычислялись также сложные «проценты».

Алгебраические методы

В клинописных текстах можно найти большое число задач, представляющих собой уравнения и системы уравнений первой и второй степени, записанных без символов, но в своей особой терминологии и решаемых с помощью арифметико-алгебраических преобразований. Алгебра линейных и квадратных уравнений достигла высокого уровня уже в эпоху Хаммурапи, рассматривались также уравнения более высоких степеней.

Рис. 15. Вычисление диагонали квадрата

В случае двух неизвестных одно называлось длиной (x), другое – шириной (y), их произведение – «площадью», «полем» или «длиной-шириной». Говорилось также о «сторонах моих квадратов» (т. е. x^2 и y^2). При этом в примерах всегда «длина» больше «ширины». В задачах, приводящихся к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная – «глубина» (z), а произведение трех неизвестных именовалось «объемом». Приведенная терминология свидетельствует о происхождении ряда алгебраических задач из геометрии, но сами задачи имели совершенно отвлеченный характер. Это проявляется уже в том, что с неизвестными величинами, по названию имеющими различные измерения, обращались как с однородными, составляя различные выражения. «Длина», «ширина», «площадь» и т. д. изображались шумерскими знаками в текстах, написанных на аккадском языке. Поскольку разговорным был уже аккадский язык, а шумерский вышел из употребления, эти знаки приобретали характер настоящих математических символов. В некоторых случаях употреблялись и вовсе отвлеченные названия «множитель» и «обратное», обозначавшие x и $y = 1 / x$.

Уравнения первой степени и их системы в клинописных текстах встречаются редко. Способы решения применялись различные: исключение неизвестных, введение вспомогательных неизвестных и др. Область, в которой вавилонянам принадлежит основной успех – это решение задач на квадратные уравнения и системы, сводящиеся к ним. Таких задач в клинописных текстах подавляющее большинство. Учение о квадратных уравнениях явилось основой существенно нового этапа в развитии математики, когда наряду с арифметикой и измерением фигур её полноправной частью стала алгебра. Для решения квадратных уравнений потребовалось многое, и сами они вызвали к жизни цепь новых понятий. Вероятно, с развитием методов решения квадратных уравнений задачи, приводящие к линейным уравнениям и особенно к их системам, стали решать алгебраически в более широком объеме. В целом математическое мышление поднялось на новый, значительно более высокий уровень общности и отвлеченности.

Рис. 16. Измерение земельного участка

Вавилоняне решали также некоторые задачи, выражающиеся кубическими уравнениями. Ставился вопрос об определении ребер прямоугольного параллелепипеда по данной сумме объема и площади одной грани и некоторым условиям, наложенным на ребра. В зависимости от этих условий получаются уравнения первой, второй и третьей степеней.

В задачах на квадратные и высшие уравнения корни всегда являются рациональными. Однако в геометрических приложениях вавилоняне встретились и с проблемой извлечения квадратных корней из неквадратных чисел. Тексты ничего не сообщают о том, приблизились ли математики древнего Двуречья к идее иррационального числа, они лишь содержат правило приближения.

Геометрия у вавилонян

Геометрические знания вавилонян относились большей частью к измерению простейших фигур, встречающихся при межевании земель, возведении стен и насыпей, строительстве плотин и каналов и т. п. Сохранилось немало планов земельных угодий, разделенных на прямоугольники, трапеции и треугольники, а также планов различных строений, свидетельствующих, что вавилонский землемер или архитектор должен был хорошо чертить и проводить геометрические расчеты. Вавилоняне значительно дальше египтян продвинулись в разработке более общих и отвлеченных отделов геометрии. Об этом можно судить в основном по их задачам, так как тексты не содержат ничего, кроме задач, их решения и, в виде редкого исключения, формулировки общих правил, теорем или определений. Область рассматриваемых плоских и телесных объектов в главном совпадала с египетской, но была расширена: изучению были подвергнуты некоторые правильные многоугольники, сегмент круга, усеченный конус. Наряду с точными правилами вавилоняне употребляли и приближенные. Длину окружности вычисляли, утраивая диаметр; с таким же значением π = 3 определяли площадь круга. Однако эта площадь выражается не непосредственно через диаметр, а через длину окружности. Таким образом, вавилонское правило вычисления площади круга впервые связывало эту величину с длиной окружности.

Рис. 17. Вавилонская табличка, содержащая геометрические задачи

Одно из лучших открытий, сделанных в Вавилоне – в клинописных текстах впервые появляется, и притом для общего случая, теорема Пифагора. Вавилоняне знали числовое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Как пришли вавилоняне к теореме Пифагора, неизвестно. Но еще в древневавилонскую эпоху знали множество троек целых «пифагоровых чисел». Теорема Пифагора находила в Вавилоне разнообразные применения. С её помощью, например, вычисляли диагональ квадрата и радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника.

Значение математики Древнего Вавилона

Насколько можно судить по известным до сих пор текстам, математика в древнем Вавилоне достигла более высокого уровня, чем в древнем Египте. Но в древневавилонской математике внутренние логические связи между многочисленными правилами были еще слабыми и отдельные цепочки выводов не объединялись в целостные системы.

Тем не менее, открытия, сделанные вавилонскими писцами, поражают своим размахом. Здесь впервые возникла система счисления, основанная на позиционном принципе и, позднее, на употреблении знака нуля. Здесь впервые же была разработана алгебра линейных и квадратных уравнений и даже рассмотрены простейшие уравнения более высоких степеней. Если к этому добавить открытие теоремы Пифагора и начала учения о правильных многоугольниках в области геометрии и в самой тесной связи с задачами геометрии постановку и решение первых задач теории чисел, то значимость достижений математики древнего Вавилона не может вызывать сомнений.

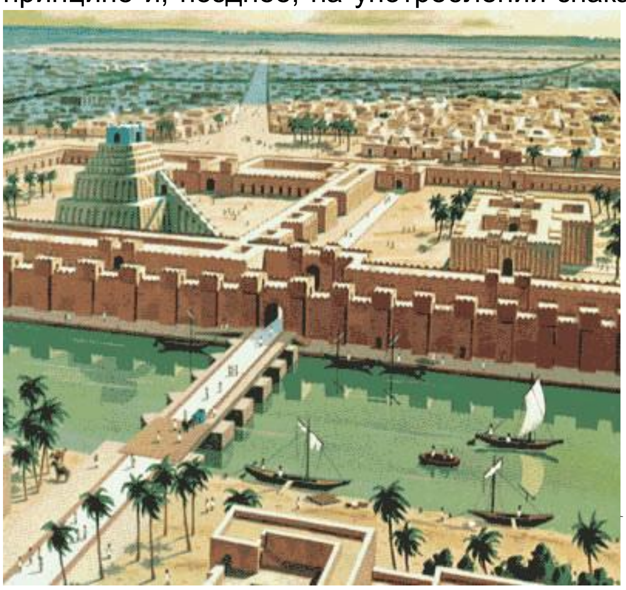


Рис. 18. Общий вид Вавилона

Тема: Математика Древней Греции

В Древней Греции происходит рождение науки, основанной на строгих доказательствах. Этот важнейший скачок в истории науки относится к VI – V вв. до н. э. Математика с поражающей быстротой преобразуется в абстрактную дедуктивную науку, в которой основным методом становится логическое доказательство. В VI в. до н. э. были построены первые математические теории и первые математические модели мира. Учёные пришли к мысли, что математика является универсальным языком для выражения законов природы. В течение следующих трех веков создаются теории, тонкость и глубина которых были поняты и оценены только в XIX в., а иногда лишь в XX в. При этом стиль математических произведений того времени не отличался от современного. Теория строилась исходя из конечного числа посылок, и её положения выводились из них с помощью конечной цепочки логических умозаключений или эффективных конструкций. Такой метод изложения греки нашли впервые, показав, как можно и как нужно строить науку.

Рис. 19. Карта Древней Греции

Греческие нумерации

Первоначально греки пользовались так называемой аттической нумерацией. Она была основана на аддитивном принципе и очень близка к римской нумерации. Основные знаки этой нумерации означали 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000. Аттическая нумерация была тесно связана со счетной доской – абаком. Эта нумерация была вытеснена более компактной буквенной нумерацией. Так как классический греческий алфавит содержит 24 буквы, греки использовали в буквенной нумерации три «архаические» буквы. Для отличия букв, представляющих числа, над ними ставилась черточка. Попытки записать в алфавитной системе числа, большие 1000, привели к обозначениям, которые можно рассматривать как зачатки позиционной системы. Так, для обозначения 1000 применялась та же буква, что и для единицы, но снабженная черточкой слева внизу. Однако окончательного перехода к позиционной системе счисления в Греции сделано не было.

Развитие науки Древней Греции

Начало греческой науки положила ионийская школа натурфилософии, основателем которой был «отец греческой науки» Фалес. Неотъемлемой частью натурфилософии ионийцев были астрономия и математика. Ионийцы первые среди эллинов занялись геометрией, причем Фалес доказал, что диаметр делит круг пополам, нашел предложение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника и доказал теорему о равенстве двух треугольников по стороне и двум углам, а также открыл, что при пересечении двух прямых получаются равные углы. О доказательствах Фалеса ничего не известно, видимо, он широко пользовался перегибанием и наложением фигур.

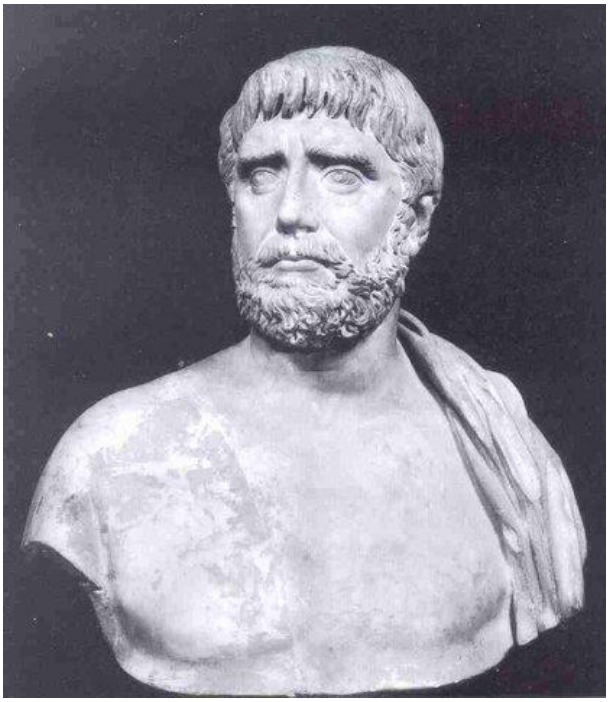


Рис. 20. Фалес Милетский

Коренное преобразование математики по традиции единодушно приписывают Пифагору. Ему принадлежит первое построение геометрии как дедуктивной науки. К сожалению, до нас не дошли отрывки из математических сочинений Пифагора. Известно, что он основал знаменитый пифагорейский союз. Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией и арифметикой. В их школе возникло представление о шарообразности Земли и существовании множественности миров. Содержание геометрии пифагорейцев сводилось в основном к планиметрии прямолинейных фигур. Венчало их систему доказательство знаменитой «теоремы Пифагора», которая до этого была известна только для частных случаев. Трудно переоценить значение этой теоремы, обобщение которой и до сих пор лежит в основе определения всех метрических пространств. Значительно продвинулись пифагорейцы и в стереометрии.

Первоначально полагали, что все отрезки соизмеримы, т. е. что отношение любых двух отрезков можно выразить отношением целых чисел; таким образом, метрическая геометрия сводилась, по их мнению, к арифметике рациональных чисел. Число для пифагорейцев – это собрание единиц, т. е. только целое положительное число. Единицы, составляющие число, считались неделимыми и изображались точками, которые пифагорейцы располагали в виде правильных геометрических тел, получая ряды «треугольных», «квадратных», «пятиугольных» и других «фигурных» чисел. Изучая свойства чисел, пифагорейцы первые обратили внимание на законы их делимости. Они разбили все числа на чётные и нечётные и на простые и составные. Пифагорейцы создали так называемое учение о чётных и нечётных числах, фактически теорию делимости на 2.

Рис. 21. Рафаэль Санти. Пифагор

В Греции начали оперировать с дробями вида m / n, причем умели производить с ними все действия арифметики с тем ограничением, что вычитать можно было лишь из большего меньшее. Сложение и вычитание производились путем приведения к общему знаменателю, дроби умели сокращать, умножать и делить. Появились и первые теоретические исследования. Все пары целых чисел разбивались на непересекающиеся классы пар, имеющих одно и то же отношение, наименьшая пара полностью характеризовала класс, к которому принадлежала.

В основе общей теории делимости лежит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида). Строго доказывается основная теорема теории делимости. Из неё получают закон однозначности разложения на простые множители, который является основой всей арифметики целых чисел.

Рис. 22. Рафаэль Санти. Афинская школа

Открытие несоизмеримых отрезков явилось поворотным пунктом в развитии математики. Оно означало, что целых чисел и их отношений недостаточно для выражения отношений любых двух отрезков. По-видимому, к Теэтету восходит идея применить алгоритм Евклида в качестве критерия для установления несоизмеримости двух отрезков. Открытие несоизмеримости также явилось причиной того, что в греческой математике обратили внимание на соотношение между геометрией и арифметикой. Арифметика базировалась на понятии целого числа. Рациональные числа мыслились, как пары целых. После того как выяснилось, что отношение двух отрезков, вообще говоря, не может быть выражено с помощью отношения целых чисел, математическая система пифагорейцев была разрушена. Тогда греки решили строить математику не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии, определив непосредственно для геометрических величин все операции алгебры. Это была ошибка в стратегии, хотя на первых порах античная математика получила большие тактические преимущества. Построение алгебры на основе геометрии впервые позволило обосновывать общим образом некоторые теоремы и правила алгебры, однако при дальнейшем развитии геометрическое облачение мешало гармоничному развитию отдельных частей математики.

Уже в пифагорейской школе началось построение алгебры на основе геометрии – так называемой геометрической алгебры. Вслед за тем геометрический язык стал применяться в теории чисел: теперь все числа представлялись отрезками, полученными повторением конечное число раз отрезка, принятого за единицу. Основными объектами геометрической алгебры были отрезки и прямоугольники, а также параллелепипеды.

Геометрическая алгебра основывалась на античной планиметрии, представлявшей собой геометрию циркуля и линейки. Поэтому она была максимально приспособлена для исследования тождеств, обе части которых являются квадратичными формами, и для решения квадратных уравнений. Этим и ограничивалось, по существу, поле ее приложений.

В V в. до н. э. были поставлены три задачи, сразу же получившие большую известность. Это удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Исследование задачи удвоения куба, привело к введению в математику новых чрезвычайно важных кривых – конических сечений. Кривые были многосторонне изучены уже в древности и являлись основными геометрическими объектами наряду с прямыми и окружностями. Архимед изучал тела, полученные вращением конических сечений, и определял их объемы. Он же систематически применял конические сечения для решения задач, эквивалентных кубическим уравнениям.

Рис. 23. Женщина обучает детей геометрии

Систематическое исследование задач, эквивалентных кубическим уравнениям, относится только к эпохе эллинизма. Архимед рассмотрел кубические уравнения некоторого вида и дал метод их решения. Однако исследование кубических уравнений оставалось для греков трудной задачей, с которой, в её общем виде никто, кроме Архимеда, не мог справиться. Решение отдельных задач, эквивалентных кубическим уравнениям, греческие математики получали с помощью нового геометрического аппарата конических сечений.

Вскоре греческими математиками был сделан новый решительный шаг в развитии алгебры: геометрическая оболочка была сброшена, и началось построение буквенной алгебры на основе арифметики.

Вместе с открытием несоизмеримых величин в математику вошло понятие бесконечности. Возникла необходимость изучения свойств бесконечных множеств и исследования бесконечных последовательностей. К этим вопросам приводили две основные проблемы, стоявшие перед античной математикой, – проблема действительного числа и проблема меры. Неясным был и вопрос о строении отрезка и других непрерывных величин. Существовало учение, согласно которому непрерывные величины состоят из бесконечного множества неделимых частиц. Трудности, связанные с понятиями бесконечного и непрерывного, привели к глубокому кризису основ античной математики. Вскрыть действительные трудности, таящиеся в понятиях непрерывного и бесконечного, и тем самым показать, сколь еще не совершенны были представления о них, удалось Зенону Элейскому. Он придал своим рассуждениям острую и красочную форму парадоксов. Каждая эпоха предлагала свое решение этих парадоксов, интерес к ним не ослабел и в наши дни.

Рис. 24. Зенон Элейский

Один из способов построения математики был предложен великим философом-атомистом древности Демокритом. Он начал составлять тела из конечного числа элементарных частей – атомов, объемы которых известны. Объем всего тела получался суммированием объемов этих элементарных частей. Но пирамиду нельзя составить из конечного числа призм, тем более это относится к конусу и цилиндру, поэтому для строгого обоснования результатов Демокрита необходим предельный переход, которым он не пользовался. Поэтому Архимед и считал его результаты недоказанными.

Рис. 25. Антуан Куапель. Демокрит

Путь Демокрита – путь построения «конечной математики» – был совершенно непригоден для исследования непрерывных величин. Но в его концепции содержалась мысль, которая была по-настоящему оценена и развита только Архимедом. Имеется в виду принцип приближенного, но сколь угодно точного, составления любых тел из большого числа элементарных частей, размеры которых известны. В этом можно видеть зародышевую форму интеграционных методов.

Впервые ту точку зрения, которая стала общепринятой в греческой математике, высказал философ Анаксагор. Не отрицая бесконечной делимости величин, Анаксагор считал, что неправомерно мыслить бесконечный процесс законченным. В результате деления отрезка всегда будут получаться отрезки, которые будут вновь делимы. Новые основы математики – общее учение об отношениях и строгие методы предельных переходов – были созданы Евдоксом Книдским. Наиболее глубокие исследования Евдокса относятся к области, которая теперь называется введением в анализ бесконечно малых.

В основе теории Евдокса лежала новая, более общая концепция величины. В «старой» теории отношений основные предложения приходилось доказывать отдельно для чисел, отрезков и площадей. Понятие величины по Евдоксу охватывает и числа и непрерывные величины: отрезки, площади, объемы. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства.

Рис. 26. Евдокс Ксидский

Наука в эллинистических странах

Новая эпоха античного мира началась с завоеваний Александра Македонского. После его смерти империя распалась на несколько больших частей – эллинистических монархий. Государственным языком в эллинистических государствах становится греческий, на этом же языке развивается наука. Столица Птолемеев Александрия вскоре становится торговым, культурным и научным центром всего древнего мира. Особенный расцвет получили точные науки. В этот период жили и работали такие гении как Евклид, Архимед и Аполлоний.

Евклид, прежде всего, является автором «Начал», по которым учились математики всего мира. Также его глубоко занимали вопросы логических основ математики, и одно из его сочинений называлось «Ложные заключения». В книге «Данные» Евклид исследовал вопрос о том, каково должно быть минимальное число заданных величин, чтобы сделать некоторую задачу определенной. Он еще до Аполлония написал трактат о конических сечениях – наиболее полное и систематическое изложение учения об этих кривых.

Рис. 27. Евклид

«Начала» Евклида пережили более двух тысячелетий, но до сих пор не утратили своего значения не только в истории науки, но и в самой математике. Созданная там система евклидовой геометрии и теперь изучается во всех школах мира и лежит в основе почти всей практической деятельности людей. Содержание «Начал» далеко не исчерпывается элементарной геометрией – это основы всей античной математики.

«Начала» состоят из тринадцати книг. Каждая книга начинается с определений, кроме того, первой книге предшествует пять постулатов и пять аксиом. Определения «Начал» можно разбить на две группы: рабочие определения, которые используются при построении теории, и описательные, которые далее не употребляются. Первые четыре книги «Начал» посвящены планиметрии и геометрической алгебре. Особенность их в том, что не применяется учение о подобии, т. е. они строятся без действительных чисел. В I книге излагается планиметрия прямолинейных фигур, в ней устанавливаются основные свойства треугольников, прямоугольников, трапеций. Венчает книгу теорема Пифагора и обратное ей предложение. Во II книге излагаются элементы геометрической алгебры. Произведение двух отрезков здесь понимается как построенный на них прямоугольник. В III книге рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд, в IV строятся правильные *n*–угольники при *n* = 3, 4, 5, 10, 15. В V и VI книгах Евклид оперирует отношениями любых величин – он строит там, по существу, теорию действительного числа и теорию меры. V книга посвящена общей теории отношений величин Евдокса. Она отличается особенной стройностью и логической завершенностью. В VI книге Евклид строит учение о подобии и прилагает его к задачам, равносильным решению квадратных уравнений. Книги VII–IX посвящены арифметике, т. е. теории целых и рациональных чисел. Каждое целое число изображается отрезком, полученным повторением единичного. Сложение чисел сводится к сложению изображающих их отрезков. В арифметических книгах также рассматриваются вопросы теории чисел: вводится «алгоритм Евклида», доказываются основные теоремы теории делимости целых чисел, доказывается теорема о том, что существует бесконечно много простых чисел.

Рис. 28. «Начала». Ватиканский манускрипт

В X книге на основании учения о целых и рациональных числах Евклид проводит классификацию квадратичных иррациональностей, которые возникают при решении цепочек квадратных уравнений. XI книга посвящена стереометрии. Она содержит основные предложения о прямых и плоскостях в пространстве, задачи на построение, а также предложения о равновеликости параллелепипедов и призм. В XII книге доказано, что площади кругов относятся, как квадраты их диаметров, объемы пирамид и конусов сравниваются с объемами соответствующих призм и цилиндров, и, наконец, выводится, что объемы шаров относятся, как кубы их диаметров. XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников – тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

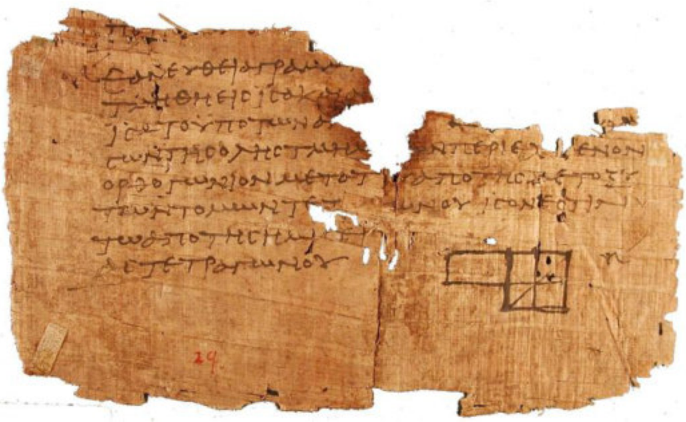


Рис. 29. «Начала». Папирус из Оксиринха

Влияние «Начал» на развитие математики было колоссальным. Архимед, Аполлоний и другие античные математики опирались на них при своих исследованиях по математике и механике. Архимед принадлежит к числу тех немногих гениев, творчество которых определило на долгие века судьбу науки, а тем самым и судьбу человечества. Большая широта научных интересов, характерная для всех великих геометров Греции, с особой силой проявилась в творчестве Архимеда. Наиболее тонкие математические методы своего времени он прилагал к исследованию задач теоретической механики и гидростатики. Наоборот, сами теоремы механики, особенно принцип рычага, служили ему для открытия новых математических истин. Наконец, Архимед сумел строго теоретически исследовать приемы приближенных вычислений, применив к ним аппарат неравенств. Несмотря на глубокий интерес Архимеда к вопросам механики и оптики, основным делом его жизни была математика.

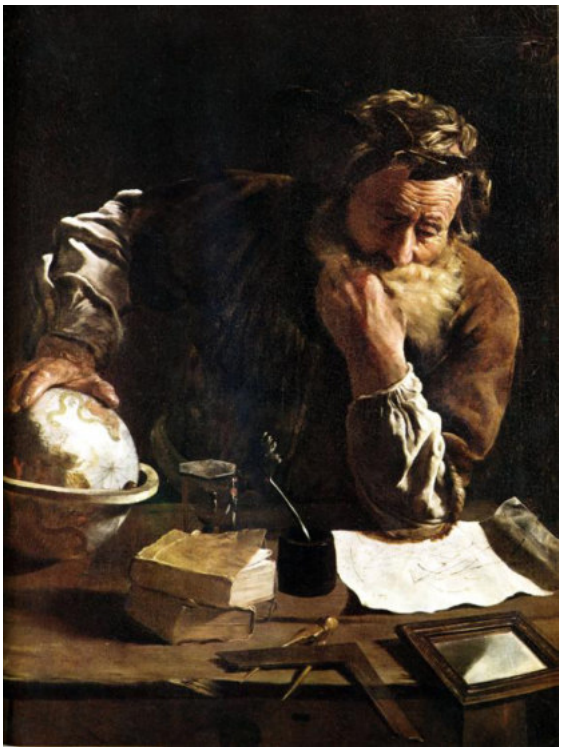


Рис. 30. Доменико Фетти. Архимед

В сочинениях «О шаре и цилиндре», «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах» Архимед применил метод верхних и нижних интегральных сумм, с помощью которого решил проблему определения длин дуг и площадей кривых поверхностей. Для этого ему понадобились новые постулаты, которые он вводит в начале I книги сочинения «О шаре и цилиндре». Эти постулаты позволяют Архимеду найти поверхность сферы и сферического сегмента и дать метод вычисления длины окружности с любой степенью точности. Методы Архимеда состоят в построении для искомой величины верхних и нижних интегральных сумм и отыскании их общего предела. Поэтому его методы в принципе столь же пригодны для получения новых результатов, как и метод интегральных сумм вообще.

В сочинении «О спиралях» Архимед разработал методы определения касательной. Эти методы были применены только в одном частном случае. Тем не менее, они обладают той же степенью общности, что и его интегральные методы, и могут служить для отыскания касательной к любой дифференцируемой кривой. К дифференциальным методам Архимеда относится и его метод определения экстремумов. Он нашел общий метод сведения проблем определения экстремумов к проблемам нахождения касательных.

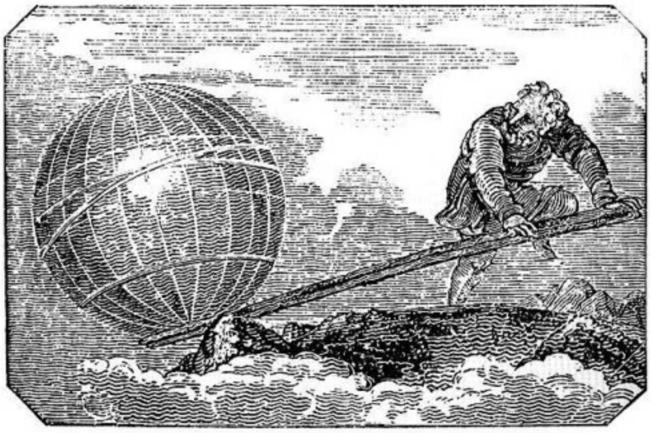


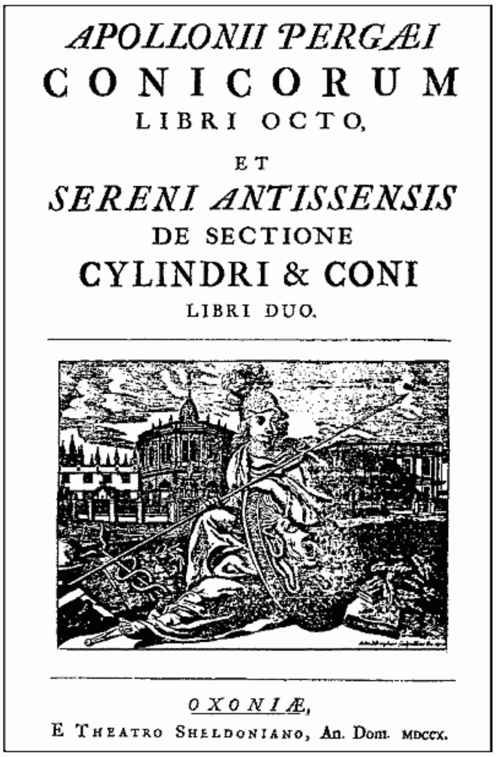
Рис. 31. Архимед переворачивает Землю

Из других работ Архимеда, относящихся к математике, следует отметить его «Исчисление песчинок», где разработан способ, позволяющий регулярно выражать сколь угодно большие числа посредством специальной системы наименований десятичных разрядов.

Исследования Архимеда относились к таким фундаментальным проблемам, как определение площадей, объемов, поверхностей, центров тяжести, касательных и экстремумов. Для решения этих проблем он создал те основные методы, которые употребляются до сих пор: метод верхних и нижних интегральных сумм, характеристический бесконечно малый треугольник для определения касательных и, наконец, метод сведения задач на экстремумы к определению касательных.

Рис. 33. Аполлоний Пергский

Третий из великих греческих геометров эпохи эллинизма – Аполлоний. Его творчество богато новыми красивыми идеями. Ему принадлежит мысль ввести эпициклы и эксцентрические окружности для того, чтобы представить видимое движение Солнца и планет. В математике Аполлоний более всего известен своими «Коническими сечениями», в которых он дал полное изложение теории, причем развил и аналитические и проективные методы. «Конические сечения» состоят из восьми книг. Первые четыре, в которых, по словам автора, излагаются элементы теории, дошли до нас по-гречески, следующие три – в арабском переводе Сабита ибн Корры, последняя – восьмая – книга утеряна. Эти книги очень богаты



APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,
ET
SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

Рис. 34. Титульный лист одной из реконструкций VIII книги «Конических сечений»

содержанием. Главным аспектом была новая трактовка конических сечений, близкая к точке зрения современной аналитической геометрии. Аполлоний прежде всего дает более общее определение кривых второго порядка. Во-первых, он берет произвольный круговой конус; во-вторых, рассматривает обе его полости и проводит сечения плоскостью расположенной под любым углом к образующей. После стереометрического определения Аполлоний также дает вывод уравнений кривых.

Кроме «Конических сечений» Аполлоний написал трактат «О вставках», посвященный классификации задач, которые решаются с помощью вставок, в другой работе – «О неупорядоченных иррациональностях», он продолжил классификацию Евклида. Из чисто геометрических работ Аполлония можно отметить «О спиральных линиях», в которой он рассматривает спирали на поверхности цилиндра, «О касании», где разбирается знаменитая задача Аполлония. В своих книгах Аполлоний развивает не только методы аналитической, но и проективной геометрии, изучающей те свойства фигур, которые не изменяются при центральном проектировании.

В I в. до н.э. математические исследования прекращаются. Причины этого тяжелые разрушительные войны – создается будущая Римская империя. Только в начале нашей эры греческая наука вновь начинает оживать. В первые века нашей эры Александрия остается научным и культурным центром древнего мира. Уже в I в. н. э. можно назвать двух выдающихся математиков – Герона и Менелая.

Рис. 35. Герон Александрийский

Талантливый инженер и изобретатель, Герон Александрийский одним из первых воспользовался движущей силой пара, сконструировал различные пневматические машины и автоматы. Наряду с этим Герон занимался и математикой. В своём труде «Метрики» он собрал различные формулы, служащие для измерения фигур. Здесь содержится и «формула Герона» для определения площади треугольника по трем его сторонам. «Метрика» написана кратко и ясно. Если в ней приводятся доказательства, то они точны. Но Герона интересуют не только логически непогрешимые построения и точные формулы. Он приводит в своей книге и приближенные правила. Например правило для извлечения квадратного и кубического корня. Эти и многие другие правила он излагает догматически, поясняя их числовыми примерами. Рациональные числа получают у него полное равноправие с целыми.

Творчество Менелая Александрийского было неразрывно связано с астрономией. В арабском переводе Сабита ибн Корры до нас дошла «Сферика» Менелая. Видимо, в «Сферике» подводился итог всему предшествующему развитию сферической геометрии. «Сферика» состоит из трех книг. В двух первых систематически излагается сферическая геометрия – первая система геометрии, отличная от евклидовой. Третья книга посвящена сферической тригонометрии.

Рис. 36. Клавдий Птолемей

В середине II в. н. э. в Александрии работает знаменитый астроном Клавдий Птолемей. Основной труд Птолемея – «Математическое построение». В книге Птолемея подробно изложена теория видимого движения Солнца, Луны и планет, основанная на эпициклах и эксцентрических кругах, приведен список более тысячи звезд с указанием их эклиптических координат и яркости. Для математики интересны не только исследования Птолемея, связанные с астрономией, но и его работы по географии. Землю он считал шаром. В своей «Географии» он рассматривает проекцию сферы из полюса на плоскость экватора. Птолемей доказывает, что при этой проекции углы между линиями не меняются, фигуры остаются подобными в малом.

Новый взлет античной математики достиг кульминации в середине III в. н. э. Это было время, когда жил и работал Диофант – один из величайших математиков древности. Труды Диофанта представляют полную неожиданность и по постановке задач, и по методам их решения, и по алгебраической трактовке величин и действий над ними.

Основное произведение Диофанта – «Арифметика», должна была служить основой для преподавания. Эта книга свидетельствует о наличии у него буквенной символики. Значение этого шага огромно. Только на такой основе могло быть создано буквенное исчисление, развит формульный аппарат, позволяющий часть наших мыслительных операций заменить механическими преобразованиями. Одновременно с введением символики Диофант явно формулирует основные правила алгебраических операций. Основная проблема «Арифметики» – это решение неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. Неизвестное может быть как целым, так и дробным, эти случаи не различаются. Решения ищутся во всей области рациональных чисел, больших нуля. Диофанту не чуждо и представление об иррациональном числе. Поражает круг проблем, которые ставит и решает Диофант и которые до сих пор носят его имя. «Арифметика» – последнее великое математическое произведение античности.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Рис. 37. Латинский перевод «Арифметики»

Значение греческой математики

Именно Греции мы обязаны возникновением математики как самостоятельной науки с присущими ей методами нахождения и установления истины, методами конструкции новых объектов и образования новых понятий. Достижения греческой математики определили дальнейшее развитие математики в течение многих веков. Критическое усвоение методов греческой математики легло в основу научной революции XVII в. в математике, но и позднее, в XIX и XX вв., создавая новые направления или строя новые теории, математики неоднократно замечали, что они совершенствуют или воплощают то, что было задумано и начато в Древней Греции.

Тема: Математика в странах ислама

Рис. 38.Древний Восток

В VIII - X вв., в первый период развития математики стран ислама, на арабский язык был переведен ряд сочинений, явившихся источником ознакомления с достижениями греческой науки. Первоначально преобладало усвоение культурного наследия прошлого, но очень быстро сложилась своеобразная собственная математическая культура. Среди других течений математической мысли Востока арабская математика выделяется глубоким синтезом устремлений, направленных на решение задач практической жизни и ведущей науки той эпохи – астрономии, с интенсивной работой теоретической мысли, воспитанной на лучших греческих образцах. Последнее позволило поднять на весьма высокий уровень научную разработку вычислительно-алгоритмических проблем и методов, стоявших на первом плане во всей восточной математике. Восточная математика характеризуется значительным развитием арифметики в широком смысле слова, от решения задач коммерческого характера до теории отношений и учения о действительном числе, геометрии, в частности, столь важной для дальнейшего прогресса точных наук теории параллельных, а особенно алгебры и тригонометрии, которые впервые формируются здесь в большие самостоятельные науки.

Арабские нумерации

В странах ислама были распространены два типа нумерации: буквенная и десятичная позиционная. Буквенную нумерацию арабы называли «абджад» и «джумал» («суммы»). В буквенной арабской нумерации имеются специальные знаки для 1, 2, ..., 9, 10, 20, ...,90, 100, 200, 900, 1000. Одной из важнейших заслуг багдадской школы было введение десятичной позиционной нумерации. Эта нумерация появляется впервые в книге Мухаммеда ал-Хорезми «Об индийском счете», где он пишет: «Когда увидел я, что индийцы составляли из девяти букв любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу, что получается из этих букв, для облегчения изучающему» ([**Ошибка! Источник ссылки не найден.**], с. 9). Далее ал-Хорезми описывает девять индийских цифр и нуль, обозначавший, что разряд пуст.

Арабские купцы часто записывали числа словами. Из словесной записи чисел впоследствии выработалась применяющаяся до сих пор торговцами многих стран Востока числовая скоропись.

Развитие математики в странах ислама

Рис. 39. Абу Абдулла Абу Джафар Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми

Первое руководство по арифметике, основанное на позиционном принципе, было написано в первой трети IX в. Мухаммадом ал-Хорезми. Кроме арифметического трактата ал-Хорезми сохранились его трактат по алгебре, содержащий также главу по геометрии, астрономические таблицы, включающие раздел, посвященный тригонометрии, таблицы широт и долгот городов и трактат о календаре. Ал-Хорезми подробно описывает сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня с помощью индийских цифр. В число арифметических действий он включает удвоение и раздвоение. Действия производились на доске, покрытой песком или пылью, и на каждом этапе выкладки использованные цифры стирались и заменялись новыми. За действиями над целыми следуют операции над шестидесятеричными и обыкновенными дробями.

Руководство ал-Хорезми сыграло очень большую роль в развитии арифметики. Имя автора в латинизированной форме стало в средневековой Европе обозначать всю систему десятичной позиционной арифметики. Впоследствии термин «алгоритм» приобрел более широкий смысл всякого регулярного вычислительного процесса, в конечное число шагов дающего решение определенного класса задач.

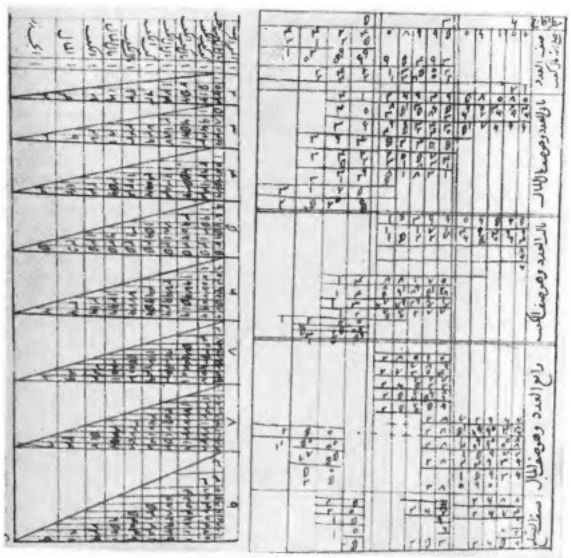


Рис. 40. Таблицы степеней чисел

Арабский язык не имеет специальных терминов для выражения долей единицы, меньших 1/10, все остальные доли называются «одна часть из *n*», а их кратные - «*m* частей из *n*». Такому словоупотреблению соответствовало понятие конкретной дроби, выражающей одну или несколько частей величины, предполагаемой делимой. Но существовала и другая концепция дроби, как отношения двух отвлеченных целых чисел, восходящая к античной теории пропорций. Эта последняя теория служила, так сказать, теоретический основой арабской арифметики.

Дроби записывали на индийский манер: знаменатель под числителем, а целую часть числа писали над числителем. Разделительная черта появляется около 1200 г. У чиновников, землемеров, торговцев было издавна в ходу другое исчисление дробей, сходное с тем, которое применяли египетские писцы. Дробь представляли в виде суммы долей единицы 1/*n*. Ученые усовершенствовали такое исчисление и выработали целую систему правил для представления любых дробей с помощью аликвотных дробей.

Арабские астрономы пользовались почти исключительно шестидесятеричными дробями. Арабские ученые распространили шестидесятеричный принцип на целые числа, причем систематически употребляли при этом знак нуля. Числа от 1 до 59 писались при этом в специальной алфавитной нумерации. Дробные шестидесятеричные разряды именовались минутами, секундами, терциями и т. д., разряд единиц (от 1 до 59) – градусами, а высшие разряды – первыми поднятыми, вторыми поднятыми и т. д.

Выдающимся достижением явилось введение десятичных дробей ал-Каши. Его целью было дать систему дробей, в которой, как в шестидесятеричной системе, все операции проводится, как с целыми числами, но которая основана на общеупотребительном десятичном основании и потому доступна тем, кто не знает «исчисления астрономов». Ал-Каши формулирует основные правила действий с десятичными дробями, способы перевода шестидесятеричных дробей в десятичные и обратно. В его трудах многие величины выражены с помощью десятичных дробей. Десятичная дробь записывалась в одной строке с целой частью числа; для ее обозначения ал-Каши отделял дробь от целого вертикальной чертой или писал другим цветом или подписывал над цифрами названия разрядов, чаще всего называя только низший разряд, определяющий все остальные.

Ал-Хорезми описал приём извлечения квадратных корней. У Кушьяра ибн Лаббана встречается и приём извлечения кубических корней. Дальнейшая разработка приёмов извлечения корней принадлежит одному из крупнейших математиков Средних веков Омару Хайяму. В своей книге по алгебре Хайям, упомянув «методы индийцев» извлечения квадратных и кубических корней, сообщает, что в специальном сочинении он обобщил эти методы на случай извлечения корней с любым целым показателем. Весьма вероятно, что Хайям владел правилом возведения двучлена в любую целую положительную степень, однако сочинение Хайяма, в котором изложено эти открытие, пока не найдено.

Рис. 41. Омар Хайам

Первое дошедшее до нас описание извлечения корня любой степени из целого числа встречается в «Сборнике по арифметике с помощью доски и пыли» Насир ад-Дина ат-Туси. Ат-Туси принадлежит много трудов по математике и астрономии, а также по физике, логике и другим наукам.

С самого начала развития математики в арабских странах чрезвычайно большое место в ней занимают приближенные вычисления, необходимые для составления тригонометрических и астрономических таблиц, определения различных геометрических величин. Быстрое развитие числовой алгебры и её геометрических приложении также вели к тому, что иррациональные числа все чаще и чаще входили в употребление и становились предметом исследования. Частое оперирование алгебраическими иррациональностями в их арифметической форме подготовляло почву для выделения понятия об иррациональном числе, равноправном с рациональными числами. Постепенно стирается различие между геометрическими несоизмеримыми величинами и числовыми иррациональностями, числовая иррациональность становится иррациональным числом; вместе с тем любое отношение величин воспринимается как число. Такое расширение понятия о числе могло явиться лишь результатом теоретического исследования.

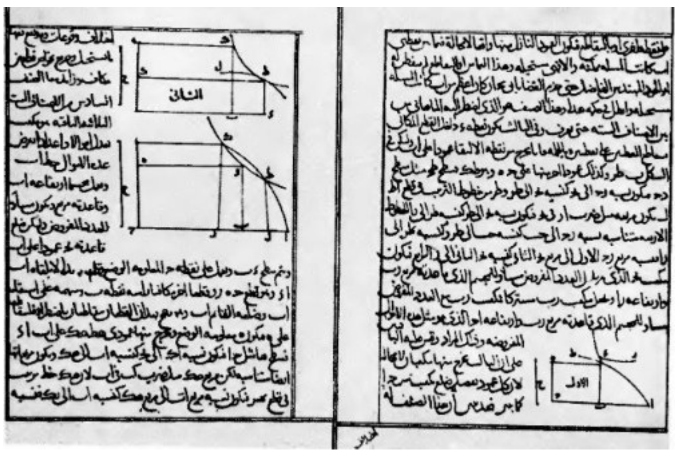


Рис. 42. Страница рукописи алгебраического трактата Хайама

Критический анализ античной теории пропорций был начат еще Абу Абдаллахом ал-Махани в «Трактате о трудностях отношения» и продолжен многими учеными. В «Комментариях к трудностям во введениях книги Евклида», написанных Хайямом, определение пропорции в V книге «Начал» объявляется хотя и правильным, но не «истинным», т. е. не выражающим основной сути пропорции. Кроме того, Хайям подходит к обобщению понятия числа на любые положительные действительные числа.

Автором основополагающего арабского трактата по алгебре «Краткой книги об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы», в латинских переводах оказавшего также большое влияние на средневековую европейскую науку, был ал-Хорезми. В центре внимания стоит решение шести канонических классов уравнений первой и второй степеней, которые он записывал без всякой символики. Чтобы решить какое-либо уравнение первой или второй степени, его требуется предварительно свести к одному из основных типов. Для этого применяются операции, давшие название как трудам по алгебре, так и самой этой науке. Операция ал-джабр есть перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть в виде прибавляемых членов; ал-мукабала есть сокращение равных членов в обеих частях. Ал-Хорезми формулирует лишь правила, дающие положительные корни уравнений и указывает условия, при которых корни существуют. Правила формулируются на примерах с числовыми коэффициентами, но вполне общим образом.

Рис. 43. Страница из книги аль-Хорезми «Краткая книга об исчислении аль-джабра и аль-мукабалы»

На протяжении X в. уравнениями высших степеней с числовыми или же произвольными коэффициентами был выражен целый ряд геометрических, тригонометрических и физических задач: построение сторон вписанных в данный круг правильных девяти- и семиугольников, построение сегмента шара по данным объему и площади поверхности, задача о трисекции данного угла и др. Все эти задачи сводятся к уравнениям третьей степени. В построении кубических уравнений были достигнуты столь значительные успехи, что вскоре стало возможным создание обобщающей их теории. Наиболее удачное изложение её дал Омар Хайям в «Трактате о доказательствах задач алгебры». В этом труде алгебра впервые выступает как самостоятельная наука. Предметом алгебры Хайям объявляет неизвестное число или неизвестную величину, отнесенные к другим известным числам или величинам. Такое отнесение осуществляется в виде уравнения, т. е. приравнивания одних степеней другим. Тем самым алгебра рассматривается как наука об уравнениях, которые теперь называются алгебраическими.

Главное содержание трактата составляет классификация уравнений, подбор соответствующих каждому классу пар конических сечений и определение возможного числа и границ положительных корней, т. е. отделение корней. Уравнения исследуются в общем виде, т. е. коэффициенты их предполагаются произвольными положительными величинами. Наряду с общей теорией разрабатывались и приемы численного решения уравнений третьей степени.

Рис. 44. Арабский перевод «Начал» Евклида

В геометрии важное место занимали вопросы, связанные **с** применением вычислительных методов. К этому кругу проблем относятся применения алгебры и тригонометрические приемы. Вычисление со всё возрастающей точностью элементов фигур, особенно правильных многоугольников и многогранников, занимало многих ученых. Самым ярким примером искусного применения вычислительной техники служит «Трактат об окружности» ал-Каши, в котором отношение длины окружности к диаметру, т. е. числа π, равно 3,141 592 653 589 793 25, где неверна только последняя цифра 5.

Для нужд землемерия, архитектуры, техники разрабатывались и методы геометрических построений. Ибрахим ибн Синан посвятил теории геометрических построений специальную «Книгу о методе анализа и синтеза и о других действиях в геометрических задачах». В «Книге о построении трех (конических) сечений» Ибн Синан рассматривает семь способов построения эллипса, гиперболы и параболы по точкам с помощью циркуля и линейки. Абу Сайд ас-Сиджизи в «Трактате об описании конических сечений» применил для непрерывного построения всех трех конических сечений так называемый совершенный циркуль, одна из ножек которого при вращении может вытягиваться и сокращаться по длине отрезка прямолинейной образующей конуса от его вершины до точек сечения.

Большое число геометрических построений изложено в «Книге о том, что необходимо ремесленнику из геометрических представлений» Абу-л-Вафы ал-Бузджани. Помимо элементарных задач, решаемых с помощью циркуля и линейки точно, здесь даются и приближённые построения, например для правильных семи- и девятиугольника; рассмотрены и механические приемы трисекции угла, а также удвоения куба. Около полутора десятков задач решено с помощью циркуля постоянного раствора - такие построения представляли практический интерес, ибо на открытой местности удобно пользоваться окружностями фиксированного радиуса. Абу-л-Вафа указывает также способы построения по точкам параболы, которую он называет «зажигательным зеркалом». Интересны построения Абу-л-Вафы на сфере: помимо элементарных задач сферической геометрии здесь решаются задачи разделения сферы на сферические многоугольники, получаемые проектированием из центра сферы ребер вписанных в нее правильных и полуправильных многогранников. Построениям на сфере посвящено и специальное «Рассуждение о циркуле для больших кругов» Ибн ал-Хайсама.

Рис. 45. Ибн ал-Хайсам

Тригонометрия первоначально излагалась в составе астрономических сочинений, заключавших и тригонометрические таблицы. Вслед за индийскими астрономами ученые стран ислама при решении астрономических задач пользовались правилами сферической тригонометрии. На рубеже IX и X вв., в «Книге о науке звезд» Абу Абдаллаха ал-Баттани учение о тригонометрических функциях, представлявшихся в виде отрезков, связанных с кругом определенного радиуса, достигло довольно высокого развития. Были найдены простейшие соотношения между ними, разработаны приемы составления тригонометрических таблиц и установлен ряд основных теорем, служащих для решения плоских и сферических треугольников. Правда, запас этих теорем был невелик, и потому решение треугольников было часто довольно громоздким. Весьма значительного развития достигло искусство решения сложных тригонометрических задач в «Каноне Масуда» ал-Бируни. Математики и астрономы стран ислама проявили большое вычислительное искусство при составлении тригонометрических таблиц.

Значение математики стран ислама

Математика стран ислама оказала исключительное влияние на развитие математики как на Востоке, так и на Западе. Но особенно глубоким было влияние математики стран ислама на Западную Европу. Математики мавританских государств Северной Африки и Пиренейского полуострова, внесшие в развитие математики гораздо меньший вклад, чем их восточные коллеги, сыграли исключительно важную роль в ознакомлении европейцев с достижениями ученых стран ислама и их греческих, индийских и восточных предшественников. С начала XI в. в течение около ста лет распространение сведений, полученных с Востока, имело в развитии математики в Европе решающее значение.

О влиянии науки стран ислама на науку Европы говорят такие наши термины, как «арабские цифры», «алгебра», «алгоритм», «цифра», «корень», «синус». Арабского происхождения также многие астрономические термины и большинство названий звезд. Усвоение учеными Европы науки стран ислама позволило начать строить европейскую науку на прочном фундаменте и не повторять заново весь пройденный их предшественниками путь.

Тема: Математика Средневековья и эпохи Возрождения

Математика Средневековья

Время господства в Западной Европе феодальных отношений, продолжавшееся с V-VI вв. около тысячи лет, именуется Средними веками. Основой прогресса культуры и науки в Средние века служило постепенное развитие ремесла, товарного производства и торговли, подъём городов, улучшение материального положения и усиление общественной роли горожан.

Наибольшие достижения в области науки принадлежат народам более развитых государств – Италии и Франции, Англии и Германии, хотя некоторые замечательные открытия были сделаны и в других странах.

В первые столетия Византийской империи продолжали существовать эллинистические философские и научные школы. После разгрома научной школы в Александрии в V в. и запрета императором Юстинианом преподавания на территории империи языческой философии многие ученые эмигрировали из Византии в Иран и Сирию. В VI в. в Византии появляются христианские учёные. Первыми христианскими византийскими математиками были Анфемий и его ученик Исидор. Анфемий известен главным образом как строитель собора св. Софии в Константинополе, ему принадлежит трактат о зажигательных зеркалах, весьма интересный для истории конических сечений.

Во второй половине XI в. жил Михаил Пселл. Ему приписывается одно сочинение по арифметике и геометрии. В арифметической части дается лишь классификация чисел и отношений. В геометрическом отделе автор утверждает, что, хотя мнения о том, как найти площадь круга, расходятся, наибольшей популярностью пользуется метод, при котором берется среднее геометрическое между площадями вписанного и описанного квадратов.

К XIII в. относится деятельность Максима Плануда, написавшего комментарии к первым двум книгам «Арифметик» Диофанта. Плануду же принадлежит «Арифметика по образцу индийцев», где излагается арифметика с помощью девяти знаков чисел от 1 до 9, а также знака, называемого «цифра», и обозначающего «ничто». Начертания цифр у Плануда – восточно-арабские.

В XIV в. жили Иоанн Педиасим и Исаак Аргир. Педиасиму принадлежат замечания о трудных вопросах арифметики, трактат об удвоении куба и «Геометрия». Аргир написал «Геодезию» и комментарии к первым шести книгам «Начал» Евклида, а также трактат об извлечении квадратных корней, содержащий их таблицу для чисел от 1 до 102 в шестидесятеричных дробях.

В эпоху раннего феодализма в духовной жизни не было стимулов для научных занятий естествознанием и математикой. Некоторые требования к математике предъявлялись в монастырях, но здесь интерес ограничивался вопросами практической арифметики и геометрии, а также вычислениями календарей и дней церковных праздников. Для воспитания образованных людей было написано несколько книг, содержавших начальные сведения о семи «свободных искусствах», разделявшихся на тривиум и квадривиум. Тривиум охватывал грамматику, риторику и диалектику – в смысле умения вести спор. Квадривиум включал арифметику – изложение без доказательств простейших свойств чисел в комбинации с числовой мистикой, геометрию – краткие сведения об основных геометрических образах и мерах, астрономию, включая календарь, и музыку, как учение о гармонических интервалах.

Одним из наиболее популярных в Средние века авторов сочинений по квадривиуму был Аниций Манлий Северин Боэций. Из авторов V-VI вв. следует упомянуть также римлян Марциана Капеллу, Флавия Кассиодора и епископа Севильи Исидора. Сочинение последнего, «Происхождения», было посвящено разъяснению смысла и происхождения многих научных терминов.

Рис. 46. Аниций Манлий Северин Боэций

Одним из первых математиков Западной Европы был монах Беда Достопочтенный. Беда был автором специального хронологического трактата, значительная часть которого посвящена вычислению для пасхи, с которым жёстко связаны многие другие важные христианские праздники. В этом же трактате имеется полное описание счета на пальцах.

Вскоре европейцы начинают пользоваться в письме индийско-арабскими цифрами. Решающее значение для принятия в Европе десятичной позиционной нумерации и новых цифр имело ознакомление с латинскими переводами арабских книг по арифметике.

Рис. 47. Беда Достопочтенный

Важную роль в развитии математики сыграли университеты. Древнейший в Европе университет – медицинский – был основан в Салерно не позднее первой половины XI в. Около 1100 г. был открыт университет в Болонье, вначале представлявший собой школу, где на основе римского права разрабатывались юридические нормы. На базе нескольких монастырских школ в конце XII в. вырос Парижский университет, где обучались тысячи студентов со всех концов Европы; примерно тогда же был создан Оксфордский и в 1209 г. Кембриджский университеты. В XIV в. появляются университеты в Праге, в Кракове, в Вене и т. д. Все эти университеты, в отличие от первых двух, не были узкопрофессиональными школами. Организация преподавания была примерно такова: университет состоял из четырех факультетов-искусств, богословия, права и медицины. Студент, нередко подросток, поступал прежде всего на факультет искусств, где обучался около шести лет, и после испытаний мог перейти на какой-либо другой факультет. Наиболее популярным и влиятельным был богословский факультет, где обучение продолжалось около восьми лет и завершалось испытанием и диспутом. Преподаватели делились на младших – бакалавров, магистров, – и докторов. Во главе университетов стояли монахи-богословы.

Рис. 48. Парижский университет

Математика в течение нескольких столетий оставалась только вспомогательной дисциплиной и отдельных кафедр, да и особых преподавателей математики не было. По-видимому, первым специализировался на преподавании одних математических наук магистр Венского университета Иоганн из Гмундена. С 1412 г. он читал в Вене лекции по «алгоритму целых и дробей», т. е. по арифметике, основанной на позиционной нумерации, по оптике, сферике и церковно-календарным вычислениям.

Рис. 49. Леонардо Фибоначчи

Первым самостоятельным математиком Западной Европы, полностью осветившим все достижения математиков стран ислама и продвинувшимся дальше их, был итальянец Леонардо Пизанский, известный также под именем Фибоначчи. Основной труд Леонардо «Книга абака». Под словом «абак» Леонардо подразумевает не счетную доску, а арифметику вообще. Эта замечательная книга послужила одним из важных средств распространения новой арифметики и других математических знаний в Европе. Леонардо систематизировал в ней огромное количество сведений, почерпнутых из арабских трудов, добавил кое-что из геометрического искусства Евклида, а также присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. Арифметику и алгебру линейных и квадратных уравнений Леонардо изложил с непревзойденной ни ранее, ни долгое время спустя полнотой и глубиной. Особое место занимают у Леонардо различные задачи, приводящиеся к линейным уравнениям, для решения которых он применяет различные приемы. Многие задачи – восточного или древнегреческого происхождения, так же как и способы решения, в разработке которых Леонардо, однако, пошел вперед. С исследованием линейных уравнений связана другая выдающаяся заслуга итальянского математика. Рассматривая некоторые невозможные задачи зтого рода, он – первый в Европе – пришел к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга. Изложение у Леонардо – словесное, но в текст вкраплены обозначения одной или двумя буквами отрезков, изображающих данные и искомые величины или их комбинации.

«Книга абака» резко возвышается над арифметико-алгебраической литературой XII-XIV вв. разнообразием и силой методов, богатством задач, доказательностью изложения. Но это был труд не для учащихся и не для тех, кто ожидал от математики одних правил решения, стандартных вопросов коммерческого дела и т. п. «Книга абака» оказалась по плечу ученым, отчасти современникам, но ещё более потомству. Последующие математики широко черпали из неё как задачи, так и приемы решения, которые в XV-XVI вв. разошлись по многочисленным итальянским, немецким, французским, английским и русским рукописям и печатным книгам.

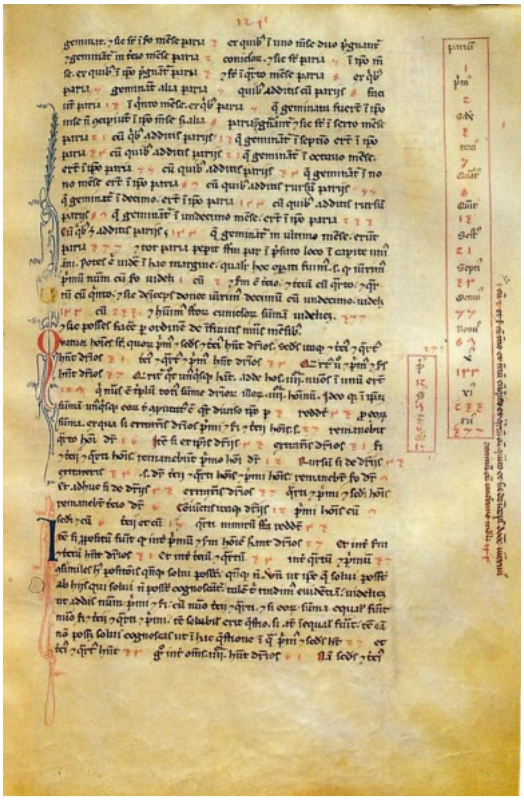


Рис. 50. Страница из «Книги абака»

Большое значение имели для развития математики и другие труды Леонардо. В 1220 г. он написал «Практику геометрии» – книгу, которая, вопреки своему названию, не была руководством специально по прикладной землемерной геометрии, а содержала разнообразные теоремы (с доказательствами), относящиеся к измерению величин, к арифметике, планиметрии и стереометрии. Около 1225 г. Леонардо написал «Книгу квадратов», содержащую задачи на неопределенные квадратные уравнения. Эта работа Леонардо – единственное ценное исследование по теории чисел в Европе за рассматриваемый период.

Современником Леонардо Пизанского был Иордан Неморарий, математические сочинения которого пользовались большой известностью, хотя по оригинальности и богатству содержания они значительно уступали сочинениям Леонардо. В «Арифметике, изложенной в 10 книгах» Иордан следует в основном позднеантичной традиции Никомаха и Боэция, излагая общие арифметические свойства чисел. Интересной особенностью этого труда является применение для общности букв вместо конкретных чисел. Сам по себе такой прием не был новым, но Иордан Неморарий применяет его более систематически, чем его предшественники. При формулировке предложений или правил решения задач он не выражает величины с помощью отрезков и прямоугольников, и поэтому буквенный символ выступает у него как чисто арифметический знак произвольного числа. Далее, Иордан регулярно обозначает каждую величину одной буквой и не колеблется более между употреблением то одной, то сразу двух букв, как Леонардо. Вместе с тем у Неморария по-прежнему отсутствуют знаки равенства и алгебраических операций, благодаря чему он вынужден применять для результатов каждого отдельного действия все новые и новые буквенные обозначения. Этот же приём, Иордан использовал в своей алгебре. Алгебра Иордана, сочинение «О данных числах» состоит из четырёх книг и содержит 115 задач на линейные и квадратные уравнения и их системы. Геометрии посвящены четыре книги сочинения «О треугольниках».

Высоко ценили математики работы Томаса Брадвардина. Ему принадлежат три сочинения по математике и одно по механике. Наибольший интерес представляет «Теоретическая геометрия», состоявшая из четырех отделов. В этом труде есть самостоятельный вклад Брадвардина в науку – исследование звездчатых многоугольников. «Трактат о континууме» посвящён учению о непрерывном и дискретном, лежащему на границе между физикой, математикой и философией.

В середине XIV в. возникло ещё одно замечательное направление средневековой математики – учение о конфигурациях качества или равномерности и неравномерности интенсивностей и т. д. В этом учении содержатся прообразы идей функциональной зависимости и её графического изображения. Довольно широкое развитие в математическом и натурфилософском плане новое учение получило в «Книге калькуляций» Ричарда Суайнсхеда. Здесь впервые появляется понятие о мгновенной, или точечной, скорости. Понемногу вызревает представление о законах природы, как законах функционального типа.

Рис. 51.Николя Орем

В XIV в. во Франции работал замечательный математик, значительно превосходивший своих современников, магистр Николя Орем. Прежде всего, интересна разработка Оремом теории отношений, которой он посвятил два сочинения: «Трактат об отношениях» и «Алгоризм отношений». Орем подошёл и к понятию иррационального показателя как отношения, «знаменование» которого «невыразимо» или «непознаваемо». Создание формального алгоритма дробных отношений, т. е. по существу, обобщение действия возведения в степень на положительные дробные показатели, явилось важным достижением средневековой алгебры.

Эпоха Возрождения

XV и XVI века вошли в историю Европы под названием «эпохи Возрождения», при этом имеется в виду возрождение того высокого уровня культуры, который был достигнут в античном мире. В промышленности появляются мануфактуры, требующие технических усовершенствований и изобретений. Бумага и книгопечатание делают научные знания необходимым элементом общественной жизни. Совершается подлинная культурная революция. Математика развивается главным образом в Италии, Франции и Германии, к которым в конце XVI в. присоединяется Голландия.

Рис. 52. Фра Лука Бартоломео де Пачоли

Наибольших успехов математики Европы XV-XVI вв. добились в области алгебры. Крупнейшим европейским алгебраистом XV в. был итальянец Лука Пачоли. Основным его трудом была «Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности». В арифметической части «Суммы» излагались различные приемы арифметических действий. Алгебру Пачоли называет «правилом вещи» и «великим искусством». Он пользуется алгебраическими символами, использует обозначение квадратного, кубического корня и корней более высоких порядков, определяет отрицательные числа. На трактовку Пачоли отрицательных чисел, по-видимому, оказало влияние то, что он был изобретателем двойной бухгалтерии, в которой все денежные операции записываются в столбцах «кредита» (дохода) и «дебета» (долга). Теория бухгалтерии изложена в той же «Сумме». Ещё одна книга Пачоли «О божественной пропорции» названная так по «золотому сечению», была посвящена зодчеству, пяти правильным многогранникам, равно как и многогранникам, получаемым из них путем «отсечения» и «насадки», а также пропорциям человеческого тела.

Во Франции оригинальный вклад в алгебру был сделан бакалавром медицины Никола Шюке. Рукописный труд Шюке «Наука о числах в трех частях» содержит правила вычислений с рациональными числами, затем с иррациональными корнями и учение об уравнениях.

Профессору Болонского университета Шипионе дель Ферро удалось первым решить в радикалах один из видов кубического уравнения. По обычаю того времени дель

Ферро не опубликовал решения, а сообщил его своему ученику Фиор, который пользовался правилом решения, найденным дель Ферро, на математических турнирах.

Рис. 53. Николо Тарталья

На одном из таких турниров Фиор встретился с Николо Тартальей. Тарталья перед турниром самостоятельно нашел правило дель Ферро и решил все задачи, предложенные Фиоре, который был настолько обескуражен, что не решил ни одной задачи, предложенной Тартальей. Через день после турнира Тарталья нашел и решение ещё одного вида уравнения. Эти открытия Тартальи были опубликованы в алгебраическом трактате Джироламо Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах». Кардано, узнав об открытии Тартальи, выпросил у него формулировку решения, поклявшись его не публиковать. Тарталья сообщил свое правило в стихотворении из 25 строк, составленном им для лучшего запоминания. Восстановив по не вполне ясным формулировкам правило и доказав его, Кардано счел себя вправе поместить решение в своей книге, упомянув об авторстве Тартальи. Несмотря на это, за правилом закрепилось название «формула Кардано». В «Великом искусстве» Кардано был изложен также открытый его учеником Луиджи Феррари метод решения уравнения четвертой степени.

В «Великом искусстве» впервые встречается новый математический объект – мнимые величины. Кардано считал их бесполезными и стремился не применять. Первым математиком, оценившим пользу мнимых величин, в частности при решении кубического уравнения в «неприводимом» случае, был инженер-гидравлик Рафаэль Бомбелли, автор «Алгебры». В своей книге он сообщает восемь правил умножения мнимых и действительных чисел, закладывая тем самым первый камень фундамента теории комплексных чисел. Других общих правил операций Бомбелли не приводит, но решает ряд примеров на сложение, умножение и деление. Во второй книге «Алгебры» Бомбелли исследует неприводимый случай, опираясь на обнаруженную им сопряженность кубических корней из двух сопряженных комплексных чисел.

Рис. 54. Джероламо Кардано

Рис. 55. Симон Стевин

В XVI в. выходит в цвет «Десятая» Симона Стевина. После этого начинается широкое распространение десятичных дробей в Европе. В своём сочинении Стевин, определив десятичные дроби, с большим пылом агитирует как за повсеместное введение десятичных дробей, так и за введение десятичной системы мер и монет. В том же году Стевин выпускает в Лейдене «Арифметику», где излагает не только арифметику, но и алгебру.

Коренные улучшения в алгебраическую символику ввел Франсуа Виет. Общие идеи и основные принципы новой алгебры Виет изложил во «Введении в аналитическое искусство», которое должно было составить начало большого всеобъемлющего алгебраического трактата. Целью Виета является преобразование прежней алгебры в мощное математическое исчисление. При этом новая алгебра делится на две части – имеющую дело с общими величинами и имеющую дело с числами. Общую алгебру Виет назвал видовой логистикой. Предметом видовой логистики является система математических объектов, частью геометрических, частью псевдогеометрических, связанных между собой отношениями, аналогичными арифметическим. Когда величины выражены числами, они и отношения между ними образуют предмет числовой логистики.

Рис. 56. Франсуа Виетт

Видовой логистике Виет сообщил требуемую общность, создав символику, в которой впервые появились знаки не только неизвестных, но и переменных данных величин. В качестве знаков скаляров он принял прописные буквы алфавита, гласные для неизвестных и согласные для известных. Это нововведение и особенно применение буквенных коэффициентов положило начало коренному перелому в развитии алгебры: только теперь стало возможным алгебраическое исчисление как система формул, как оперативный алгоритм.

Виету же принадлежат первые значительные успехи в общей теории алгебраических уравнений. В сочинении «Об анализе и усовершенствовании уравнений» он применяет свой символический аппарат к разработке отдела о преобразованиях корней уравнений. В рассмотрениях Виета содержались первые ростки теории симметрических функций и разложения целых многочленов на множители первой степени, которые немного спустя привели и к открытию основной теоремы алгебры о числе корней уравнения любой степени. В трактате «О численном решении чистых и связанных степеней с доказательством» Виет разработал метод приближенного решения алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами.

Алгебраические труды и открытия Виета сообщили новое направление алгебре и послужили основой, на которой смогли начать успешное развитие такие ведущие науки последующего периода, как аналитическая геометрия и исчисление бесконечно малых.

Великий Леонардо да Винчи, занимаясь экспериментальными науками, механикой, оптикой, астрономией, видел в математике образец научной доказательности, а механику называл «раем математических наук». В своем «Трактате о живописи» он рекомендовал художникам изучать науки, в том числе геометрическую перспективу.

Рис. 57. Витрувианский человек - золотое сечение в изображении человека

Жизнь, полная скитаний, не дала Леонардо да Винчи возможности разработать свои научные идеи и изложить их в виде законченных сочинений. Однако сохранились его записные книжки, содержащие отрывочные заметки и наброски, в большинстве не законченные. В них математическая тематика представлена упражнениями и задачами, так или иначе имеющими прикладное назначение, равно как и некоторыми философскими проблемами, связанными с математическими понятиями. Много внимания уделено нахождению равновеликих площадей и объемов, звездчатым многоугольникам, построению правильных многоугольников на данной стороне либо вписанных в данную окружность, причем часто при условии постоянного раствора циркуля.

Много внимания теории перспективы уделял великий художник Альбрехт Дюрер. Он написал специально для художников «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки». В своем трактате «О человеческой пропорции» Дюрер рассматривает проекции различных частей человеческого тела на три взаимно перпендикулярные плоскости спереди, сбоку и сверху, а также на вертикальные плоскости, составляющие с первыми двумя плоскостями острые углы. В этом же сочинении приводится огромный статистический материал, содержащий измерения различных частей тел мужчин и женщин различных комплекций.

Значение математики эпохи Возрождения

В эту эпоху математика Европы впервые вышла за пределы знаний, полученных в наследство от древних греков и народов Востока. Именно в это время закончилась решительной победой многовековая борьба за введение позиционной десятичной арифметики, была создана арифметическая и алгебраическая символика, введены были дробные и отрицательные показатели, отрицательные числа, десятичные дроби и т.д.

Рис. 58. Математики XVI века

Виет построил алгебру как символическое исчисление, введя специальные буквенные обозначения для неизвестных и для коэффициентов многочленов, а также расширив символику алгебраических операций. Значительны достижения плоской и сферической тригонометрии, усовершенствованы методы вычисления таблиц. Таким образом, были созданы условия для возникновения теории переменных величин, символической алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений.

Тема: Математика в Новое время

Развитие математики в XVII веке

В истории математики XVII век занимает особое, весьма значительное место. Он открывает новый период этой истории – период математики переменных величин.

К концу предыдущего, XVI, столетия алгебра, тригонометрия, а также геометрия и приемы вычислений накопили достаточно много фактов и достигли такого состояния, что смогли сделаться существенной частью технического и общенаучного прогресса. В течение XVII в. математические методы продолжали весьма энергично внедряться в естествознание, прежде всего в механику. Большинство математиков были одновременно механиками и естествоиспытателями; они пытливо изучали природу, отыскивали ее законы и не особенно заботились о разграничении наук.

В XVII в. произошло изменение форм существования математики. На смену энтузиастам-одиночкам, представлявшим счастливые исключения, пришли научные организации и общества. С 1662 г. начало свою деятельность Лондонское королевское общество, играющее и ныне роль национальной Академии наук. В 1666 г. организована Парижская академия. Было положено начало научной периодике.

Рис. 59. Парижские академики за работой в библиотеке и палате опытов

Изменение практического положения, идейных основ и организационной структуры и роли математики происходило наряду с глубокими качественными изменениями в ее содержании. Изучение чисел, постоянных величин, фигур дополняется изучением движений и преобразований, функциональных зависимостей. Меняется внутреннее содержание математики, все более приобретающей облик математики переменных величин.

Аналитическая геометрия


Рис. 60. Рене Декарт

В 1637 г. вышло в свет знаменитое произведение Рене Декарта «Рассуждение о методе». Последняя часть носит название «Геометрия» – это первое сочинение по аналитической геометрии. В нём установлена связь буквенной алгебры с геометрией кривых и потребовалось определить операции над отрезками так, чтобы отрезки действительно образовали поле.

В основу всей «Геометрии» Декарта положены две идеи: введение переменной величины и использование прямолинейных (декартовых) координат. Здесь даются правила составления уравнений геометрических кривых, подробное рассмотрение кривых различных порядков, их классификации и выявлению их свойств. Высказывается предложение о возможности распространения метода Декарта на трехмерный случай. Последняя книга «Геометрии» ставит своей задачей построение общей теории решения уравнений и использование для этой цели наряду с алгебраическими средствами геометрических мест.

Идеи аналитической геометрии сосредоточены также в небольшом сочинении Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест». Исходными пунктами этой работы явились сочинения древних по изучению геометрических мест. Те геометрические места, которые представлялись прямыми или окружностями, назывались плоскими, а представляемые коническими сечениями – пространственными. Ферма показал, что уравнениям 1-й степени соответствуют прямые, а коническим сечениям – уравнения 2-й степени.

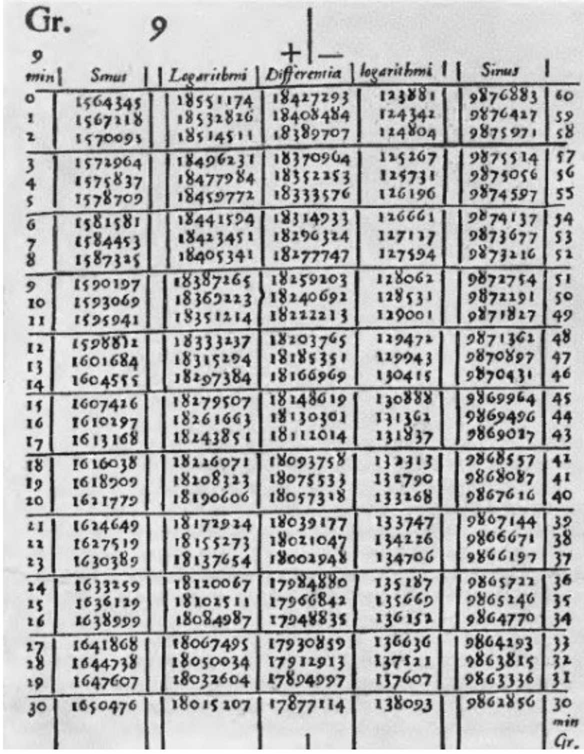
Облик, близкий к современному, придал аналитической геометрии Л. Эйлер, посвятив этому второй том «Введения в анализ».

Появление в математике аналитической геометрии существенно облегчило формирование анализа бесконечно малых и знаменовало появление возможностей для создания анализа переменных величин.

Усовершенствование вычислительных методов и средств в XVII веке

Математики XVI и начала XVII в. испытывали огромные трудности вычислительно-практического характера. Прежде всего, это задачи составления таблиц тригонометрических функций и отыскание простых и надежных алгоритмов численного определения корней уравнений с данными числовыми коэффициентами. Арифметические средства вычислений ограничивались операциями с целыми числами и простыми дробями; десятичные дроби только пробивали себе дорогу. Впервые в Европе они были введены в 1585 г. фламандским инженером и математиком С. Стевином в сочинении «Десятая». Вычисления делались только вручную.

Составление тригонометрических таблиц играло в то время большую роль. Поэтому в конце XVI и в начале XVII в. героическими усилиями известных ученых и безвестных вычислителей были составлены и изданы несколько таких таблиц. Над вычислением таблиц работали, например, Коперник, Кеплер и Виета. Иост Бюрги, сотрудник Кеплера, много лет потратил на составление таблицы синусов дуг через каждые 2". Он же составил одни из первых таблиц логарифмов, но долго не решался их публиковать, поэтому приоритет принадлежит Джону Неперу. Таблицу Непера составляли десятичные логарифмы тригонометрических функций. К 1620 г. Джон Спейдель вычислил таблицы натуральных логарифмов. А в 1624 г. Генри Бригг издаёт «Логарифмическую арифметику», содержащую 14-значные таблицы логарифмов для чисел 1 – 20 000 и 90 000 – 100 000.


Gr. 9

\+ | —

9 min	Sinus	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057338	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30 min Gr.

Рис. 61. Страница из «Описания удивительной таблицы логарифмов» Непера

Работами Непера и Бригга многие вычислительные трудности были преодолены. Логарифмы вошли в вычислительную практику и быстро распространились по всему миру. Эдмунд Гюнтер разработал логарифмическую шкалу, явившуюся первым вариантом логарифмической линейки.

В свою очередь, в 1667 г. Меркатор разработал метод применения элементов анализа бесконечно малых для более удобного вычисления логарифмов. А своё завершение теория логарифмических функций получила в трудах Л. Эйлера. Ему принадлежит общее определение логарифмической и показательной функции как взаимообратных, распространение понятия логарифма на случай комплексного аргумента, введение символа *e* для основания натуральных логарифмов и т. д.

Ученые-математики XVII в. искали также и другие пути преодоления вычислительных трудностей. В разных городах Европы стали возникать счетные машины. По-видимому, самой ранней машиной была машина немецкого профессора Вильгельма Шиккарда, которая была изобретена и построена в 1623 г. О ней ничего не было известно, никому, кроме Кеплера и узкого круга друзей изобретателя. Поэтому долгое время считалось, что первый арифмометр изобрел в 1642 г. Блез Паскаль. Арифмометр Паскаля, построенный на принципе десятичных зубчатых передач, позднее (1673–1674) был усовершенствован Лейбницем.

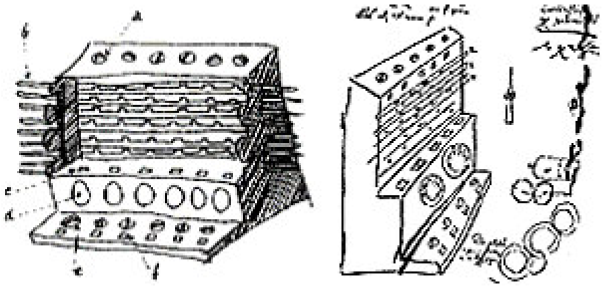


Рис. 62. Эскиз Шиккарда его счётной машины

Многие вычислительные методы были разработаны в связи с численным решением алгебраических уравнений, переплетены с ним. Около 1676 г. Ньютон разработал способ приближенного нахождения корней уравнений, применяемый до сих пор. Также в связи с задачами вычислительного характера Ньютон вывел формулу бинома и распространил ее на случаи дробного и отрицательного показателя степени бинома.

Интеграционные и дифференциальные методы

Самым большим достижением математики XVII в. считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Интеграционные методы вначале вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжестей и т. п. Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Кеплера. Наряду с интеграционными методами складывались и методы дифференциальные. К ним относятся методы определения касательных к кривым, нахождения максимумов и минимумов функций и отыскания условий существования у алгебраических уравнений кратных корней. Накопление элементов дифференциального исчисления наиболее явную форму приняло у Ферма. В 1638 г. он сообщил в письме Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции *f(x).* Так же близок к дифференциальному исчислению метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым.

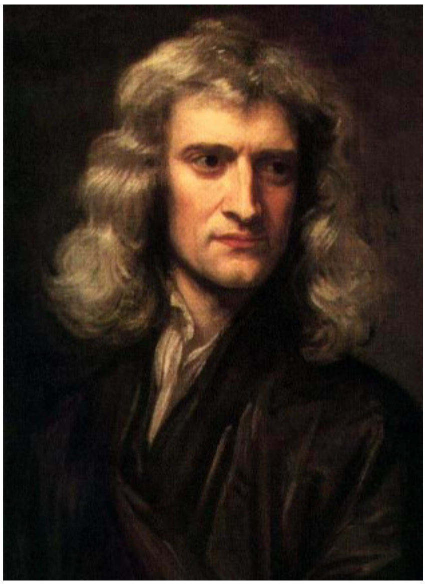


Рис. 63. Исаак Ньютон

Во второй половине XVII в. начала складываться новая область математики – анализ бесконечно малых. Это революционизировало всю математику, превратив ее в математику переменных величин. Формирование дифференциального и интегрального исчисления было первым этапом существования анализа.

Наиболее ранней формой анализа является теория флюксий, открытие которой принадлежит Исааку Ньютону. Здесь изучаются переменные величины, которые называются флюентами, т. е. текущими. Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент – время. Далее вводятся скорости течения флюент, т. е. производные по времени. Названы они флюксиями. Так как флюксия представляет собой переменную, то можно находить флюксию от флюксии и т. д. Для вычисления мгновенных скоростей – флюксий потребовались бесконечно малые изменения флюент, названные Ньютоном моментами. По существу момент флюенты – это ее дифференциал.

Рис. 64. Готфрид Лейбниц

Почти одновременно с теорией Ньютона возникло исчисление дифференциалов Лейбница. Лейбниц открыл взаимообратную связь между методами проведения касательных (в последующем операции дифференцирования) и квадратурами (позднее интегрированием). Он сформулировал правила дифференцирования постоянной величины, суммы функций, разности, произведения, частного, степени, корня. Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманными; они были несложными и отражали существо дела, помогали пониманию и позволяли оперировать с ними по сравнительно простым правилам. Многие из них дошли до наших дней. От Лейбница ведут свое происхождение термины: дифференциал, дифференциальное исчисление, функция, координаты, дифференциальное уравнение, алгоритм и многие другие, а также большая часть символов.

С помощью нового исчисления математикам конца XVII – начала XVIII в. удавалось решать быстро возрастающее число трудных и практически важных задач.

Развитие математики в XVIII веке.

XVIII столетие является периодом создания математики переменных величин. В начале века математики в своих исследованиях могли исходить уже из весьма значительного конкретного материала. Его основу и наиболее актуальную часть составлял анализ бесконечно малых.

В течение XVIII в. существенно изменилось содержание математики. Самые большие изменения произошли в математическом анализе. Из метода, придуманного для решения определенного класса задач, он преобразовался в анализ функций, приобрел структуру, близкую к современной. Практические потребности вынуждали распространять операции анализа на быстро возрастающий класс функций. Оказывалось все более необходимым исследовать смысл понятия функции, дать классификацию всех известных функций и найти способы оперирования с ними.

Рис. 65. Леонард Эйлер

В 1718 г. И. Бернулли предложил считать, что функция есть просто аналитическое выражение. У Эйлера функция, понимаемая просто как аналитическое выражение, образуется с помощью класса допустимых операций, в который входят: арифметические действия, степени, корни, решения алгебраических уравнений, присоединил элементарные трансцендентные функции и интегрирование. Классификация функций производится, в соответствии с определением этого понятия, в основном, по виду их символических выражений. Эйлер дополнил этот принцип классификацией функций по их свойствам – однозначные и многозначные, четные и нечетные.

В течение 30–40-х годов главным образом благодаря Эйлеру была разработана и систематизирована теория элементарных аналитических функций. Она тотчас же повлекла поток открытий, сопровождавшихся большими и страстными спорами. Особенно много споров вызывала трактовка функций комплексного аргумента.

Развитие аппарата математического анализа

Основным аппаратом дифференциального исчисления являлось разложение функций в степенные ряды. Сравнительно богатый арсенал средств, накопленный предшественниками, в самом начале века обогатился теоремой Тейлора. Публикуя её, Тейлор дополнил теорему выводом для частного случая, носящего ныне название ряда Маклорена.

В 1754 г. Даламбер при выводе ряда Тейлора высказал соображения, сводящиеся к представлению остаточного члена *n*–кратным интегралом. В конце века, в 1797 г., Лагранж представил остаточный член ряда Тейлора сперва в интегральном виде, а затем в виде, в котором он находится в современных учебниках под его именем.

Интегральное исчисление включало в себя помимо интегрирования функций задачи и теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, теорию специальных функций и т. п. Главные достижения в задаче построения исчисления вначале принадлежали И. Бернулли, написавшему первый систематический курс интегрального исчисления, затем – Эйлеру. Вклад последнего в интегральное исчисление необычайно велик.

В области решения дифференциальных уравнений в первой половине XVIII в. работа состояла в решении отдельных специфических уравнений. В этот период были выработаны предпосылки для создания первых форм общей теории, в том числе ряд основных понятий. Лишь в 1774–1776 гг. Лагранж сумел детально выяснить, как получать особые решения: либо непосредственно из дифференциального уравнения, либо из общего решения дифференцированием по постоянной. Он же дал геометрическую интерпретацию особого решения как огибающей семейства интегральных кривых.


Рис. 66. Жан Лерон Даламбер

Геометрические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, выделившиеся в особую область математики – дифференциальную геометрию, оставили свой след и в теории самих уравнений.

Развитие геометрии

Аналитическая геометрия формировалась в тесном сплетении с геометрическими приложениями математического анализа и видоизменяла свой облик. В XVIII в. было завершено формирование аналитической геометрии как науки и становление ее как учебного предмета, явившегося составной частью классической основы современного высшего математического и технического образования.


Рис. 67. Гаспар Монж

Методы начертательной геометрии формировались в области технических приложений математики. Формирование начертательной геометрии в особую математическую науку завершилось в работах Г. Монжа 1795 г.

Создание предпосылок современной алгебры

Самостоятельность путей развития алгебры определилась уже к началу XVIII в., когда в 1707 г. вышла в свет «Всеобщая арифметика» И. Ньютона. В ней алгебра излагалась в тесной связи с развитием вычислительных методов, как высшая стадия арифметики. С самого начала Ньютон вводит операции как над буквенно-символическими выражениями, так и над числами (целыми и дробными). Введя читателя в технику тождественных алгебраических преобразований, Ньютон затем знакомит его с методами решения уравнений. Замыкают книгу данные общей теории уравнений, а также графическое решение последних с помощью геометрического построения корней.

Рис. 68. Жозеф Луи Лагранж

Таким образом, предмет алгебры в XVIII в. определился. Она превратилась в науку об алгебраических уравнениях. В нее также входила разработка буквенно-символического аппарата, необходимого для решения уравнений. Лагранж добился значительных успехов, рассматривая уравнения с произвольными буквенными коэффициентами. Относительно их он исследовал поля рациональных функций корней. Лагранж доказал и первые теоремы теории групп.

В основе алгебраических исследований лежит понятие о количестве, величине, числе. Общность и поле приложений буквенно-алгебраических методов определяются общностью понятия числа. Понятие действительного числа включало в себя: натуральные числа, положительные дроби, иррациональности. Общая концепция иррационального числа завоевала себе права гражданства лишь во второй половине XVIII в. Большие споры ещё кипели вокруг понятия отрицательного числа.

Мнимые числа в алгебре появляются в виде корней уравнений. Их изучение, однако, продвинулось не в алгебраических трактатах, а под давлением настоятельных необходимостей математического анализа. Именно в рамках анализа постепенно отыскивались и внедрялись правила формальных операций с мнимыми и комплексными числами. Очевидная полезность комплексных чисел вызывала усиление внимания к вопросу об их сущности. Однако эта проблема оставалась нерешенной. Первый, кто разработал способ геометрической интерпретации комплексных чисел точками на плоскости, был датчанин, землемер Вессель. Однако его работа осталась незамеченной, равно как и аналогичная интерпретация Аргана.

Алгебра на рубеже XIX в. находилась накануне коренной перестройки, сделавшей ее соединением ряда алгебраических наук, предметом изучения которых стали объекты сложной и абстрактной природы: группы, поля, кольца и т. д.

Теория чисел

Становление теории чисел как науки связано с именем Эйлера. Нахождение доказательств, обобщений или опровержений теорем Ферма было только первым этапом его теоретико-числовых исследований. В последующем он охватил и развил все основные разделы теории чисел, как алгебраической, так и аналитической, определив ее состав и методы на много лет вперед.

Работы Эйлера определили проблематику, структуру и методы алгебраической теории чисел, т. е. той ее части, в которой используются по преимуществу методы арифметики и алгебры и не привлекается по возможности аппарат теории функций и анализа бесконечно малых. Здесь ему, прежде всего, принадлежат работы по теории делимости, выросшей к нашему времени в теорию сравнений.

Рис. 69. Пьер Ферма

Методы теории вероятностей и комбинаторного анализа

Теория вероятностей в XVIII в. Значительно расширила сферу своих приложений. Наиболее ранним теоретическим результатом здесь было, по–видимому, доказательство локальной предельной теоремы Муавра. Позднее Лаплас обобщил эту теорему. Проблема вычисления вероятностей гипотез на основе определенных результатов некоторых наблюдений в разных аспектах рассматривалась в работах Д. Бернулли, Эйлера. Симпсона, Кондорсе и др. Важнейшим результатом здесь были формулы Бейеса, опубликованные в 1764 г. Примыкающая к этому теория ошибок наблюдений получила разработанный Лежандром, Лапласом и Гауссом метод наименьших квадратов.

Помимо указанных двух групп теоретических результатов можно отметить довольно большое число конкретных задач теоретико-вероятностного характера.

Аппарат теории вероятностей состоял из арифметических приемов, почерпнутых в особенности из комбинаторики. Вместе с обогащением методов теории вероятностей за счет привлечения предельных рассмотрений и других средств математического анализа удельный вес комбинаторных приемов стал уменьшаться. Но комбинаторика продолжала развиваться, так как ее содержание по существу не исчерпывалось приложениями к теории вероятностей.

Тема: Современная математика

Математика XIX века

В истории математики XIX в. знаменует начало нового периода, получившего название периода современной математики. На первое место в алгебре выдвигается ряд весьма абстрактных общих понятий, среди которых первое место принадлежит понятию группы. Создание и развитие теории Галуа и теории групп сделалось одной из главных задач новой алгебры. В геометрии, алгебре, анализе появляются многочисленные нестандартные структуры с необычными свойствами: неевклидовы и многомерные геометрии, кватернионы, конечные поля, некоммутативные группы и т. п. Объектами математического исследования всё больше становятся нечисловые объекты: события, предикаты, множества, абстрактные структуры, векторы, тензоры, матрицы, функции, многолинейные формы. Возникает и получает широкое развитие математическая логика, в связи с чем появилось искушение связать именно с ней коренные основания математики. Георг Кантор вводит в математику предельно абстрактную теорию множеств, а заодно понятие актуальной бесконечности произвольного масштаба. В конце века при попытке обосновать фундамент математики на основе теории множеств были обнаружены противоречия, которые заставили задуматься над непростыми вопросами: что означает «существование» и «истинность» в математике?

В целом в XIX веке роль и престиж математики в науке и экономике заметно растут. Соответственно растёт и её государственная поддержка. Математика вновь становится по преимуществу университетской наукой. Появляются первые математические общества: Лондонское, Американское, Французское, Московское, а также общества в Палермо и Эдинбурге.

Геометрия

Если XVIII век был веком анализа, то XIX по преимуществу стал веком геометрии. Быстро развиваются созданные в конце XVIII века начертательная геометрия и возрождённая проективная геометрия. Появляются новые разделы: векторное исчисление и векторный анализ, геометрия Лобачевского, многомерная риманова геометрия, теория групп преобразований. Происходит интенсивная алгебраизация геометрии – в неё проникают методы теории групп, в конце века – топологии, возникает алгебраическая геометрия.

Рис. 70. Карл Фридрих Гаусс

Дифференциальная геометрия получила мощный толчок после выхода чрезвычайно содержательного труда Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях» (1822), где впервые были явно определены метрика (первая квадратичная форма) и связанная с ней внутренняя геометрия поверхности. Исследования продолжила парижская школа. В 1847 году Френе и Серре опубликовали известные формулы Френе для дифференциальных атрибутов кривой.

Крупнейшим достижением стало введение понятия вектора и векторного поля. Первоначально векторы ввёл У. Гамильтон в связи со своими кватернионами (как их трёхмерную мнимую часть). У Гамильтона уже появилось скалярное и векторное произведение. Сверх того, Гамильтон ввёл дифференциальный оператор «набла» и многие другие понятия векторного анализа, в том числе определение вектор-функции и тензорного произведения.

Компактность и инвариантность векторной символики, использованной в первых трудах Максвелла, заинтересовали физиков; вскоре вышли «Элементы векторного анализа» Гиббса (1880-е годы), а затем Хевисайд (1903) придал векторному исчислению современный вид.

Проективная геометрия привлекла внимание Монжа, а затем его учеников – Понселе и Лазара Карно. Карно сформулировал «принцип непрерывности», который позволяет сразу распространить некоторые свойства исходной фигуры на фигуры, полученные из неё непрерывным преобразованием. Несколько позднее Понселе ясно определил проективную геометрию как науку о проективных свойствах фигур и дал систематическое изложение её содержания. У Понселе уже полностью легализованы бесконечно удалённые точки. Он сформулировал принцип двойственности (прямых и точек на плоскости).

С конца 1820-х годов формируется школа проективных геометров в Германии – Мёбиус, Плюккер, Гессе, Штейнер и другие. В Англии ряд работ опубликовал Кэли. При этом стали использоваться и аналитические методы, особенно после открытия Мёбиусом однородных проективных координат, включающих и бесконечно удалённую точку. Во Франции работы Понселе продолжил Мишель Шаль.

Большое влияние на развитие математики имела знаменитая речь Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Риман определил общее понятие n-мерного многообразия и его метрику в виде произвольной положительно определённой квадратичной формы. Далее Риман обобщил теорию поверхностей Гаусса на многомерный случай; при этом появляются понятия римановой геометрии. Существование неевклидовой метрики, по Риману, может объясняться либо дискретностью пространства, либо некими физическими силами связи.

Во второй половине XIX века наконец привлекает общее внимание геометрия Лобачевского. Тот факт, что даже у классической геометрии существует альтернатива, произвёл огромное впечатление на весь научный мир. Он также стимулировал переоценку многих устоявшихся стереотипов в математике и физике.

Рис. 71. Бернхард Риман

Рис. 72. Феликс Клейн

Ещё один переломный момент развития геометрии наступил в 1872 году, когда Феликс Клейн выступил со своей «Эрлангенской программой». Он классифицировал геометрические науки по используемой группе преобразований – вращения, аффинные, проективные, общие непрерывные и т. п. Каждый раздел геометрии изучает инварианты соответствующей группы преобразований. Клейн рассмотрел также важнейшее понятие изоморфизма, который называл «перенесением». Тем самым был намечен новый этап алгебраизации геометрии.

В 1872–1875 годах Камилл Жордан опубликовал ряд работ по аналитической геометрии n-мерного пространства (кривых и поверхностей), а в конце века он предложил общую теорию меры.

В самом конце века рождается топология, сначала под названием *analysis situs*. Топологические методы фактически в ряде работ использовали Эйлер, Гаусс, Риман, Жордан и др. Вполне ясно предмет новой науки описывает Феликс Клейн в своей «Эрлангенской программе». Окончательно комбинаторная топология оформилась в работах Пуанкаре.

Математический анализ

Анализ в XIX веке развивался путём быстрой, но мирной эволюции. Наиболее существенной переменой стало создание фундамента анализа (Коши, затем Вейерштрасс). Коши построил фундамент анализа на основе теории пределов и его подход стал общепринятым. Анализ стал менее алгебраичным, но более надёжным. Тем не менее, до уточнений Вейерштрасса многие предрассудки ещё сохранялись: например, Коши верил, что непрерывная функция всегда дифференцируема, а сумма ряда из непрерывных функций непрерывна.

Рис. 73. Огюстен Луи Коши

Широчайшее развитие получила теория аналитических функций комплексного переменного, над которой работали Лаплас, Коши, Абель, Лиувилль, Якоби, Вейерштрасс и другие. Значительно расширился сам класс специальных функций, особенно комплексных. Главные усилия были направлены на теорию абелевых функций, которые не вполне оправдали возлагавшиеся на них надежды, но, тем не менее, способствовали обогащению аналитического инструментария и созданию в XX веке более общих теорий.

Многочисленные прикладные задачи деятельно стимулировали теорию дифференциальных уравнений, выросшую в обширную и плодотворную математическую дисциплину.

К концу века происходит некоторая геометризация анализа – появляются векторный анализ, тензорный анализ, исследуется бесконечномерное функциональное пространства.

Алгебра и теория чисел

Намеченные у Эйлера аналитические методы помогли решить немало трудных проблем теории чисел (Гаусс, Дирихле и другие). Гаусс дал первое безупречное доказательство основной теоремы алгебры. Жозеф Лиувилль доказал существование бесконечного количества трансцендентных чисел, дал достаточный признак трансцендентности и построил примеры таких чисел в виде суммы ряда. У. Гамильтон открыл удивительный некоммутативный мир кватернионов. Благодаря Минковскому возникла геометрическая теория чисел.

Рис. 74. Эварист Галуа

Эварист Галуа представляет глубокий анализ решения уравнений произвольных степеней. Ключевыми понятиями исследования оказываются алгебраические свойства связанных с уравнением группы подстановок и полей расширения. Галуа завершил работы Абеля, доказавшего, что уравнения степени выше 4-й неразрешимы в радикалах. По мере усвоения идей Галуа, со второй половины века, быстро развивается абстрактная алгебра. В 1850-е годы Кэли вводит понятие абстрактной группы. Термин «группа» становится общепринятым и проникает практически во все области математики.

Формируется понятие линейного пространства (Грассман и Кэли). В 1858 году Кэли публикует общую теорию матриц, определяет операции над ними, вводит характеристический многочлен. К 1870 году доказаны все базовые теоремы линейной алгебры. В 1871 году Дедекинд вводит понятия кольца, модуля и идеала. Он и Кронекер создают общую теорию делимости. В конце XIX века в математику входят группы Ли.

Теория вероятностей

На первое место в теории вероятностей выходят теория ошибок, статистика и физические приложения. Этим занимались Гаусс, Пуассон, Коши. Была выявлена важность нормального распределения как предельного во многих реальных ситуациях.

Во всех развитых странах возникают статистические департаменты/общества. Благодаря работам Карла Пирсона возникает математическая статистика с проверкой гипотез и оценкой параметров. Но всё же математические основы теории вероятностей в XIX веке ещё не были созданы, и Гильберт в начале XX века отнёс эту дисциплину к прикладной физике.

Математическая логика

После неудачи проекта «Универсальной характеристики» Лейбница прошло полтора века, прежде чем попытка создать алгебру логики повторилась. Но повторилась она на новой основе: концепция *множества* истинности позволила построить математическую логику как теорию классов, с теоретико-множественными операциями. Пионерами стали британские математики Август (Огастес) де Морган и Джордж Буль. В работе «Формальная логика» де Морган описал понятие универсума и символы для логических операторов, записал известные «законы де Моргана». Позже он ввёл общее понятие математического отношения и операций над отношениями. Джордж Буль независимо разработал свой, более удачный, вариант теории. В своих работах он заложил основы современной математической логики и описал алгебру логики (булеву алгебру). Появились первые логические уравнения, введено понятие конституэнты (разложения логической формулы).

Рис. 75. Огаст де Морган

Уильям Стенли Джевонс продолжил систему Буля и даже построил «логическую машину», способную решать логические задачи. В 1877 году Эрнест Шрёдер сформулировал логический принцип двойственности. Далее Готлоб Фреге построил исчисление высказываний. Чарльз Пирс в конце XIX века изложил общую теорию отношений и пропозициональных функций, а также ввёл кванторы. После этого всё было готово для разработки в школе Гильберта теории доказательств.

Обоснование математики

К началу XIX века относительно строгое логическое (дедуктивное) обоснование имела только евклидова геометрия, хотя строгость её уже тогда справедливо считалась недостаточной. Построение фундамента математики началось с анализа. В 1821 году Коши опубликовал «Алгебраический анализ», где чётко определил основные понятия на основе концепции предела. Завершил фундамент анализа Вейерштрасс, который выяснил роль важного понятия равномерной непрерывности. Одновременно Вейерштрасс и Дедекинд дали обоснование теории вещественных чисел, а Уильям Гамильтон строит модель комплексных чисел как пар вещественных.

Рис. 76. Карл Вейерштрасс

В 1870-е годы были созданы модели неевклидовых геометрий, которые доказали, что они так же непротиворечивы, как и геометрия Евклида. В 1879 г. Фреге публикует систему аксиом математической логики, а в 1888 г. Дедекинд предлагает набросок системы аксиом для натуральных чисел. Годом позже законченную систему аксиом предложил Пеано. В 1899 г. выходят в свет «Основания геометрии» Гильберта. В итоге к концу века почти вся математика была построена на базе строгой аксиоматики.

Непротиворечивость основных разделов математики (кроме арифметики) была строго доказана (точнее говоря, сведена к непротиворечивости арифметики). Аксиоматический фундамент для теории вероятностей и теории множеств появился позже, в XX веке.

Теория множеств

В 1873 году Георг Кантор ввёл понятие произвольного числового множества, а затем и общее понятие множества – самого абстрактного понятия в математике. С помощью взаимнооднозначных отображений он ввёл понятие равномощности множеств, потом определил сравнение мощностей на больше-меньше и, наконец, классифицировал множества по величине их мощности: конечные, счётные, континуальные и т. д.

На первых порах теория множеств встретила у многих математиков доброжелательный приём. Она помогла обобщить жордановскую теорию меры, успешно использовалась в теории интеграла Лебега и многими рассматривалась как основа будущей аксиоматики всей математики. Однако последующие события показали, что привычная логика не годится при исследовании бесконечности, а интуиция не всегда помогает сделать правильный выбор. Первое противоречие обнаружилось при рассмотрении самого большого множества – множества всех множеств. Его пришлось исключить из математики как недопустимое. Однако появились и другие противоречия (антиномии).

Анри Пуанкаре, который вначале принял теорию множеств и даже использовал в своих исследованиях, позже решительно отверг её и назвал «тяжёлой болезнью математики». Однако другая группа математиков, включая Бертрана Рассела, Гильберта и Адамара, выступили в защиту «канторизма». Положение усугубило открытие «аксиомы выбора», которая, оказывается, неосознанно применялась во многих математических доказательствах (например, в теории вещественных чисел). Эта аксиома объявляет существующим множество, о составе которого ничего не известно, и это обстоятельство ряд математиков посчитал совершенно неприемлемым, тем более что некоторые следствия аксиомы выбора противоречили интуиции.

Рис. 77. Давид Гильберт

В начале XX века удалось согласовать вариант теории множеств, свободный от обнаруженных ранее противоречий (теория классов), так что большинство математиков приняли теорию множеств. Однако былого единства математики больше нет, часть научных школ стали развивать альтернативные взгляды на обоснование математики.

XX век: основные достижения

В 1900 году Давид Гильберт на Международном конгрессе математиков представил список из 23 нерешённых математических проблем. Эти проблемы охватили множество областей математики и сформировали центр приложения усилий математиков XX столетия. Сегодня десять проблем из списка решены, семь частично решены, и две проблемы всё ещё открыты. Оставшиеся четыре сформулированы слишком обобщённо, чтобы имело смысл говорить об их решении.

В XX веке математика развивалась экспоненциально, и невозможно сколько-нибудь полно перечислить сделанные открытия. Некоторые наиболее серьёзные достижения упомянуты ниже.

В школе Гильберта появился функциональный анализ, вскоре нашедший непосредственное применение в квантовой физике. Эмми Нётер и Ван дер Варден завершили в начале века построение основ абстрактной алгебры. Общая топология стремительно развивается и находит применение в самых различных областях математики. Герман Минковский в 1907 году разработал геометрическую модель кинематики специальной теории относительности, позднее послужившую основой для Общей теории относительности. Капитальные результаты получены в теории алгоритмов. А. Н. Колмогоров создал аксиоматику теории вероятностей. В 1960-х годах Абрахам Робинсон опубликовал изложение нестандартного анализа – альтернативного подхода к обоснованию математического анализа на основе актуальных бесконечно малых. Массовый интерес вызвали фракталы, открытые Бенуа Мандельбротом.

Рис. 78. Герман Минковский

В 1931 году Курт Гёдель опубликовал две свои теоремы о неполноте, которые установили ограниченность математической логики. Это положило конец замыслу Давида Гильберта создать полную и непротиворечивую систему оснований математики. Несколько ранее исследования Лёвенгейма и Сколема обнаружили, что никакая аксиоматическая система не может быть категорична.

Во второй половине XX века, в связи с появлением компьютеров, произошла существенная переориентация математических усилий. Значительно выросла роль таких разделов, как численные методы, теория оптимизации, имитация искусственного интеллекта, кодирование звуковых и видеоданных и т. п.

Ряд старых проблем получили решение при использовании современных методов. Вольфганг Хакен и Кеннет Апель с помощью компьютера решили проблему четырёх красок, а Эндрю Уайлс, работая один в своём офисе в течение многих лет, доказал теорему Ферма в 1995 году.

Особенное развитие в XX веке получили новые области математики: различные разделы дискретной математики, теория алгоритмов, теория графов, теория игр, теория случайных процессов, теория компьютерного моделирования и т. д. Кроме компьютерных потребностей, это связано с запросами теории управления, квантовой физики и других прикладных дисциплин.

Тема: Математика в России

Первые сведения о развитии математики, именно арифметики, на Руси относятся к IX — XII вв. Древнейшие рукописи XI в. уже написаны кириллицей, на ней основывалась и древнерусская нумерация, применявшаяся без существенных изменений до XVII века включительно. Числа от 1 до 9, десятки и сотни изображались с помощью последовательных букв, хотя из этого правила имелось несколько исключений. Тысячи обозначались теми же буквами алфавита, у которых внизу слева ставился знак в виде перечеркнутой черточки. При помощи цифр и этого знака можно было непосредственно обозначить все целые числа до одного миллиона.

а – 1	і – 10	р – 100
в – 2	к – 20	с – 200
г – 3	л – 30	т – 300
д – 4	м – 40	ѵ – 400
є – 5	н – 50	ф – 500
ѕ – 6	ѯ – 60	х – 600
з – 7	о – 70	ѱ – 700
и – 8	п – 80	ѡ – 800
ѳ – 9	ч – 90	ц – 900

Рис. 79. Древнерусская нумерация

Сохранились только единичные письменные свидетельства, знакомящие нас с математикой Руси далеко не полностью. Одним из исторических документов является «Правда Русская» — сборник юридических установлений, регламентирующий наказания, в частности, штрафы за всякого рода преступления. Вопросам хронологии и календаря посвящено Наставление, как человеку познать счисление лет» Кирика — первого русского математика, известного по имени. Математика в Древней Руси не была ограничена кругом чисто практических вопросов и хронологических вычислений. В образованных кругах пробуждался интерес и к более отвлеченным вопросам.

Рис. 80. Страница из краткой редакции «Русской Правды»

Монголо-татарское иго сильно затормозило развитие науки на Руси. Но в XV — XVI вв. появились новые запросы общества к математике. Рос интерес к практической арифметике и практической геометрии. Коммерческие и землемерные задачи оказывали длительное и плодотворное влияние на развитие средневековой математики во всех странах, в том числе и в России. Усиливается потребность в математических знаниях среди строителей и военных. В военной литературе тех времен решен ряд задач на определение расстояний от далеких предметов или высоты недоступных построек и т. п. Предъявляла свои запросы к математике и церковь. Так, в 1538 г. священник новгородского Софийского собора Агафон рассчитал пасхальные даты до 2472 г. Наконец, и в сочинениях «светского», натурфилософского и естественнонаучного содержания, которые имели довольно широкое распространение среди интеллигентных людей, встречаются сведения но математике.

Математических документов XV — XVI вв. сохранилось крайне мало, но имеется много десятков рукописных учебников математики, написанных неизвестными авторами в разное время на протяжении всего XVII века. Книги эти не тождественны между собою. Одни включают арифметику и геометрию, другие только арифметику или ее отдельные вопросы, либо же только геометрию, в одних задач больше, в других меньше и т.д., но основное арифметическое и геометрическое содержание в большинстве случаев почти одинаково.

Изложению арифметики предшествовало введение, в котором специально подчеркивалась общественная полезность и ценность этой науки. Весь материал распределен на «статьи», следующие в общем порядке возрастающей трудности вопросов и содержащие «строки» — правила, поясняемые затем многочисленными и обычно весьма хорошо подобранными задачами. Никаких теоретических выводов или разъяснений не сообщалось. В конце многих рукописей, приводятся еще задачи для развлечения и развития смекалки.

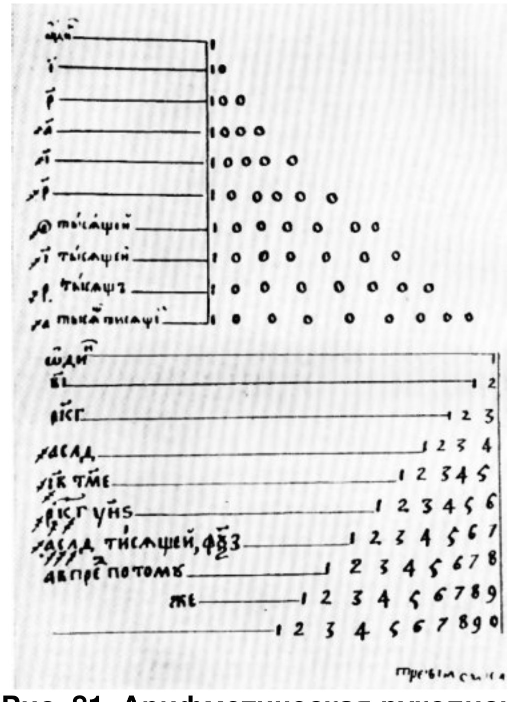


Рис. 81. Арифметическая рукопись XVII в

Русские арифметические учебники XVII века сообщали большую сумму знаний, начиная с элементарных правил нумерации и действии над целыми дробями и кончая приемами решения задач, приводящихся к системам четырех уравнений первой степени с четырьмя неизвестными. Имеются также сведения по геометрии, преимущественно об измерении площадей и объемов. Для измерения земельных участков их разбивали на простейшие фигуры. Были известны точные правила измерения площади прямоугольника, прямоугольного треугольника и прямоугольной трапеции. Площади произвольных многоугольников измеряли, разбивая их на треугольники и четырехугольники. Сообщаются правила нахождения объемов куба, прямоугольного параллелепипеда, прямого цилиндра. К задачам на измерение площадей и теорему Пифагора примыкает в некоторых рукописях описание извлечения квадратного корня.

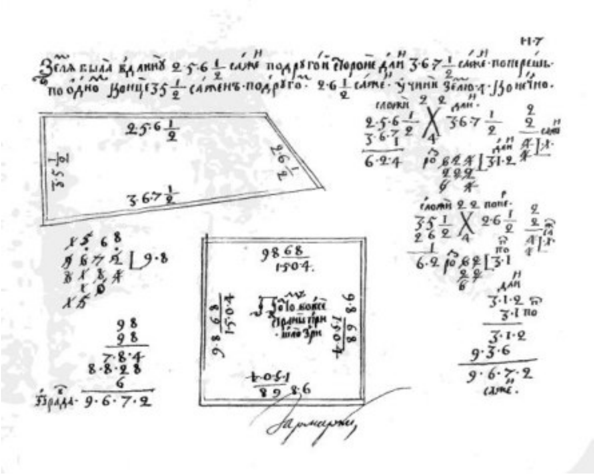


Рис. 82. Задача на измерение площади четырёхугольника

К концу XVII в. в России были удовлетворены лишь первые потребности в сравнительно элементарных областях. Возникла рукописная литература по практической арифметике и геометрии, но попытка создания более совершенных руководств но геометрии не получила официальной поддержки. Отдельные любители математики не выходили за пределы решения любопытных частных задач. Наука в целом, и математика в частности, резко отставали от передовых стран Западной Европы. В первой четверти XVIII века математическому просвещению в России было сообщено новое направление. Математика перестает быть частным делом и обучение ей ставится на службу политическим, военным, экономическим задачам государства. За распространение светского образования борется с большой энергией правительство во главе с царем, позднее императором Петром I.

В 1701 г. была основана школа математических и навигационных наук в Москве. В 1714 г. приступили к организации в ряде городов низших «цифирных» школ. В 1711 г. в Москве начала функционировать инженерная школа и в 1712 г. Артиллерийская. В 1715 г. от Навигационной школы отделилась Морская академия в Петербурге.

Первое печатное руководство по арифметике на русском языке было издано за границей. Голландец Тессинг выпустил «Краткое и полезное руковедение во арифметику» И.Ф. Копиевича. Однако арифметике здесь отведено лишь 16 страниц, где даны краткие сведения о новой нумерации и первых четырех действиях над целыми числами, причем сообщаются весьма лаконичные определения операций. «Руковедение» Копиевича не имело успеха и не могло идти ни в какое сравнение с появившейся вскоре «Арифметикой» Магницкого, изданной очень большим для того времени тиражом — 2400 экз. Эта «Арифметика сиречь наука числительная…» сыграла в истории русского математического образования чрезвычайную роль. Популярность сочинения была необыкновенная, и около 50 лет оно не имело конкурентов, как в школах, так и в более широких читательских кругах.

Имея в виду интересы не только школы, но и самоучек, Магницкий снабдил все правила действий и решения задач очень большим числом подробно решённых примеров. Таких примеров в ней значительно больше, чем в соответствующих заграничных руководствах. Учитывая нужды практики, Магницкий придал своему труду полуэнциклопедический характер, включив в него, помимо собственно математического материала, многочисленные сведения по естествознанию и технике. «Арифметика» делится на две книги. Первая из них состоит из пяти частей и посвящена преимущественно арифметике. Во второй книге три части, включающие алгебру с геометрическими приложениями, начала тригонометрии, космографию, географию и навигацию. Геометрического материала в «Арифметике» было мало, поэтому были напечатаны ещё два геометрических руководства.

Рис. 83. Титульный и первый листы «Арифметики» Магницкого

Поворотным пунктом в развитии науки в России явилось основание Петербургской Академии наук. Академия состояла из трех классов: первый объединял математику, астрономию, механику с географией, второй — физику, химию и естественные науки, третий — гуманитарные дисциплины. Академии предназначалась роль не только научного учреждения, но и основного центра подготовки ученых и вспомогательного персонала. С этой целью при Академии учреждались университет и гимназия, а на академиков возлагались преподавание в них и индивидуальные занятия с более способными студентами.

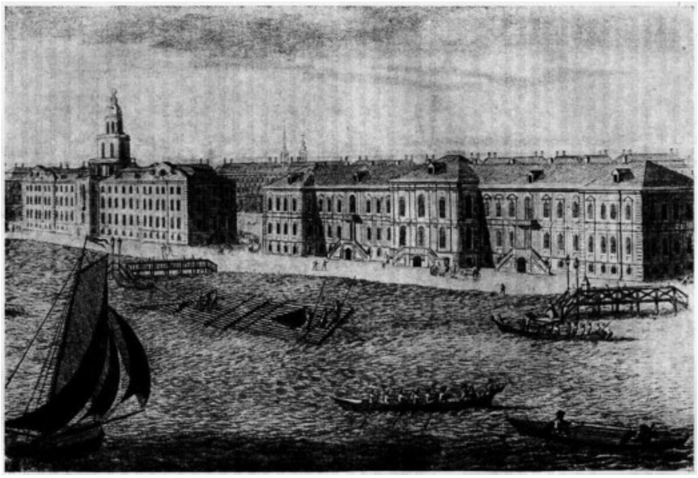


Рис. 84. Академия Наук в Санкт-Петербурге в XVIII в.

К началу XVIII века стало очевидным значение большого математического аппарата для разработки многих теоретических и практических проблем науки и техники, имеющих государственное и общественное значение. При организации Петербургской Академии наук это обстоятельство учитывалось в полной мере. Среди 23 академиков, приглашенных на работу в течение первых лет, семь являлись математиками. Вначале академиков пришлось выписывать из-за рубежа, но в XVIII веке в Академии уже работали русские математики. Вскоре после основания Академии наук в Петербурге, молодая русская столица превратилась в крупнейший международный центр физико-математических исследований.

Большой вклад внесла Академия наук в создание учебной математической литературы. Ведущими были руководства Л. Эйлера, оказавшие исключительное воздействие на мировую учебную литературу. Прежде всего, это «Руководство к арифметике…», положившее начало новому течению в отечественной учебной литературе. Особенно своё влияние «Руководство» Эйлера оказало через две книги Курганова – «Универсальная арифметика», содержащая также геометрическую и алгебраическую части, и «Арифметика или числовник», отличающаяся от предыдущей книги главным образом исключением геометрических задач и алгебры. Ещё большее значение получила «Универсальная арифметика» Эйлера. Это учебное руководство по алгебре включает большой отдел, посвященный решению в целых числах неопределенных уравнений, и содержит ряд открытий самого Эйлера. Сжатым конспектом трудов Эйлера явилось первое на русском языке изложение основ математического анализа, принадлежащее С.К. Котельникову.

Рис. 85. Леонард Эйлер

Но главным приоритетом Академии оставалась научная деятельность. Здесь центральной фигурой был великий Л. Эйлер. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук. С точки зрения математики, XVIII век — это век Эйлера. Если до него достижения в области математики были разрознены и не всегда согласованы, то Эйлер впервые увязал анализ, алгебру, тригонометрию, теорию чисел и другие дисциплины в единую систему, и добавил немало собственных открытий.

Благодаря Эйлеру в математику вошли общая теория рядов, удивительная по красоте «формула Эйлера», операция сравнения по целому модулю, полная теория непрерывных дробей, многочисленные приёмы интегрирования и решения дифференциальных уравнений, число e и многое другое. По существу именно он создал несколько новых математических дисциплин — теорию чисел, вариационное исчисление, теорию комплексных функций, дифференциальную геометрию поверхностей, специальные функции.

Большинство математиков XVIII века занимались развитием анализа, но благодаря трудам Эйлер возродился интерес к теории чисел. Эйлер продолжил исследования Ферма, ранее высказавшего ряд разрозненных гипотез о натуральных числах. Эйлер строго доказал эти гипотезы, значительно обобщил их и объединил их в содержательную теорию чисел. Он создал теорию сравнений и квадратичных вычетов, доказал утверждение Ферма о представлении нечётного простого числа в виде суммы двух квадратов и создал полную теорию непрерывных дробей.

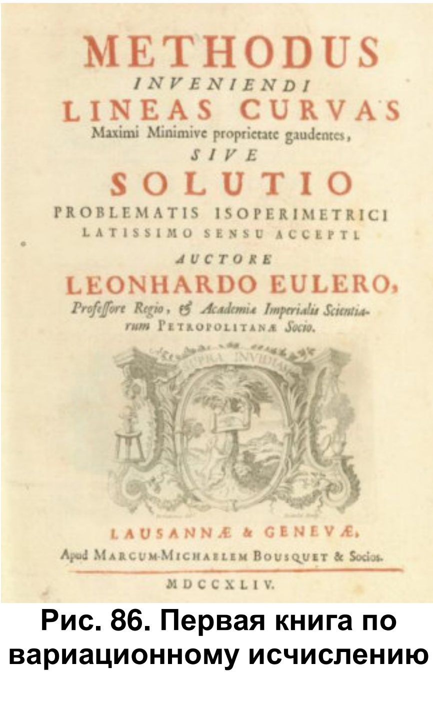

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

Рис. 86. Первая книга по вариационному исчислению

Одна из главных заслуг Эйлера перед наукой — монография «Введение в анализ бесконечно малых» (1748). В 1755 г. выходит дополненное «Дифференциальное исчисление», а в 1768—1770 гг. — три тома «Интегрального исчисления». В совокупности это фундаментальный, хорошо иллюстрированный примерами курс, с продуманной терминологией и символикой, откуда многое перешло и в современные учебники.

Эйлер делит с Лагранжем честь открытия вариационного исчисления, выписав уравнения Эйлера — Лагранжа для общей вариационной задачи. В 1744 году Эйлер опубликовал первую книгу по вариационному исчислению. Он значительно продвинул теорию рядов и распространил её на комплексную область, получив при этом знаменитую формулу Эйлера. Современное определение показательной, логарифмической и тригонометрических функций — тоже заслуга Эйлера, так же как их символика и обобщение на комплексный случай.

Рис. 87. Эйлер на почтовых марках СССР и ФРГ

Эйлер первый дал систематическую теорию интегрирования и используемых там технических приёмов, нашёл важные классы интегрируемых дифференциальных уравнений. Он открыл эйлеровы интегралы — ценные классы специальных функций, возникающие при интегрировании, первый ввёл двойные интегралы, получил серьёзные результаты в теории эллиптических функций, в том числе первые теоремы сложения.

В элементарной геометрии Эйлер обнаружил несколько фактов, не замеченных Евклидом. А второй том «Введения в анализ бесконечно малых» — это первый в мире учебник по аналитической геометрии и основам дифференциальной геометрии. Термин аффинные преобразования впервые введён в этой книге вместе с теорией таких преобразований. И это далеко не все достижения Леонардо Эйлера.

Большой вклад в развитие математической культуры и науки внесли ученики и ближайшие сотрудники Эйлера — академики С.К. Котельников, С.Я. Румовский, М. Софронов, М.Е. Головин, Н.И. Фусс, С.Е. Гурьев и Б.И. Висковатов. Они преподавали в учебных заведениях, писали руководства и популярные статьи по математике, механике и астрономии.

Первая половина XIX в. в истории математики России была отмечена новыми замечательными достижениями, которым суждено было оказать решающее влияние не только на мировую математику в целом, но и на все математическое естествознание.

После смерти Л. Эйлера (1783) Петербургская Академия наук на некоторое время утратила значение крупнейшего европейского центра в области математических наук. Но уже в двадцатые годы XIX века начался новый подъем математики в России. Одной из важных предпосылок этого подъема явились изменения в системе образования. Особенное значение имела организация новых университетов и создание физико-математических факультетов. В России, наряду с Петербургом возникают новые математические центры. Развитие науки в России определяют такие великолепные учёные, как Н.И. Лобачевский, М.В. Остроградский, О.И. Сомов, П.Л. Чебышев и А.Ю. Давидов.

Рис. 88. Н.И. Лобачевский

Открытие Лобачевским первой системы неевклидовой геометрии явилось важнейшее событием в истории. Важной предпосылкой открытия Лобачевского было стремление его к точному исследованию основных понятий математики. Существенный недостаток точности и строгости Лобачевский усмотрел и в самих начальных понятиях геометрии. В «Новых началах Геометрии» он сделал первую в истории математики попытку в качестве отправного пункта избрать наиболее общие свойства трёхмерных геометрических тел, рассматриваемых как абстракции твердых движущихся тел действительного мира. Лобачевский приходит к убеждению, что все известные попытки доказать постулат о параллельных несостоятельны и через четыре года в труде «Краткое изложение начал геометрии...» излагает главные идеи и выводит ряд теорем новой, неевклидовой геометрии. Три года спустя основное содержание «Краткого изложения» было включено в классический труд Лобачевского «О началах геометрии», открывший новую эпоху в истории не только геометрии, но и математики в целом.

Открытие и разработка неевклидовой геометрии были главным делом Лобачевского, но ему принадлежат также ценные исследования по алгебре и анализу.

Лобачевский почти в одно время с Дирихле формулирует современное общее определение функции и значительно продвигается в исследовании достаточных условий разложимости функций в ряды Фурье. Первые алгебраические исследования Лобачевского изложены в большой монографии «Алгебра, или Вычисление конечных». Вскоре после этой книги вышли ещё два больших труда по алгебре: «Теория определенных алгебраических уравнений высших степеней» Сомова и «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа» Остроградского.

Остроградский оказал значительное влияние на развитие математики и механики. К его исследованиям примыкают многие последующие работы по математической физике, по теории интегрирования иррациональных функций, по теории кратных интегралов и даже по теории чисел и теории вероятностей, которыми сам он занимался немного. Научные заслуги Остроградского были высоко оценены и за рубежом. Он был избран членом-корреспондентом французской Академии наук в 1856 г., а еще ранее членом Американской академии наук и академий в Турине и в Риме.

Рис. 89. М.В. Остроградский

Деятельность в первую очередь Остроградского и Буняковского вновь подняла на высокий уровень математические исследования в Академии наук. Своим творчеством Остроградский подготовлял почву для возникновения новой математической школы в Петербурге. Непосредственным организатором и признанным главой второй Петербургской математической школы стал П.Л. Чебышев. Блестящие результаты Чебышева и его последователей явились крупным национальным вкладом в мировую математику.

Докторская диссертация Чебышева — замечательное по оригинальности построения и выводов изложение теории сравнений, содержавшее многие собственные результаты автора. Затем Чебышев обращается к теории алгебраических функций и издаёт «Об интегрировании иррациональных дифференциалов». Начиная с 1853 г. в творчестве Чебышева всё с большей силой преобладают теория механизмов и теория приближения функций, а в 60-е годы Чебышев занимается теорией вероятности. В работе «О средних величинах» он дал широкое обобщение закона больших чисел. Вслед за тем он после долгих поисков предложил соответствующее обобщение центральной предельной теоремы, которой посвятил статью «О двух теоремах относительно вероятностей». Два этих труда принадлежат к числу классических. Замечательные открытия Чебышева принесли ему громкую славу в России и за границей.

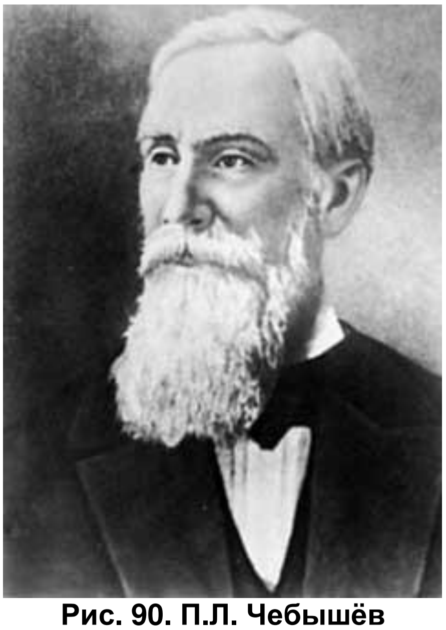


Рис. 90. П.Л. Чебышёв


Рис. 91. С.В. Ковалевская

Ещё один выдающийся математик, Софья Васильевна Ковалевская – первый в мире профессор математики среди женщин. В 1888 г. Ковалевской присуждают премию Парижской Академии наук за лучшую работу о вращении твердого тела. В 1889 г. Ковалевская получила премию Шведской Академии за вторую работу на ту же тему. Эти исследования принесли Ковалевской мировую славу. Основной математический результат Ковалевской содержится в работе «К теории дифференциальных уравнений в частных производных». Это — известная теорема Ковалевской о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными.

Начало XX века было ознаменовано новым подъемом научного творчества на физико-математическом факультете Московского университета. В области математики это отмечено созданием московской школы теории функций, деятельность которой оказала мощное и плодотворное влияние на все последующее развитие математических наук в России и за её пределами.

Идеи теории множеств и теории функций начинают распространяться в России с конца XIX и начала XX вв. Особого внимания заслуживает курс лекций по введению в анализ С.О. Шатуновского. Его «Введение в анализ» во многом представляет собой оригинальный научный труд. Особенностью является стремление автора использовать минимум исходных посылок и дать широкое обобщение ряда основных теорем. Д.Ф. Егорову принадлежит одна из основных теорем в теории функций, опубликованная им в заметке «О последовательности измеримых функций» и вошедшая теперь во все учебники по этому предмету.


Рис. 92. Н.Н. Лузин

Главным идейным вдохновителем и признанным главой новой московской математической школы явился Н.Н. Лузин. В статье «К основной теореме интегрального исчисления» Лузин сообщил замечательную теорему о так называемом «*C*-свойстве» измеримых функций. В той же статье Лузин получил новые результаты в задаче об отыскании первообразных функций. Другая статья «Об одном случае ряда Тейлора», содержала первые выдающиеся открытия Лузина в теории степенных и тригонометрических рядов. Знаменитый труд «Интеграл и тригонометрический ряд» явился ценнейшим вкладом Лузина в метрическую теорию функций.

Первоклассные труды по теории функций, теории чисел и теории вероятностей принадлежат А.Я. Хинчину и А.Н. Колмогорову. Первым достижением Колмогорова было получение необходимых и достаточных условия, при которых имеет место закон больших чисел. Успехи теории вероятности преумножили многие советские математики, но современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной Колмогоровым. В 1941 г. Колмогорову и Хинчину за работы по теории вероятностей была присуждена Сталинская премия. Колмогоров внёс вклад и в другие области математики — общую теорию операций над множествами, теорию интеграла, теорию информации и т.д. Во всех этих дисциплинах многие методы и теоремы Колмогорова являются, по общему признанию, классическими.

Работы П.С. Александрова и М.Я. Суслина принадлежали к дескриптивной теории функций. Александров доказал, что всякое несчетное борелевское множество, содержа совершенную часть, имеет мощность континуума и использовал новый приём задания борелевских множеств.

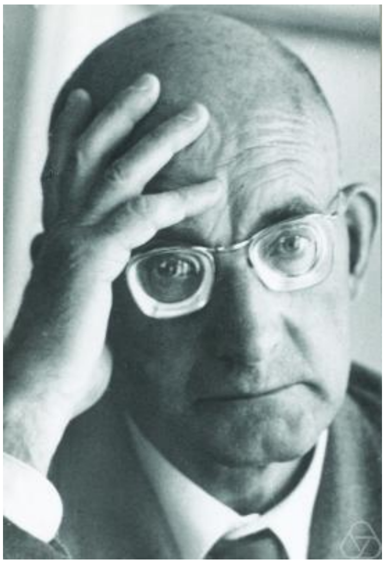


Рис. 93. П.С. Александров

Рис. 94. А.Н. Колмогоров

Граничные свойства аналитических функций явились предметом изысканий И.И. Привалова, который глубоко продвинулся в анализе свойств интеграла типа Коши.

Значение московской школы теории функций далеко не ограничивается открытиями в самой теории функций. Методы теории функций были эффективно использованы в теории аналитических функций и топологии, в теории чисел и теории вероятностей, в качественной теории дифференциальных уравнений и вариационном исчислении и т. д.

ПРИЛОЖЕНИЯ

CD-ROM «Пакет компьютерных презентаций к курсу «История математики»

Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

Перечень тем сообщений

Биография и научная деятельность выдающихся математиков

1. Евдокс
2. Аполлоний
3. Диофант
4. Аль Хорезми
5. Аль Каши
6. Улугбек
7. Леонардо Пизанский
8. Иордан Неморарий
9. Томас Брадвардин
10. Никола Орем
11. Лука Пачоли
12. Джироламо Кардано
13. Симон Стевин
14. Франсуа Виет
15. Джон Непер
16. Пьер Ферма
17. Блез Паскаль
18. Исаак Ньютон
19. Готфрид Вильгельм Лейбниц
20. Леонард Эйлер
21. Жозеф Луи Лагранж
22. Карл Фридрих Гаусс
23. Огюстен Луи Коши
24. Жан Лерон Даламбер
25. Нильс Хенрик Абель
26. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс
27. Герман Вейль
28. Мориц Бенедикт Кантор
29. Николай Иванович Лобачевский
30. Михаил Васильевич Остроградский
31. Пафнутий Львович Чебышёв
32. Софья Васильевна Ковалевская
33. Николай Николаевич Лузин
34. Андрей Николаевич Колмогоров

Сообщение должно сопровождаться презентацией 5-12 слайдов.

Требования к содержанию презентации

– соответствие содержания презентации поставленной цели;

– соблюдение принятых правил орфографии, пунктуации, сокращений и правил оформления текста (отсутствие точки в заголовках и т.д.);

– отсутствие фактических ошибок, достоверность представленной информации;

– лаконичность текста на слайде;

– завершенность (содержание каждой части текстовой информации логически завершено);

– сжатость и краткость изложения, максимальная информативность текста.

Задания по разработке групповых мини-проектов

Разработать групповой мини-проект по одной из следующих тем:

1. Представление исторической компоненты логико-дидактического анализа одной из тем школьного курса математики
2. Использование историко-математического материала в школьном курсе при изучении одной из тем
3. Внеурочная работа по истории математики

Тест

1. В какой стране математика стала дедуктивной наукой?

А) Индия Б) Египет В) Греция Г) Китай

2. Первый кризис в развитии математики был связан с

А) с открытием несоизмеримости Б) с появлением «Апорий» Зенона
В) с формулировкой аксиомы параллельных Г) с пифагорейским учением о числе

3. Кто первым ввел в математику доказательство?

А) Архимед Б) Фалес В) Евклид Г) Пифагор

4. Проблемой квадратуры круга занимались в научной школе

А) пифагорейцев Б) элеатов В) атомистов Г) софистов

5. Родоначальником алгебры считается

А) Диофант Б) Ф.Виет В) Ал-Хорезми г) М.Штифель

6. «Отцом буквенной алгебры» считается

А) Диофант Б) Ф.Виет В) Ал-Хорезми г) М.Штифель

7. Общую классификацию уравнений 1-3 степени дал

А) ал-Хорезми Б) Омар Хайям И) ал-Бируни Г) ал-Каши

8. Метод фэн-чен в китайской математике связан

А) с решением систем линейных уравнений
Б) с решением квадратных уравнений
В) с вычислением площадей геометрических фигур
Г) с доказательством иррациональности π

9. Отношение последующего члена ряда Фибоначчи к предыдущему связано
А) с числом π Б) С числом е В) с числом золотого сечения
г) с числом $\sqrt{2}$

10. Мнимые числа впервые встретились в работах

А) Д.Кардано Б) К. Ф.Гаусса В) Р. Бомбелли Г) Р.Декарта

11. «Он всю жизнь занимался созданной им «воображаемой геометрией», но в этой воображаемой науке не было ничего фантастического. Она и есть несомненная реальная вещь»

А) К.Ф.Гаусс Б) Н.И.Лобачевский В) Ф.Клейн Г) Б.Риман

12. Он является основателем дифференциальной, проективной, начертательной геометрии

А). Р.Декарт Б) Ж.Дезарг В) Ж.В.Понселе Г) Г.Монж

13. Кто ввел термин «функция»?

А) Р.Декарт Б) И.Ньютон В) Г.В.Лейбниц Г) Л.Эйлер

14. Автором «Новой стереометрии винных бочек» и создателем метода измерения объемов тел вращения является

А) Б.Кавальери Б) И.Кеплер В) Г.Галилей Г) П.Ферма

15. Взаимно обратный характер задач на касательные и квадратуры установил

А) Д.Валли Б) И.Ньютон В) И.Кеплер Г) И.Барроу

16. В «Аналисте» Д.Беркли выступил против

А) дифференциального исчисления Б) метода неделимых
В) аналитической геометрии Г) теории числе

17. Теорию «компенсации ошибок» разрабатывал

А) Ж.Р.Даламбер Б) Ж.Л.Лагранж В) Л.Эйлер Г) Л.Карно

18. Пример непрерывной всюду функции, не имеющей производной ни в одной точке, построил

А) О.Л.Коши Б) Л.Эйлер В) Г.Ф.Гаусс Г) К.Вейерштрасс

19. С докладом об основных проблемах математики выступил

А) Д.Гильберт Б) Ф.Клейн В) Б.Риман Г) А.Пуанкаре

20. Основателем логицизма является

А) Г.Вейль Б) Г.Фреге В) А.Вейль Г) Г.В.Лейбниц

21. О ком сказано: «Его книга является первым фундаментальным трудом в истории русской математики. Заглавие не определяет содержание. По существу его книга является энциклопедией математических знаний»?

А) Л.Эйлер Б) Кирик Новгородский В) Л.Ф.Магницкий
Г) М.В.Остроградский

22. Первые серьезные исследования по теории вероятностей в России были начаты

А) Л.Эйлером Б) П.Л.Чебышевым В) Л.Магницкий
Г) М.В.Остроградским

23. Московское математическое общество было создано благодаря деятельности

А) Д.М.Перевощикова Б) Н.Д.Брашмана В) Н.В.Бугаева
Г) Д.Ф.Егорова

24. Кто адресат обращения Ш.Эрмита: «Вы являетесь гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров вех времен»?

А) Л.Эйлер Б) П.Л.Чебышев В) Д.Ф.Егоров Г) М.В.Остроградский

25. Кто из математиков работал в Варшавском университете?

А) Г.Ф.Вороной Б) Н.Д.Брашман В) О.И.Сомов Г) А.А.Марков