МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Линейная алгебра

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на контатную и на самостоятельную работу;
- формах контатной и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

Тема. Матрицы и операции над ними

План

1. *Понятие матрицы размерности (m, n). Квадратные матрицы.*
2. *Матрицы специального вида.*
3. *Сложение матриц и его свойства.*
4. *Умножение матриц и его свойства.*
5. *Транспонирование матриц.*

1. Понятие матрицы размерности (m, n). Квадратные матрицы.

Определение Пусть P – числовое поле. *(m, n)-матрицей* ($m, n \in N$) над P называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Для краткого обозначения матрицы используется либо одна большая латинская буква, например, A, либо символ $[a_{ij}]_{m \times n}$, а иногда и с разъяснением: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ (i – номер строки, j – номер столбца). Числа m и n называются *порядками* матрицы.

В случае если m = n, матрица называется *квадратной* и имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

В частности, квадратная матрица порядка 1 – это просто элемент из P.

Если m = 1, то матрицу $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ иногда удобно рассматривать как n-вектор. При n = 1 матрицу $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ удобно рассматривать как m-вектор.

Определение. Пусть A и B – две (m, n)-матрицы с элементами a_{ij}, b_{ij}, соответственно. Они называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$. Равенство матриц обозначается символом A = B.

Множество всех (m, n)-матриц над P обозначим $M_{m,n}(P)$.

Как и ранее под полем P подразумеваем поле вещественных чисел ***R***.

В случае квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагонали.

Определение 6.3. *Главной диагональю* квадратной матрицы называется диагональ $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний ее угол. *Побочной диагональю* той же матрицы называется диагональ $a_{n1}a_{(n-1)2}\dots a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

2. Матрицы специального вида.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = O_{m,n} \in M_{m,n}$ называется *нулевой матрицей*.

2. $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} = D \in M_n$ называется *диагональной*.

Если $d_1 = d_2 = \dots = d_n$, то матрица называется *скалярной*. Если $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$, то $D = E_n$ и матрица называется *единичной*.

3. *Треугольная (верхняя) матрица* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$

(Аналогично треугольная нижняя).

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} = E_{m,n} \in M_{m,n}$ называется *единичной матрицей*.

3. Сложение матриц и умножение матрицы на число и их свойства

Определение. *Суммой двух матриц* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ одних и тех же порядков m и n называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ тех же порядков m и n, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$), т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & ... & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & ... & (a_{2n}+b_{2n}) \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & ... & (a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Для обозначения суммы двух матриц используется запись C = A + B.

Определение. *Произведением матрицы* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *на вещественное число* λ называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$).

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C = \lambda A$.

Теорема. Для всяких матриц A, $B \in M_{m,n}$ и любых чисел λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ выполняются свойства:

1. A + B = B + A – коммутативность сложения матриц.
2. A + (B + C) = (A + B) + C – ассоциативность сложения матриц.
3. Для любых матриц A, $B \in M_{m,n}$ всегда найдется такая матрица $X \in M_{m,n}$, что A + X = B (X называется разностью между A и B и обозначается X = A – B) – обратимость сложения матриц.
4. $(\lambda\mu) A = \lambda (\mu A)$ – ассоциативность умножения на числа.
5. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$ – дистрибутивность относительно сложения чисел.
6. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$ – дистрибутивность относительно сложения матриц.
7. $1 \cdot A = A$ – свойство единичного множителя.

4. Умножение матриц и его свойства

Определение. *Произведением матрицы* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, имеющей порядки, соответственно равные m и n, *на матрицу* $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, имеющую порядки, соответственно равные n и p, называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times p}$, имеющая порядки, соответственно равные m и p, и элементы c_{ij}, определяемые формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1,2,...,m; j = 1,2,..., p)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div p$).

Для обозначения произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C = A \cdot B$.

Правило умножения матриц иногда формулируют следующим образом: чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на соответственные элементы j-го столбца второй и полученные произведения сложить.

Заметим, что произведение A на B определено не всегда: необходимо, чтобы *число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B,* при этом произведение будет содержать количество строк матрицы A и количество столбцов матрицы B.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Заметим, что A – (2, 3)-матрица, B – (3, 3)-матрица, поэтому произведение $A \cdot B$ определено и должно быть (2, 3)- матрицей, а произведение $B \cdot A$ не определено.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Умножение матриц не обладает свойством коммутативности: почти всегда $AB \neq BA$. Например, если $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, то $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, а $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Теорема. Умножение матриц ассоциативно, т.е. если существуют произведения матриц AB и BC, то существует и произведения: (AB)C, A(BC), причем эти произведения равны между собой: (AB)C = A(BC).

Доказательство этой теоремы можно провести, исходя из определения умножения матриц, но оно получится очень громоздким, и мы его здесь не приводим.

Теорема. Пусть A и B – две (m, n)-матрицы.

Для всякой (n, k)-матрицы C имеет место: (A + B)C = AC + BC.

Для всякой (k, m)-матрицы D имеет место: D(A + B) = DA + DB, т.е. умножение матриц дистрибутивно относительно сложения.

Замечание. Непосредственной проверкой можно установить, что для любой квадратной матрицы A порядка n и единичной матрицы того же порядка имеет место равенство: $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$.

5. Транспонирование матриц

Определение. Для произвольной матрицы А *транспонированной* по отношению к ней называется матрица A^T, которая получается в результате замены в А строк соответствующими по номеру столбцами:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пример. Приведем пример транспонированной матрицы.

Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 10 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 8 & -9 \end{bmatrix}$, тогда $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$.

Теорема. Пусть А, В – две (m, n)-матрицы. Тогда

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Тема. Теорема Кронекера-Капели. Теорема о числе решений СЛУ

План

1. Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений.
2 .Теорема Кронекера-Капелли.
3. Теорема о числе решений системы линейных уравнений.
4. Следствия из теоремы о числе решений.

1. Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений

Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

называется *основной матрицей системы* (1).

Добавив столбец свободных членов, получаем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

называемую *расширенной матрицей системы* (1).

Столбцы расширенной матрицы системы (1) обозначим:

$$v_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\...\\a_{m1}\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\...\\a_{m2}\end{pmatrix},...,v_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\...\\a_{mn}\end{pmatrix},v_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\...\\b_m\end{pmatrix}.$$

Соответственно строки расширенной матрицы будем обозначать: u_1, u_2, …, u_m.

Столбцы, строки так же, как и решения системы, будем рассматривать как векторы соответствующих размерностей.

То, что вектор $w = (\alpha_1, \alpha_2, …, \alpha_n)$ является решением системы линейных уравнений (1), по определению означает выполнения равенств:

$$a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n=b_1,$$
$$a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n=b_2,$$
$$...$$
$$a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+...+a_{mn}\alpha_n=b_m.$$

Но эти равенства можно трактовать как следующее соотношение между m-векторами, являющимися столбцами расширений матрицы системы B: $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + ... + \alpha_nv_n = v_0$. Таким образом, система линейных уравнений (2.1) разрешима тогда и только тогда, когда в расширенной матрице системы последний столбец v_0 выражается линейно через остальные столбцы: v_1, v_2, …, v_n. Решением системы является всякая последовательность коэффициентов такого линейного выражения.

2 .Теорема Кронекера-Капелли

Теорема (*Кронекера-Капелли*). Система линейных уравнений (1)

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\...\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

разрешима тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы:

rang A = rang B.

Доказательство. Если матрица A системы (1) нулевая, то система разрешима тогда и только тогда, когда B тоже нулевая матрица, т.е. rang A=rang B=0.

Пусть A – ненулевая матрица. В соответствии с введенными выше обозначениями, система (1) разрешима тогда и только тогда, когда вектор v_0 линейно выражается через векторы v_1, v_2, …, v_n. Это в свою очередь возможно тогда и только тогда, когда всякий базис совокупности векторов v_1, v_2, …, v_n является базисом v_1, v_2, …, v_n, v_0. *Поясните*. Последнее выполнено тогда и только тогда, когда rang A = rang B.

Вопрос о количестве решений разрешимой системы линейных уравнений выясняется сравнением ранга матрицы A (равного рангу B) с числом неизвестных. При этом следует иметь в виду, что всегда rang A $\le$ n.

3. Теорема о числе решений системы линейных уравнений.

Теорема *(о числе решений).* Если в разрешимой системе линейных уравнений с n неизвестными (1) rang A = rang B = n, то система (1) имеет единственное решение.

Если rang A = rang B < n, то система (1) имеет бесконечное множество различных решений.

Доказательство.

1. Пусть rang A = rang B =n. Предположим, что существуют два решения $w_1=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $w_2=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ системы (1). В соответствии с введенными выше обозначениями это означает:

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n=v_0,$$
$$\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\ldots+\beta_n v_n=v_0.$$

Вычитая, получим $(\alpha_1-\beta_1)v_1+(\alpha_2-\beta_2)v_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)v_n=\theta$. Так как rang A=n, то векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно независимы, а значит, $\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\ldots= =\alpha_n-\beta_n=0$, т.е. $\alpha_i=\beta_i$ $(i=1\div n)$. Таким образом, $w_1=w_2$.

2. Пусть rang A = rang B < n. Тогда векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не все равные нулю, что $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n=\theta$ (*).

Пусть $w=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – решение системы (1). Тогда

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n=v_0 \quad (**).$$

Умножим соотношение (*) на произвольное число μ и сложим с соотношением (**):

$$(\alpha_1+\mu\lambda_1)v_1+(\alpha_2+\mu\lambda_2)v_2+\ldots+(\alpha_n+\mu\lambda_n)v_n=v_0.$$

Это означает, что последовательность $(\alpha_1+\mu\lambda_1, \alpha_2+\mu\lambda_2, \ldots, \alpha_n+\mu\lambda_n)$ является решением системы (1). Так как μ – произвольное число, а среди λ_i $(i=1\div n)$ есть отличные от нуля, то мы получили бесконечно

4. Следствия из теоремы о числе решений

Особо отметим важный случай, когда в системе линейных уравнений число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (2).$$

Следствие 1. Если в системе (14.3) rang A = n, то эта система разрешима и имеет единственное решение.

Следствие 2. Если в системе (2) rang A < n, то эта система или неразрешима, или имеет бесконечное множество решений.

Замечание. Рассмотрим случай, когда система (1) разрешима (и потому rang A = rang B = r). Для простоты обозначений вполне можно считать, что именно r первых строк матрицы B образуют базис системы всех ее строк. Тогда остальные строки выражаются через них линейно, т.е. существуют такие числа $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \ldots, \lambda_{rk}$, что

$$u_k=\lambda_{1k}u_1+\lambda_{2k}u_2+\ldots+\lambda_{rk}u_r, \quad (k=(r+1)\div m),$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – строки матрицы B.

Покажем, что в этом случае система (2.1) эквивалентна системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases} \quad (3).$$

Действительно, с учетом линейного выражения k-ой строки матрицы B системы (2.1) через строки $u_1, u_2, \ldots, u_r$ k-ое уравнение этой системы имеет вид $(k=(r+1)\div m)$:

$$(\lambda_{1k}a_{11}+\lambda_{2k}a_{21}+\ldots+\lambda_{rk}a_{r1})x_1+(\lambda_{1k}a_{12}+\lambda_{2k}a_{22}+\ldots+\lambda_{rk}a_{r2})x_2+\ldots+(\lambda_{1k}a_{1n}+\lambda_{2k}a_{2n}+\ldots+$$
$$+\lambda_{rk}a_{rn})x_n=\lambda_{1k}b_1+\lambda_{2k}b_2+\ldots+\lambda_{rk}b_r, \text{ или}$$

$$\lambda_{1k}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+\lambda_{2k}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)+\ldots+\lambda_{rk}(a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n)= \lambda_{1k}b_1+\lambda_{2k}b_2+\ldots+\lambda_{rk}b_r.$$

Если последовательность чисел (α_1, α_2, …, α_n) – произвольное решение первых r уравнений системы (1), то являются верными следующие числовые равенства при $k=(r+1)\div m$:

$$\lambda_{1k}(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n)+\lambda_{2k}(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n)+\ldots+\lambda_{rk}(a_{r1}\alpha_1+a_{r2}\alpha_2+\ldots+a_{rn}\alpha_n)= \lambda_{1k}b_1+\lambda_{2k}b_2+\ldots+\lambda_{rk}b_r,$$

а значит, (α_1, α_2, …, α_n) – решение всех k-ых уравнений ($k=(r+1)\div m$) системы (1). Следовательно, k-ые уравнения ($k=(r+1)\div m$) из системы (1) можно исключить.

Так как система (3) разрешима и ранг ее расширенной матрицы равен r, то и ранг ее матрицы должен равняться r. Можно считать, что первые r столбцов образуют базис системы столбцов матрицы системы (3), а тем самым и ее расширенной матрицы.

Если мы придадим неизвестным x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n произвольные численные значения $x_{r+1} = t_{r+1}$, $x_{r+2} = t_{r+2}$, …, $x_n = t_n$, то из системы (3) получим новую систему с r неизвестными x_1, x_2, …, x_r:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = (b_1 - a_{1(r+1)}t_{r+1} - \ldots - a_{1n}t_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = (b_2 - a_{2(r+1)}t_{r+1} - \ldots - a_{2n}t_n) \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = (b_r - a_{r(r+1)}t_{r+1} - \ldots - a_{rn}t_n) \end{cases} \quad (4).$$

У этой системы ранг матрицы равен r. Поэтому согласно теореме о числе решений, она обладает единственным решением $x_1 = \gamma_1$, $x_2 = \gamma_2$, …, $x_r = \gamma_r$.

Учитывая то, как связаны между собой системы (3) и (4), заключаем, что вектор $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r, t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_n]$ является решением системы (3).

Нетрудно показать, что всякое решение системы (3) (α_1, α_2, …,α_n) может быть получено указанным способом. Для этого в качестве произвольных значений для неизвестных x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n следует взять $x_{r+1} = \alpha_{r+1}$, $x_{r+2} = \alpha_{r+2}$, …, $x_n = \alpha_n$. В получившейся после этого системе (4) вектор (α_1, α_2, …,α_r) будет, очевидно, ее решением. При этом это ее единственное решение, что следует из теоремы о числе решений. Поэтому, решая (4), мы обязательно придем именно к этому решению (α_1, α_2, …,α_r), которое совместно с принятыми ранее значениями неизвестных $x_{r+1} = \alpha_{r+1}$, $x_{r+2} = \alpha_{r+2}$, …, $x_n = \alpha_n$ и составит исходное произвольное решение системы (3) (α_1, α_2, …,α_r, α_{r+1}, …, α_n).

Остается напомнить, что системы (1) и (3) в рассмотренном случае эквивалентны. Таким образом, проведенные рассуждения дают способ сведения задачи об описании всех решений произвольной системы к случаю системы, описанному в теореме о числе решений.

Тема. Методы решения систем линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений

План

1. *Система m линейных уравнений с n неизвестными: основные понятия.*
2. *Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.*
3. *Приведение системы линейных уравнений к ступенчатому виду.*
4. *Решение систем линейных уравнений методом Крамера.*
5. *Решение систем линейных уравнений матричным методом.*
6. *Однородные системы линейных уравнений*

1. Система m линейных уравнений с n неизвестными: основные понятия

Определение. *Системой m линейных уравнений с n неизвестными* x_1, $x_2,\dots, x_n$ называется система соотношений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1),$$

где a_{ij}, $b_i \in P$, P – числовое поле, $i=1\div m$, $j=1\div n$.

Заданные числа a_{ij} называются *коэффициентами при неизвестных*, а b_i – *свободными членами*.

Напомним, что в дальнейшем под числовым полем P подразумеваем поле вещественных чисел ***R***.

Определение. *Решением системы* (1) называется последовательность n вещественных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots,\alpha_n)$, для которой при подстановке $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$, в систему (1) все уравнения этой системы обращаются в верные числовые равенства.

Определение 2.3. Две системы линейных уравнений вида (1) с неизвестными x_1, $x_2,\dots, x_n$ называются *равносильными*, если всякое решение каждой из них является решением и для другой, т.е. множества решений этих систем совпадают.

2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Далее мы приведем элементарный способ решения систем линейных уравнений, называемый *методом последовательного исключения неизвестных*, а также *методом Гаусса*, по имени немецкого математика К.Ф. Гаусса (1777–1855). Для рассмотрения метода Гаусса понадобится понятие ступенчатой системы линейных уравнений и некоторых преобразований системы.

Определение4. *Ступенчатая система линейных уравнений* имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ \quad\quad\quad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}. \quad (2).$$

Здесь $a_{ii}\neq 0$, $i=1\div k$.

Рассмотрим следующие преобразования системы линейных уравнений (1):

(α). Умножение одного из уравнений на число, отличное от 0.

(β). Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения этой же системы, умноженного на произвольное число.

Лемма 2.5. Если система линейных уравнений ($*$) получена из системы (1) при помощи одного из преобразований (α) или (β), то исходная и полученная системы равносильны.

Доказательство. Рассмотрим доказательство случая, когда система ($*$) получена из системы (1) с помощью преобразования (β).

Итак, пусть для определенности взяты первое и второе уравнения системы (1), ведь уравнения в системе можно записывать в любом порядке. Тогда речь идет о переходе от системы (1) к системе:

$$\begin{cases}(a_{11}+\lambda a_{21})x_1+(a_{12}+\lambda a_{22})x_2+...+(a_{1n}+\lambda a_{2n})x_n=b_1+\lambda b_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ ...\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \quad (*).$$

Докажем, что системы (1) и (*) равносильны. Пусть (α_1, α_2, …, α_n) – решение системы (1), то есть подставив в (1) вместо переменных x_j числа α_j ($j=1\div n$), получим верные числовые равенства. Прибавив к первому из этих равенств второе, умноженное на λ, получим систему равенств, означающую, что (α_1, α_2, …, α_n) является решением системы уравнений (*).

Аналогично, пусть (β_1, β_2,…, β_n) – решение системы (*). Подставим в нее вместо x_i числа β_i ($i=1\div n$), получим систему верных равенств. Вычитая из первого равенства второе, умноженное на λ, получаем систему равенств, означающую, что (β_1, β_2,…, β_n) – решение системы (1).

Замечание. 1. Если одно уравнение системы линейных уравнений (2.1) имеет нулевые коэффициенты при неизвестных и ненулевой свободный член, т.е. все $a_{ij} = 0$, а $b_i \neq 0$ ($i=1\div m$, $j=1\div n$), то это уравнение, а следовательно, и вся система не имеет решений.

2. Если одно уравнение системы линейных уравнений (2.1) имеет нулевые коэффициенты при неизвестных и нулевой свободный член, т.е. $a_{ij} = 0$, и $b_i = 0$ ($i=1\div m$, $j=1\div n$), то решением этого уравнения является любой набор из n вещественных чисел. Такое уравнение можно исключить из системы линейных уравнений.

3. Приведение системы линейных уравнений к ступенчатому виду

Пусть в каждом уравнении системы среди коэффициентов при неизвестных есть отличные от нуля. Предположим, для простоты обозначений, что в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то какой-нибудь другой a_{1i} отличен от нуля; кроме того, всегда можно так перенумеровать неизвестные, чтобы первым неизвестным считалось одно из тех, у которого в первом уравнении коэффициент отличен от нуля).

Пользуясь преобразованием (β), (которое повторяем последовательно n-1 раз), вычитаем из каждого i-го уравнения, начиная со второго (i = 2, 3,…, m), первое, умноженное на $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. По лемме 2.5 получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+...+a'_{2n}x_n=b'_2\\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3+...+a'_{3n}x_n=b'_3\\ ...\\ a'_{m2}x_2+a'_{m3}x_3+...+a'_{mn}x_n=b'_m\end{cases} \quad (3).$$

(коэффициенты при x_1 уничтожаются, так как $a_{i1}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot a_{11}=0$, i = 2, 3, …, m).

Повторим те же преобразования уже для m – 1 уравнений (кроме первого) системы (3). Предположив, что $a`_{22}\neq 0$, вычтем из каждого i-го уравнения, начиная с третьего (i = 3, 4, …, m), второе, умноженное на $\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$. Получим новую систему, эквивалентную предыдущим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad\quad a''_{33}x_3 + ... + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \quad\quad\quad ... \\ \quad\quad a''_{m3}x_3 + ... + a''_{mn}x_n = b''_m \end{cases} \quad (4).$$

Опять проделаем то же самое преобразование уже для последних уравнений. Продолжаем так далее. В процессе таких преобразований могут получиться уравнения вида:

0 = 0.

Такие уравнения просто откидываются согласно замечанию 2.7.

Могут также получиться уравнения вида 0 = d, где d есть постоянная, отличная от нуля. Получившаяся система не может иметь решений по замечанию. Благодаря равносильности в этом случае делаем вывод о неразрешимости и исходной системы.

Если в результате последовательных преобразований не получится «противоречивых» уравнений последнего типа, то после применения наших преобразований (m – 1) раз (а может быть в отдельных случаях и меньшего числа раз) получим систему k линейных уравнений ($k \le m$, $k \le n$), равносильную исходной и имеющую вид:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + .. + c_{1k}x_k + ... + c_{1n}x_n = d_1 \; (c_{11} \ne 0) \\ \quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + .. + c_{2k}x_k + ... + c_{2n}x_n = d_2 \quad (c_{22} \ne 0) \\ \quad\quad c_{33}x_3 + .. + c_{3k}x_k + ... + c_{3n}x_n = d_3 \quad (c_{33} \ne 0) \\ \quad\quad\quad ... \qquad\qquad ... \\ \quad\quad\quad c_{kk}x_k + ... + c_{kn}x_n = d_k \quad (c_{kk} \ne 0) \end{cases}.$$

Полученная система является ступенчатой. Если $k < n$, то полученную систему называют трапецеидальной, а если $k = n$, то систему называют треугольной.

Теорема. Ступенчатая система линейных уравнений всегда разрешима. В случае $k = n$ она имеет единственное решение, в случае $k < n$ количество решений бесконечно.

Доказательство. Придадим неизвестным x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n произвольные численные значения:

$x_{k+1} = \alpha_{k+1}$, $x_{k+2} = \alpha_{k+2}$, …, $x_n = \alpha_n$

(если $k = n$, то таких неизвестных нет). После этого из последнего уравнения найдем вполне определенное значение для x_k:

$$x_k = \alpha_k = \frac{1}{c_{kk}}(d_k - c_{k(k+1)}\alpha_{k+1} - ... - c_{kn}\alpha_n).$$

Положив $x_i = \alpha_i$ ($i = k$, $k+1$, ..., n), из предпоследнего уравнения найдем значения $x_{k-1} = \alpha_{k-1}$. Продолжаем так далее. После того, как определятся $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$, …, $x_n = \alpha_n$, из первого уравнения найдем значение для x_1:

$$x_1 = \alpha_1 = \frac{1}{c_{11}}(d_1 - c_{12}\alpha_2 - ... - c_{1n}\alpha_n).$$

Получившаяся система чисел (α_1, α_2, …, α_n), очевидно, будет решением системы, так как все уравнения становятся верными числовыми равенствами при этих значениях неизвестных. Причем таким способом может быть получено любое решение рассматриваемой системы.

При $k=n$ решение единственно, так как все значения x_i получаются вполне определенными. В случае $k<n$ неизвестным x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n можно придавать

произвольные численные значения, следовательно, количество всех решений бесконечно.

Обобщая все вышесказанное, можно сделать вывод, что элементарный способ решения систем линейных уравнений или метод Гаусса состоит в следующем:

1. Данная система линейных уравнений приводится к ступенчатому виду при помощи преобразований (α) и (β).

2. Если в процессе преобразований встретилось хотя бы одно уравнение вида 0=d, то исходная система неразрешима.

3. Если в полученной ступенчатой системе количество уравнений равно количеству неизвестных, то исходная система имеет единственное решение, которое находится из ступенчатой системы последовательным выражением x_n, x_{n-1}, …, x_1.

4. Если в полученной ступенчатой системе количество уравнений (k) меньше числа неизвестных (n), то исходная система имеет бесконечно много решений, которые можно найти из ступенчатой системы, придавая произвольные значения n-k неизвестным, а остальные неизвестные выразив через них.

4. Формулы Крамера

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим главный определитель системы (1), т.е. определитель матрицы A

Δ = det (a_{ij}) и n вспомогательных определителей Δ_i ($i \in \overline{1,n}$), которые получаются из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера имеют вид:

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i \quad (i \in \overline{1,n}). \ (**)$$

Из (**) следует правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы (1): если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители Δ_i = 0 ($i \in \overline{1,n}$), то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы Δ = 0, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

5. Матричный метод

Если матрица A системы линейных уравнений невырожденная, т.е. det A ≠ 0, то матрица A имеет обратную, и решение системы (1) совпадает с вектором C = $A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле X = C, C = $A^{-1}B$ называют матричным способом решения системы, или решением по методу обратной матрицы.

6. Однородные системы линейных уравнений

Среди систем линейных уравнений особое место занимают системы, все свободные члены которых равны нулю, называемые однородными системами линейных уравнений. В этом параграфе мы остановимся на особенностях таких систем.

Определение. Система линейных уравнений (5), у которой все свободные члены равны нулю, называется *однородной*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5).$$

Замечание. Однородная система линейных уравнений всегда имеет решение. Действительно, последовательность (0, 0,…, 0) является решением всякой системы вида (5). Поэтому интересен случай, когда однородная система имеет ненулевое решение, т.е. решение, в котором хотя бы одно из неизвестных имеет значение, отличное от нуля. Если у однородной системы линейных уравнений будут ненулевые решения, то, по теореме 2.10, их будет бесконечно много.

Лемма. Если число уравнений в однородной системе линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет ненулевое решение.

Доказательство. Приводя однородную систему уравнений к ступенчатому виду, получим систему, в которой число неизвестных больше числа уравнений. Такая система по теореме о числе решений имеет бесконечно много решений.

Если число уравнений в однородной системе линейных уравнений не меньше числа неизвестных, то о наличии ненулевых решений ничего сказать нельзя. Отметим, что в случае однородной системы при приведении ее к ступенчатому виду уравнений вида 0 =d (d≠0) мы получить не можем.

Тема. Векторное пространство. Подпространство. Сумма и прямая сумма подпространств

План

1. *Определение и свойства линейного (векторного) пространства.*
2. *Подпространства линейного пространства*
3. *Линейная оболочка системы векторов.*
4. *Суммы линейных пространств.*
5. *Изоморфизм линейных пространств.*

1. Определение и свойства линейного пространства

Определение. Пусть L есть некоторое непустое множество и P – числовое поле. В L определено действие, называемое *сложением*, согласно которому каждой паре элементов u, v ∈ L сопоставляется третий элемент из L, обозначаемый через u + v. Также определено действие *умножения элементов из L на числа из P*, согласно которому каждой паре, состоящей из элемента u ∈ L и числа λ ∈ P, сопоставлен элемент из L, обозначаемый через λu.

Если при этом выполнены следующие семь аксиом, то множество L, рассматриваемое вместе с указанными двумя операциями, называется линейным пространством над полем P.

Коммутативность сложения:

∀ u, v ∈ L u + v = v + u.

2) Ассоциативность сложения:

∀ u, v, w ∈ L (u + v) + w = u + (v + w).

Обратимость сложения:

∀ u, v ∈ L всегда найдется такой x ∈ L, что u + x = v

(при этом элемент x называется разностью между v и u и обозначается: x = v - u).

Ассоциативность умножения на числа из P:

∀ u ∈ L ∀ λ, μ ∈ P   λ(μu) = (λμ)u.

Свойство дистрибутивности относительно сложения чисел из P:

$\forall$ u $\in$ L $\forall$ λ, μ $\in$ P (λ + μ)u = λu + μu.

Свойство дистрибутивности относительно сложения элементов из L:

$\forall$ u, v $\in$ L $\forall$ λ $\in$ P λ(u + v) = λu + λv.

Свойство единичного множителя:

для числа 1 $\in$ P и $\forall$ u $\in$ L выполнено 1u = u.

Элементы любого линейного пространства будем называть *векторами.*

Примеры.

1. Координатное векторное пространство.

Рассмотрим декартово произведение множества вещественных чисел $V^{(n)} = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n\ раз}$, на котором введены действия сложения и умножения на элемент из R по следующим правилам:

$\forall$ x , y $\in$ V(n) если x = (x1, x2, …, xn) и y = (y1, y2, …, yn), то

1) x + y = (x1 + y1, x2 + y2, …, xn + yn),

2) $\forall$ α $\in$ R αx = (αx1, αx2, …, αxn).

Напомним, что множество V(n) называют n-мерным координатным векторным пространством, а его элементы называют n-мерными векторами или n-векторами.

2. Множество Mm×n всех матриц размерности m×n над полем R.

Введем на множестве Mm×n действия сложения и умножения на элемент из R по следующим правилам:

$\forall$ A, B $\in$ Mm×n если A = (aij)m×n и B = (bij)m×n, то

1) A + B = (aij + bij)m×n,

2) $\forall$ α $\in$ R αA = (αaij)m×n.

3. Множество FR всех многочленов произвольной степени от одной переменной над полем R.

Введем на множестве FR действия сложения и умножения на элемент из R по следующим правилам: $\forall$ f(x), g(x) $\in$ FR $\forall$ α $\in$ R

1) $\forall$ x $\in$ C (f + g)(x) = f(x) + g(x) ,

2) $\forall$ x $\in$ C (αf)(x) = α(f(x)).

Следствия из аксиом линейного пространства

Свойство 1.

В произвольном линейном пространстве L существует единственный элемент θ, такой, что u + θ = u при любом u $\in$ L. Элемент θ называется нулевым элементом в L. При необходимости в записи нулевого элемента указывается линейное пространство, относительно которого проводятся рассуждения: θ = θL.

Доказательство: Покажем существование нулевого элемента θ. Для произвольного элемента u$\in$ L по аксиоме 3) линейного пространства (для случая v = u) существует элемент y$\in$ L, такой, что u + y = u. Рассмотрим произвольный элемент w$\in$ L. По той же аксиоме 3) имеем: u + t = w для некоторого t$\in$ L. Тогда, используя аксиомы 1) и 2) из определения линейного пространства, получаем:

w +y = (u + t) + y = (t + u) + y = t + (u + y) = t + u = u + t = w.

Таким образом, существует элемент y$\in$ L, такой, что u + y = u при любом u $\in$ L. Обозначим θ = y.

Проверим единственность θ. Пусть в пространстве L существуют два нулевых элемента θ1 и θ2, тогда сумма θ1 + θ2 равна, с одной стороны, элементу θ1 (если в качестве нулевого считать θ2), а, с другой стороны, равна θ2 (если в качестве нулевого считать θ1), т.е. θ1 = θ2.

Свойство 2.

Для всякого $u \in L$ существует в L единственный элемент, называемый противоположным к u и обозначаемый $-u$, такой что $u + (-u) = \theta$. По отношению к $-u$ элемент u является противоположным, т.е. $u = -(-u)$.

Доказательство: существование такого элемента $-u$ следует из аксиомы 3) линейного пространства (для случая $v = \theta$). Проверим единственность $-u$. Пусть для $u \in L$ существуют два противоположных элемента $w1$ и $w2$, тогда $u + w1 = u + w2 = \theta$ и, следовательно, $w1 = w1+\theta = w1+(u+w2) = (w1+u)+w2 = (u+w1)+w2 = \theta+w2 = w2$. Т.е. противоположный элемент для элемента u существует единственный.

Свойство 3.

$0u = \theta$ для любого $u \in L$.

Доказательство: заметим, что для произвольного u выполнено $0u+0u = (0+0)u = 0u$. Тогда $\theta = 0u+(-(0u)) = (0u+0u)+(-(0u)) = 0u+(0u+(-(0u)) = 0u+\theta = 0u$.

Свойство 4.

$\lambda\theta = \theta$ для любого $\lambda \in P$.

Доказательство: рассмотрим произвольный элемент $u \in L$. По свойству 3) имеем $0u = \theta$, тогда для любого $\lambda \in P$ $\lambda\theta = \lambda(0u) = (\lambda 0)u = 0u = \theta$.

Свойство 5.

Если $\lambda u = \theta$ ($u \in L$, $\lambda \in P$), то $\lambda = 0$ или $u = \theta$.

Доказательство: если $\lambda = 0$, то заключение выполнено. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}\theta$, откуда по аксиоме 4 и свойству 4) получаем $(\frac{1}{\lambda}\lambda)u = \theta$, а значит, $u = \theta$.

Свойство 6.

$(-1)u = -u$ при любом $u \in L$.

Доказательство: Нужно показать, что элемент $(-1)u$ является противоположным к элементу u. Действительно, $(-1)u + u = ((-1) + 1)u = 0u = \theta$, что и требовалось доказать.

Свойство 7.

$-(\alpha x) = (-\alpha) x = \alpha(-x)$ при любых $u \in L$, $\alpha \in P$.

2. Подпространства линейного пространства

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P. Непустое подмножество L' пространства L называется *подпространством пространства L*, если выполнены следующие условия:

$\forall\, u, v \in L' \quad u + v \in L'$,

$\forall\, u \in L' \ \forall\, \lambda \in P \quad \lambda u \in L'$,

т.е. L' замкнуто относительно сложения и относительно умножения на число.

Свойства подпространств

Свойство 1.

Непустое подмножество N линейного пространства L над полем P является подпространством пространства L тогда и только тогда, когда N является линейным пространством над полем P.

Доказательство: Достаточность следует из определения линейного пространства.

Необходимость. Пусть N – подпространство пространства L; значит, на N определены сложение и умножение на число из поля P. Нужно проверить выполнение на N семи аксиом линейного пространства. Аксиомы 1), 2), 4), 5), 6), 7) очевидно выполняются вследствие включения $N \subset L$. Кроме того, для любых u, $v \in N$ найдется такой $x \in N$, что $u + x = v$ (в качестве x рассмотрим $x = v + (-1)u$. Из замкнутости N относительно умножения на число из поля P и относительно сложения получаем, что, действительно, $x \in N$).

Свойство 2.

Пересечение любой совокупности подпространств линейного пространства L является подпространством L.

Примеры.

1) В любом линейном пространстве L само пространство L является своим подпространством, и подмножество, состоящее из одного нулевого элемента $\{\theta\}$, также является подпространством L. Эти два подпространства называются тривиальными, или несобственными. Подпространства линейного пространства L, отличные от самого L и от $\{\theta\}$, называются собственными.

2) В координатном векторном пространстве $V(3) = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in R, i = 1 \div 3\}$ над полем R множество $L' = \{(a_1, a_2, 0) \mid a_i \in R, \ i = 1 \div 2\}$ является подпространством. Действительно, $\forall x, y \in L'$ если $x = (x_1, x_2, 0)$ и $y = (y_1, y_2, 0)$, то $x + y = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) \in L'$ и $\forall \alpha \in R$ $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) \in L'$.

3) В пространстве $M_{n\times n}$ всех матриц размерности $n\times n$ над полем R множество всех верхних треугольных матриц размерности $n\times n$ над полем R является подпространством. (Проверьте!)

4) В пространстве F_R всех полиномов произвольной степени от одной переменной над полем R множества $L_k' = \{f(x) \in F_R \mid \deg f(x) \leq k, \ \text{где} \ k \in N\}$ являются подпространствами F_R. (Проверьте!)

3. Линейная оболочка

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и M – непустое подмножество L. *Линейной оболочкой множества M*, или подпространством, натянутым на множество M, называется множество, обозначаемое [M], являющееся пересечением всех подпространств пространства L, содержащих M.

Замечание. [M] является наименьшим по включению подпространством пространства L, содержащим M, т.е. любое подпространство пространства L, содержащее M, содержит и [M]. Действительно, по второму свойству подпространств [M] является подпространством пространства L, и $M \subset [M]$ по определению линейной оболочки. Кроме того, если какое-либо подпространство L' пространства L содержит множество M, то L' – это одно из подпространств, пересечением которых является [M], а значит, по определению пересечения $[M] \subset L'$.

Теорема (***о строении линейной оболочки***)

Пусть M – непустое подмножество линейного пространства L над полем P. Тогда $[M] = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k \mid \lambda_i \in P, u_i \in M, k \in N\}$.

4. Суммы линейных пространств

Определение. Пусть L_1, L_2 – подпространства линейного пространства L над полем P. *Суммой подпространств* L_1 и L_2 называется множество $L_1+L_2 = \{z = x+y \mid x \in L_1, \ y \in L_2\}$. Если пересечение подпространств L_1 и L_2 состоит только из нулевого элемента θ, то сумма L_1 и L_2 называется прямой и обозначается $L_1 \oplus L_2$.

Предложение 1. Сумма подпространств линейного пространства L над полем P является линейным подпространством L.

Теорема 1. Пусть L – конечномерное линейное пространство над полем P и L_1, L_2 – подпространства L. Тогда

$$\dim (L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim (L_1 \cap L_2).$$

Доказательство: Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_d$ – базис $L_1 \cap L_2$, дополним $z_1, z_2, \ldots, z_d$ до базиса L_1: $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p$ и до базиса L_2: $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ (это можно сделать согласно теореме 1.1.9). Докажем, что элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ образуют базис L_1+L_2.

1) Покажем, что любой элемент из L_1+L_2 линейно выражается через $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$. Пусть $w \in L_1+L_2$, тогда $w = x+y$, где $x\in L_1$, $y\in L_2$. Но элемент x линейно выражается через базис $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p$ подпространства L_1:

$x = \gamma_1 z_1+\gamma_2 z_2+\ldots+\gamma_d z_d+\gamma_{d+1} u_1+\ldots+\gamma_{d+p} u_p$ $(\gamma_i\in P,\ i=1\div(d+p))$, а элемент y линейно выражается через базис $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ подпространства L_2:

$y = \mu_1 z_1+\mu_2 z_2+\ldots+\mu_d z_d+\mu_{d+1} v_1+\ldots+\mu_{d+q} v_q$ $(\mu_i\in P,\ i=1\div(d+q))$.

Тогда получаем, что w линейно выражается через $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$.

2) Покажем, что элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ линейно независимые. Предположим противное, пусть существуют такие числа $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что выполняется равенство

$$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\ldots+\alpha_d z_d+\beta_1 u_1+\ldots+\beta_p u_p+\gamma_1 v_1+\ldots+\gamma_q v_q = \theta$$

$(i=1\div d,\ j=1\div p,\ k=1\div q)$. Все β_j $(j=1\div p)$ не могут одновременно равняться нулю, т.к. тогда бы элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ были линейно зависимыми, что невозможно, поскольку они образуют базис подпространства L_2. Аналогично все γ_k $(k=1\div q)$ не могут одновременно равняться нулю. Значит, существует $\beta_{j'}\neq 0$ и существует $\gamma_{k'}\neq 0$.

Тогда получаем

$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\ldots+\alpha_d z_d+\beta_1 u_1+\ldots+\beta_p u_p = (-\gamma_1)v_1 +\ldots+(-\gamma_q)v_q$.

Но элемент $\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\ldots+\alpha_d z_d+\beta_1 u_1+\ldots+\beta_p u_p$ принадлежит подпространству L_1, а элемент $(-\gamma_1)v_1+\ldots+(-\gamma_q)v_q$ принадлежит подпространству L_2. Таким образом, мы имеем элемент, принадлежащий одновременно L_1 и L_2, т.е. принадлежащий пересечению $L_1\cap L_2$. Значит, этот элемент линейно выражается через базис $L_1\cap L_2$:

$(-\gamma_1)v_1+ \ldots+(-\gamma_q)v_q = \delta_1 z_1+\delta_2 z_2+ \ldots+\delta_d z_d$

для некоторых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_d \in P$. Откуда получаем

$\delta_1 z_1+\delta_2 z_2+\ldots+\delta_d z_d+\gamma_1 v_1+\ldots+\gamma_q v_q = \theta$ $(\gamma_{k'}\neq 0)$,

т.е. элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, v_1, \ldots, v_q$ линейно зависимые, что невозможно. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и элементы $z_1, z_2, \ldots, z_d, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ являются линейно независимыми.

Следствие. Размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей этих подпространств.

Пример. Рассмотрим в пространстве $V(3)$ подпространства $L_1 = \{(a_1, a_2, 0) \mid a_i \in R,\ i = 1, 2\}$ и $L_2 = \{(0, b_2, b_3) \mid b_i \in R,\ i = 2, 3\}$ (см. пример 1.2.2). $L_1\cap L_2 = \{(0, d, 0) \mid d \in R\}$. $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 2$, $\dim (L_1\cap L_2) = 1$. Тогда $\dim (L_1+L_2) = 3$.

Замечание. Если $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис линейного пространства L над полем P, то L можно рассматривать как прямую сумму подпространств $[e_i] = \{\lambda e_i \mid \forall\lambda\in P\}$, т.е. $L = [e_1]\oplus[e_2]\oplus\ldots\oplus[e_n]$.

Теорема 2. Пусть L_1, L_2 – подпространства линейного пространства L над полем P. Тогда L представимо в виде прямой суммы подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда любой вектор $w\in L$ представим в виде $w = v_1+v_2$ (где $v_i\in L_i$, $i=1, 2$) единственным образом.

Доказательство: *Необходимость*. Пусть $L = L_1\oplus L_2$, тогда $L_1\cap L_2 = \{\theta\}$. Предположим, что существует элемент $w\in L$, который представим в виде суммы элементов из L_1 и L_2 двумя способами: $w = x_1+y_1$ и $w = x_2+y_2$ (где $x_i\in L_1$, $y_i\in L_2$, $i=1, 2$). Тогда $x_1+y_1 = x_2+y_2$ и $x_1-x_2 = y_2-y_1$, левая часть полученного равенства принадлежит подпространству L_1, а правая – подпространству L_2. Но $L_1\cap L_2 = \{\theta\}$, следовательно, $x_1-x_2 = \theta$ и $y_2-y_1 = \theta$, а значит, $x_1=x_2$ и $y_2=y_1$.

Достаточность. Пусть любой элемент $w \in L$ представим в виде $w = v1+v2$ (где $vi \in Li$, $i=1, 2$) единственным образом, и $L1 \cap L2 \neq \{\theta\}$. Тогда существует элемент $v \in L1 \cap L2$, $v \neq \theta$. Но тогда получаем два различных представления v: $v = v + \theta$ ($v \in L1$, $\theta \in L2$) и $v = \theta + v$ ($\theta \in L1$, $v \in L2$), что противоречит условию.

Изоморфизм линейных пространств

Определение1. Пусть L1, L2 – линейные пространства над полем P. Отображение $\varphi: L1 \to L2$ называется *изоморфизмом линейных пространств*, если выполняются следующие условия:

1) φ – биекция,
2) $\forall\, u, v \in L1 \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,
3) $\forall\, u \in L1\ \forall\, \lambda \in P \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Определение. Пусть L1, L2 – линейные пространства над полем P. L1 и L2 называются изоморфными пространствами, если существует изоморфизм из L1 в L2. Обозначается: $L1 \approx L2$ или $L1 \cong L2$.

Свойства изоморфизма

Свойство 1.

Отношение $\approx$ "быть изоморфными" на множестве линейных пространств над полем P есть отношение эквивалентности.

Замечание. Из свойства 1 следует, что множество всех линейных пространств над некоторым полем P разбивается на классы изоморфных линейных пространств.

Свойство 2.

Изоморфизм линейных пространств L1 и L2 отображает нулевой элемент $\theta 1$ линейного пространства L1 в нулевой элемент $\theta 2$ пространства L2.

Свойство 3.

При изоморфизме линейных пространств образы линейно независимых элементов являются линейно независимыми элементами.

Свойство 4.

Если элементы u1, …, un образуют базис линейного пространства L1 и $\varphi: L1 \to L2$ – изоморфизм, то элементы $\varphi(u1)$, …, $\varphi(un)$ образуют базис линейного пространства L2.

Тема. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Базис и размерность

План

1. Линейная зависимость и независимость систем векторов.
2. Свойства линейной зависимости.
3. Базис множества векторов линейного пространства.
4. Теорема о базисе. Координаты вектора в заданном базисе.

1. Линейная зависимость и независимость систем векторов

Определение. Говорят, что вектор v линейного пространства L над полем P ***линейно выражается*** через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in P$, что

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m.$$

Выражение, стоящее в правой части, называют *линейной комбинацией* векторов u1, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta.$$

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ не являются линейно зависимыми между собой, то они называются ***линейно независимыми***. Это означает, что соотношение

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta$$

выполняется **только** при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Теорема 1. Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ ($m \geq 2$) линейно зависимы, то хотя бы один из них выражается линейно через другие. Если же эти элементы линейно независимы, то ни один из них не может быть выражен линейно через другие.

Доказательство.

1. Предположим, что $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно зависимы. Это означает, что найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta$.

Пусть α_k отличен от нуля. Тогда

$$u_k = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right)u_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)u_{k-1} + \left(-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)u_{k+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha_k}\right)u_m.$$

2. Теперь предположим, что $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно независимы. Линейное выражение одного из них через другие в этом случае невозможно, так как из равенства

$$u_k = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{k-1}u_{k-1} + \beta_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \beta_m u_m,$$

очевидно, получилась бы линейная зависимость:

$$\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{k-1}u_{k-1} + (-1)u_k + \beta_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \beta_m u_m = \theta$$

(коэффициент при u_k отличен от нуля).

2. Свойства линейной зависимости

Свойство 1. Система, состоящая из одного элемента u, будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда u является нулевым элементом: $u = \theta$.

Свойство 2. Если вектор v линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m,$$

то, добавляя произвольные векторы $w_1, w_2, \ldots, w_k$ к исходной совокупности элементов, получаем совокупность векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $w_1, w_2, \ldots, w_k$, через которые v тоже линейно выражается.

Свойство 3. Пусть каждый из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно выражается через элементы $v_1, v_2, \ldots, v_k$, а каждый из них в свою очередь линейно выражается через элементы $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Тогда каждый из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно выражается через $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Свойство 4. Пусть элементы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно независимы. Если для какого-нибудь элемента v векторы v, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы, то v линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Теорема *(четыре достаточных условия линейной зависимости).*

1) Если среди векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ есть нулевой вектор, то векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы.

2) Если часть векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ линейно зависима, то и все векторы системы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ между собой линейно зависимы.

3) Если каждый из векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ может быть выражен линейно через векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k \in L$, число которых k меньше m, то $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы.

4) Если каждый из элементов $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$ может быть выражен линейно через элементы $v_1, v_2, \ldots, v_m$, которые между собой линейно зависимы, то и $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

Пусть $m > k$ и

$$u_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \ldots + \alpha_{1k}v_k,$$
$$u_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{2k}v_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_m = \alpha_{m1}v_1 + \alpha_{m2}v_2 + \ldots + \alpha_{mk}v_k.$$

Умножим эти равенства соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и сложим их. При этом в качестве $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ возьмем ненулевое решение следующей системы линейных уравнений:

$$\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{m1}\lambda_m = 0,$$
$$\alpha_{12}\lambda_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{m2}\lambda_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{1k}\lambda_1 + \alpha_{2k}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{mk}\lambda_m = 0$$

(так как $m > k$, то ненулевое решение существует согласно следствию 3.3.).

При таком выборе чисел λ_i ($i=1\div m$) мы получаем равенство:

$$\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \ldots +\lambda_mu_m = 0v_1 + 0v_2 + \ldots +0v_k = \theta.$$

4. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ линейно зависимы, то по теореме 5.3 один из них, пусть для определенности v_m, выражается линейно через остальные

$$v_m = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots +\lambda_{m-1}v_{m-1}.$$

В линейное выражение векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ через $v_1, v_2, \ldots, v_m$ подставим вместо v_m сумму $\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots +\lambda_{m-1}v_{m-1}$. Сгруппировав слагаемые с одинаковыми v_i, получим систему линейных выражений векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ через $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$. Так как $m > m - 1$, то согласно предыдущему пункту отсюда вытекает линейная зависимость $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

3. Базис множества векторов линейного пространства

Определение. Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_r$ из подмножества M линейного пространства L называются *базисом* множества M, если выполняются следующие условия:

1) Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_r$ линейно независимы между собой.
2) Всякий вектор из M может быть линейно выражен через $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

Пример. Покажем, что в координатном векторном пространстве $V^{(n)}$, рассмотренном нами в примере 4.3, один из базисов образуют векторы $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, \ldots, 0)$, …, $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$. Этот базис называется *главным*.

Действительно, пусть $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\ldots+\lambda_ne_n=\theta$. Согласно правилам действий с векторами в пространстве $V^{(n)}$ это означает $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)=(0, 0, \ldots, 0)$, т.е. $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Далее, пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in V^{(n)}$. Тогда для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n\in \boldsymbol{R}$ имеет место $x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n=x$.

В частности, в векторном пространстве $V^{(2)}$ (вектора на плоскости) базис образуют вектора $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. В векторном пространстве $V^{(3)}$ (вектора в пространстве) базис образует вектора $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$.

Следует иметь в виду, что в произвольном линейном пространстве не каждое множество имеет базис.

Пример. Покажем, что в линейном пространстве всех бесконечных последовательностей чисел из поля P (множество с бесконечными последовательностями чисел также является линейным пространством аналогично n-мерному координатному пространству) не существует базиса.

Действительно, предположим, что элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ этого линейного пространства образуют базис. Тогда $(n + 1)$ элементов

$$
\begin{aligned}
&v_1 = (1,0,0,...),\\
&v_2 = (0,1,0,...),\\
&...\\
&v_n = (\underbrace{0,0,...,0,1}_{n},0,...),\\
&v_{n+1} = (\underbrace{0,0,...,0,1}_{n+1},0,...)
\end{aligned}
,
$$

выражающихся линейно через $u_1, u_2, \ldots, u_n$, должны были бы быть согласно 3-ому условию линейной зависимости линейно зависимыми между собой. Однако, если хотя бы одно из чисел $\alpha_i \in P$ отлично от нуля, то

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_{n+1} v_{n+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n+1}, 0, 0, \ldots) \neq$$
$$\neq (0, 0, \ldots, 0, \ldots) = \theta.$$

Заметим, что если в линейном пространстве L базис существует, то их может быть бесконечно много. Вышесказанное иллюстрирует следующая теорема.

Теорема о базисе. Координаты вектора в заданном базисе

Теорема (*о базисах*). Если подмножество M линейного пространства L имеет базисы, то они обладают следующими свойствами:

1. Все базисы M состоят из одного и того же количества векторов.

2. Всякие линейно независимые между собой векторы из M могут быть включены в некоторый базис совокупности M.

3. Всякие линейно независимые между собой элементы из M в количестве, равном числу элементов в базисе, сами образуют базис M.

Доказательство.

1. Пусть системы векторов $u_1, u_2, \ldots, u_r$ и $v_1, v_2, \ldots, v_s$ являются базисами совокупности M. Соотношение $r<s$ невозможно, так как в противном случае по третьему достаточному условию линейной зависимости векторы $v_1, v_2, \ldots, v_s$ должны быть линейно зависимы, как выражающиеся через r (где $r<s$) векторов. Аналогично невозможно $s<r$. Значит, $r=s$.

2. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ – произвольные линейно независимые векторы из M. (Такие совокупности существуют, например: совокупность, состоящая из одного ненулевого вектора.) Будем добавлять векторы $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_m$ так, чтобы векторы совокупности $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_m$ оставались линейно независимыми. Длина такой последовательности ограничена (она не может превышать количества элементов в базисе M). Поэтому среди таких последовательностей найдутся имеющие максимальную длину, т.е. максимальные линейно независимые системы или базисы.

3. Пусть каждый базис совокупности M состоит из r векторов и $v_1, v_2, \ldots, v_r$ –линейно независимые элементы из M. Из второго условия теоремы следует, что систему $v_1, v_2, \ldots, v_r$ можно дополнить до базиса: $v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_m$. Но по первому условию случай $m>r$ невозможен, т.е. $m=r$. А значит, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ – базис M.

Определение. Если подмножество M линейного пространства L обладает базисом, то количество элементов в базисе называется *рангом* M и обозначается rang M.

Если M содержит единственный элемент θ, то ранг M считается равным нулю.

Определение. Если линейное пространство L само обладает рангом (т.е. существуют базисы всего линейного пространства L), то L называется *конечномерным*, а его ранг – *размерностью* L. В соответствии с термином «размерность» употребляют обозначение: dim L = rang L.

Если линейное пространство не имеет ранга, то его называют *бесконечномерным* и говорят, что его размерность бесконечна.

Замечание. Если элемент подмножества линейного пространства линейно выражается через линейно независимые элементы этого подмножества, то такое выражение единственное.

Действительно, предположим противное. Пусть в подмножестве M линейного пространства L над полем P векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно независимы и некоторый вектор $v \in M$ линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_m$ двумя разными способами:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m, \quad (1)$$
$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_m u_m, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in P$ и существует $i \in \{1,2,\ldots,m\}$: $\alpha_i \neq \beta_i$. Тогда, рассмотрев разность равенств (1) и (2), получаем

$$(\alpha_1-\beta_1)u_1 + (\alpha_2-\beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha_m-\beta_m)u_m = \theta,$$

причем коэффициент $(\alpha_i-\beta_i)$ отличен от нуля. Следовательно, элементы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются линейно зависимыми, что противоречит условию.

Следствие. Элемент подмножества линейного пространства линейно выражается через базис этого подмножества единственным образом.

Определение. Пусть элементы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ образуют базис подмножества M линейного пространства L над полем P. *Координатами элемента* $v \in M$ *в базисе* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ называются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, с помощью которых v линейно выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_m$, т.е. для которых выполняется равенство

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m.$$

Тема. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя

План

1. Понятие перестановки и инверсии. Знак перестановки.
2. Определение определителя квадратной матрицы.
3. Вычисление определителя по определению.
4. Свойства определителей.

1. Понятие перестановки и инверсии

Основной числовой характеристикой квадратных матриц является определитель.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу любого порядка n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если n = 1, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11} и определителем первого порядка, соответствующим такой матрице, будет величина этого элемента.

Если n = 2, то матрица имеет вид $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ и определителем второго порядка, соответствующим такой матрице, будет число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и обозначаемое одним из символов $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Перейдем теперь к выяснению понятия определителя любого порядка n, где $n \geq 2$, с помощью некоторой знакопеременной характеристики перестановок n элементов.

Определение. Говорят, что в перестановке n элементов $(c_1, c_2, ..., c_n)$ ($c_i \in \boldsymbol{R}$; i = 1÷n) пара чисел c_k, c_l составляет *инверсию*, если k < l, но $c_k > c_l$.

Количество инверсий в данной перестановке n элементов (т.е. количество пар c_k, c_l, составляющих инверсию) будем обозначать через $J(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Заметим, что $J(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n$.

Рассмотрим произвольную перестановку n элементов с попарно различными компонентами $(c_1, c_2, ..., c_n)$.

Определение. *Знаком* данной перестановки n элементов называется число $sign(c_1, c_2, ..., c_n) = (-1)^{J(c_1, c_2, ..., c_n)}$ (sign – сокращение слова *signum* – знак).

Пример. В векторе [5, 7, 1, 6, 3] всевозможные инверсии составляют следующие шесть пар компонент:

(5, 1), (5, 3), (7, 1), (7, 6), (7, 3), (6, 3).

Следовательно, $\mathrm{sign}(5, 7, 1, 6, 3) = (-1)^6 = 1$.

Лемма. Если в перестановке n элементов с различными компонентами поменять местами две какие-нибудь компоненты, то перестановка изменит знак на противоположный:

$$\mathrm{sign}(c_1, c_2, \ldots, c_k, ..., c_r, ..., c_n) = (-1) \cdot \mathrm{sign}(c_1, c_2, \ldots, c_r, ..., c_k, ..., c_n).$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Меняются местами две соседние компоненты. Тогда в получившейся перестановке количество инверсий станет или на одну больше или на одну меньше, значит, знак вектора изменится.

2. Меняющиеся компоненты не являются соседними. Тогда совершим s перестановок соседних компонент, чтобы поставить c_k рядом с c_r: $(c_1, c_2, \ldots, c_k, c_r, \ldots, c_n)$. Далее поменяем c_k и c_r местами: $(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_k, \ldots, c_n)$ и совершим еще s перестановок соседних компонент, чтобы поставить c_r на k-ое место. Таким образом, совершено нечетное число (2s+1) перестановок соседних компонент, значит, по пункту 1 знак вектора изменится.

Следствие. От произвольной перестановки n элементов $(c_1, c_2, ..., c_n)$ с попарно различными компонентами можно перейти к перестановке n элементов, не содержащей инверсий, производя в исходной перестановке в точности $J(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ перестановок пар соседних компонент.

Лемма. Пусть в двух перестановках с различными компонентами $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(b_1, b_2, ..., b_n)$ одновременно осуществлена одинаковая перестановка компонент, т.е. получены новые перестановки

$$\left(a_{s_1}, a_{s_2}, ..., a_{s_n}\right),\ \left(b_{s_1}, b_{s_2}, ..., b_{s_n}\right),$$

где $s_1, s_2, ..., s_n$ – некоторая перестановка чисел 1, 2, …, n (другими словами, $s_1, s_2, ..., s_n$ – это все те же числа 1, 2, …, n, но только расположенные в другом порядке). Тогда

$$sign(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot sign(b_1, b_2, ..., b_n) = sign\left(a_{s_1}, a_{s_2}, ..., a_{s_n}\right) \cdot sign\left(b_{s_1}, b_{s_2}, ..., b_{s_n}\right).$$

Доказательство. При одинаковой перестановке компонент в перестановках $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(b_1, b_2, ..., b_n)$ их знаки одновременно или изменятся или останутся без изменения. В любом случае произведение знаков останется без изменения.

2. Определение определителя квадратной матрицы

Определение. *Определителем (или детерминантом)* квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется сумма всевозможных произведений $\sigma a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_n j_n}$, каждое из которых содержит сомножителями элементы матрицы A, взятые по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца (т.е. последовательность номеров строк i_1, i_2, …, i_n и последовательность номеров столбцов j_1, j_2, …, j_n являются некоторыми перестановками чисел 1, 2, …, n), а коэффициент σ определяется следующим образом:

$$\sigma = \text{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot \text{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n).$$

Для определителя матрицы A используются обозначения:

$$\det A, |A|, \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Значение определителя не зависит от порядка сомножителей в любом слагаемом, входящем в определитель.

Действительно, рассмотрим произвольное слагаемое $\sigma a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_n j_n}$, входящее в $|A|$. $\sigma = \text{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot \text{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Если переставить какие-либо сомножители в слагаемом местами, то произойдет одинаковая перестановка компонент в векторах (i_1, i_2, …, i_n) и (j_1, j_2, …, j_n). По лемме значение σ не изменится.

Замечание. Среди различных способов расположения элементов в произведениях, сумма которых составляет определитель матрицы, особо укажем следующий.

В произведении n элементов, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца матрицы A, множители удобно располагать по номерам строк, т.е. в порядке возрастания номеров строк. Тогда всякое произведение примет вид: $\sigma a_{1 j_1} a_{2 j_2} ... a_{n j_n}$, где j_1, j_2, …, j_n – некоторая перестановка чисел 1, 2, …, n. Так как sign(1, 2, …, n) = +1, то в нашем случае знак произведения определяется коротко: $\sigma = \text{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Разумеется, сомножители можно располагать и по номерам столбцов. Это приводит к заданию произведения в виде $\sigma a_{i_1 1} a_{i_2 2} ... a_{i_n n}$, где $\sigma = \text{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

3. Вычисление определителя по определению

Пример. Найдем определитель третьего порядка по определению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1 a_{11}a_{22}a_{33} + \sigma_2 a_{11}a_{23}a_{32} + \sigma_3 a_{12}a_{21}a_{33} + \sigma_4 a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + \sigma_5 a_{13}a_{21}a_{32} + \sigma_6 a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$\sigma_1 = sign(1,2,3) = +1, \quad \sigma_2 = sign(1,3,2) = -1,$$
$$\sigma_3 = sign(2,1,3) = -1, \quad \sigma_4 = sign(2,3,1) = +1,$$
$$\sigma_5 = sign(3,1,2) = +1, \quad \sigma_6 = sign(3,2,1) = -1.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Теорема. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Доказательство. Рассмотрим треугольную матрицу A, у которой все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0$ при

$i < j$, $i=1\div(n-1)$, $j=2\div n$ (для второго типа треугольной матрицы рассуждения аналогичны).

Выразим det A через элементы матрицы A по определению. Те произведения, входящие слагаемыми в состав определителя, которые содержат сомножителем хотя бы один нуль, лежащий выше главной диагонали, будут заведомо равны нулю, и мы можем эти слагаемые не учитывать. Остаются лишь произведения вида $\sigma a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$, (сомножители располагаем по номерам строк), где $j_1 \le 1$, $j_2 \le 2$, …, $j_n \le n$. Так как $j_1, j_2, \dots, j_n$ – попарно различные натуральные числа (они образуют перестановку чисел 1, 2, …, n), то $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, …, $j_n = n$. Следовательно, σ=sign(1, 2, …, n) = 1 и рассматриваемый определитель состоит из одного произведения: det A = $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

4. Свойства определителей

Свойство 1 *(транспонирование).* Определитель матрицы, транспонированной к данной квадратной матрице, равен определителю исходной матрицы. Или, коротко, при транспонировании квадратной матрицы определитель ее не меняется:

$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Сравним произведения, входящие в определитель исходной матрицы и в определитель транспонированной. В одном случае упорядочим элементы произведения по возрастанию номеров столбцов, в другом – по возрастанию номеров строк. Тогда для каждого произведения, входящего в определитель исходной матрицы, найдется равное ему произведение, входящее в определитель транспонированной. И наоборот.

Из доказанного свойства вытекает, что в определителе строки и столбцы равноправны.

Свойство2 *(умножение строки на число)*. Если в квадратной матрице все элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то и определитель этой матрицы тоже умножится на λ. Или, коротко, общий множитель всех элементов любого ряда определителя можно вынести за знак определителя. Например,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \ A' = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & \lambda a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & \lambda a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & \lambda a_{nk} & ... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

тогда det A' = $\lambda \cdot$ det A.

Свойство 3 *(перестановка строк*). Если в квадратной матрице поменять местами два параллельных ряда (т.е. две строки или два столбца), оставив остальные на своих местах, то определитель полученной матрицы равен определителю исходной матрицы, умноженный на -1. Или, коротко, при перестановке параллельных рядов знак определителя меняется на противоположный. Например,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1m} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & a_{2m} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nm} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2m} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nm} & ... & a_{nk} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и $k \ne m$, тогда det A' = -det A.

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A перестановкой k-ого и m-ого столбцов. Покажем, что det A' = -det A. В матрицах A и A' одинаковые по номеру строки состоят из одних и тех же элементов, но по-разному расположенных (меняются местами k-ая и m-ая компоненты). Поэтому det A и det

A' представляются в виде суммы одинаковых произведений вида $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ (сомножители располагаем по номерам строк), но входящих в det A и det A' с разными знаками. В det A указанное произведение входит со знаком σ=sign(j_1, j_2, …, k, …, m, …, j_n), а в det A' – со знаком σ'=sign(j_1, j_2, …, m, …, k, …, j_n). По лемме 9.4 $\sigma=-\sigma'$. Следовательно, все произведения, в сумме составляющие det A, входят в состав det A' с противоположным знаком. Значит, det A' = -det A.

Следствие (*об определителе с двумя пропорциональными строками*). Если квадратная матрица имеет два пропорциональных ряда (т.е. один из них отличается от другого числовым множителем), то определитель этой матрицы равен нулю. Например, если в матрице

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1m} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & a_{2m} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nm} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

имеет место $a_{im} = \lambda a_{ik}$ (i = 1÷n), k≠m, то det A = 0.

Доказательство. Вынесем из m-ого столбца матрицы A общий множитель λ (преобразование 11.2), получим матрицу A' (в ней m-ый и k-ый столбцы одинаковы), причем det A=$\lambda\cdot$det A'. Переставляя в A' m-ый и k-ый столбцы местами, мы не изменяем матрицу A', но с другой стороны, согласно 3, знак ее определителя должен измениться, т.е. det A'=- det A', откуда det A'=0, а значит, det A=0.

Следствие. Сумма произведений элементов произвольного ряда квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю. Например, для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1m} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & a_{2m} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nm} & ... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

где k≠m, имеет место: $a_{1k}A_{1m}+a_{2k}A_{2m}+…+a_{nk}A_{nm}=0$.

Доказательство. Интересующая нас сумма равна определителю матрицы, полученной из A заменой m-ого столбца элементами k-ого столбца. Но такой определитель равен нулю как имеющий два пропорциональных ряда (следствие 4).

Свойство6 (*сложение строк*). Определитель квадратной матрицы не изменится, если к какому-нибудь ее ряду прибавить другой параллельный ряд, умноженный на произвольное число λ. Если, например,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & a_{1m} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & a_{2m} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & a_{nm} & ... & a_{nn} \end{bmatrix},\ A'=\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} & ... & (a_{1m}+\lambda a_{1k}) & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2k} & ... & (a_{2m}+\lambda a_{2k}) & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nk} & ... & (a_{nm}+\lambda a_{nk}) & ... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

и k≠m, то det A' = det A.

Тема. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке и столбцу

План

1. *Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы.*
2. *Разложение определителя по строке (столбцу).*

3. Определитель, в котором все элементы столбца (строки) представлены в виде суммы конечного числа слагаемых.

1. Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы

Определение. *Минором* квадратной матрицы n-го порядка A, соответствующим элементу a_{ik}, называется определитель порядка n – 1, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и k-ого столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}).

Минор, соответствующий элементу a_{ik} обозначается символом M_{ik}.

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минор M_{ik}, умноженный на $(-1)^{i+k}$, называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} в матрице A и обозначается A_{ik}: $A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$.

Лемма. Пусть n-вектор $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, где n>1, является некоторой перестановкой чисел 1, 2, …, n, и для некоторого i значение $j_i=k$ ($1\le i\le n$). Тогда $\mathrm{sign}(j_1, j_2,\dots, j_{i-1}, j_i, j_{i+1},\dots, j_n)=(-1)^{i+k}\cdot\mathrm{sign}(j_1, j_2,\dots, j_{i-1}, j_{i+1},\dots, j_n)$.

Доказательство. Согласно лемме о знаке перестановки,

$$\mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_i=k, j_{i+1}, \dots, j_n) = (-1)^{n-i}\cdot\mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n, k).$$

Среди чисел $j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n$ содержится n-k, больших k, т.е.

$$\mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n, k) = \mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n)\cdot(-1)^{n-k}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_i, j_{i+1}, \dots, j_n) = (-1)^{2n-i--k}\cdot\mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n) =$$
$$= (-1)^{i+k}\cdot\mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n).$$

Лемма доказана.

Теорема . Алгебраическое дополнение A_{ik} элемента a_{ik} квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

равно определителю квадратной матрицы n-го порядка, получаемой из матрицы A заменой самого элемента a_{ik} числом 1, а всех остальных элементов i-й строки и k-го столбца нулями.

Доказательство. Обозначим

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,k-1} & 0 & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1\,n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,k-1} & 0 & a_{i-1\,k+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ 0 & - & 0 & 1 & 0 & - & 0 \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,k-1} & 0 & a_{i+1\,k+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,k-1} & 0 & a_{n\,k+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}.$$

Представим D в виде суммы всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, расположив множители по номерам строк. (При этом учитываем, что i-й множитель каждого произведения либо 0, либо 1). Поэтому D есть сумма всевозможных произведений вида $\sigma \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{i-1\,j_{i-1}} \cdot 1 \cdot a_{i+1\,j_{i+1}} \cdot \ldots \cdot a_{n\,j_n}$, где $\sigma = \mathrm{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_{i-1}, k, j_{i+1}, \ldots, j_n)$.

Минор M_{ik} есть сумма таких же произведений (исключение множителя 1 не существенно), но со знаком σ’, где $\sigma' = \mathrm{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_n)$. По лемме 10.2 $\sigma' = (-1)^{i+k}\cdot\sigma$. Следовательно, $D = \sigma'\cdot M_{ik} = (-1)^{i+k}\cdot M_{ik} = A_{ik}$.

2. Разложение определителя по строке (столбцу)

Теорема *(о разложении определителя по столбцу)*. Определитель квадратной матрицы A n-го порядка равен сумме произведений всех элементов любого столбца на свои алгебраические дополнения, например

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Доказательство. Представляя определитель матрицы A в виде суммы всевозможных произведений элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца, сгруппируем эти слагаемые, соединяя вместе произведения, содержащие один и тот же элемент k-го столбца. В каждой группе вынесем этот общий множитель за скобки. Мы получаем следующие выражение для нашего определителя:

$$\det A = a_{1k}B_1 + a_{2k}B_2 + \ldots + a_{nk}B_n,$$

здесь каждое B_i является в свою очередь некоторой суммой произведений элементов матрицы A. Важно отметить, что B_i не зависит ни от элементов i-й строки, ни от элементов k-го столбца матрицы A (ведь в каждое из произведений, из которых получилось B_i, не входят другие элементы из i-й строки и k-го столбца, кроме a_{ik}, который вынесен за скобки).

Благодаря этому значение B_i не изменится, если мы на время в нашем равенстве положим все элементы i-й строки и k-го столбца матрицы A равными 0, за исключением элемента a_{ik}, который положим равным 1.

В результате, согласно теореме 10.3, слева в нашем равенстве вместо определителя матрицы A получим алгебраическое дополнение A_{ik}, а справа все слагаемые, кроме одного, обратятся в нуль:

$$A_{ik} = 0 + \ldots + 0 + 1 \cdot B_i + 0 + \ldots + 0.$$

Мы показали, что $B_i = A_{ik}$ ($i = 1 \div n$). Подставляя найденные выражения для B_i в полученное выше выражение для det A, получаем требуемое равенство:

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Мы получили разложение по столбцу. Рассуждения для разложения по строке проводятся аналогично.

Пример. Найдем определитель матрицы A двумя способами:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

1. Разложим определитель по первой строке:

$$\det A = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} =$$

$$(12-9)-(6-3)+(3-2)=3-3+1=1$$

2. Разложим определитель по второму столбцу:

$$\det A = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} =$$

$$-(6-3)+2\cdot(6-1)-3\cdot(3-1)=-3+10-6=1$$

3. Определитель, в котором все элементы столбца (строки) представлены в виде суммы конечного числа слагаемых

Следствие *(об определителе, в котором все элементы столбца представлены в виде суммы).*

Если в квадратной матрице n-го порядка все элементы какого-нибудь ряда представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель этой матрицы равен сумме определителей двух новых матриц n-го порядка, у которых все элементы, кроме элементов указанного ряда, такие же, как и в заданной матрице, а указанный ряд в одной из матриц состоит из первых слагаемых элементов указанного ряда, а в другой матрице – из вторых слагаемых. Т.е. пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & b_{1k}+c_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(k-1)} & b_{2k}+c_{2k} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & b_{nk}+c_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & b_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(k-1)} & b_{2k} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & b_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & c_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(k-1)} & c_{2k} & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(k-1)} & c_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

тогда det A = det A_1 + det A_2.

Тема. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы

План

1. Понятие ранга матрицы.

2. Элементарные преобразования матриц.

3 Приведение матрицы к диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

4. Строчечный и столбцовый ранги матрицы.

5. Теорема о ранге матрицы

6. Способ нахождения ранга матрицы

1. Понятие ранга матрицы

Любая матрица может быть рассмотрена как совокупность ее строк и как совокупность ее столбцов. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда строки можно представить как совокупность векторов $u_1, u_2, \dots, u_m \in V^{(n)}$, где

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$
$$u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

А столбцы – как совокупность векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V^{(m)}$, где

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$
$$v_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v_m = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}).$$

Определение. Число r называется *рангом матрицы* A, если ранг системы строк матрицы A и ранг системы столбцов матрицы A оба равны r. Обозначение: rang A = r.

Итак, по определению рангом матрицы является число, одновременно являющееся количеством элементов в базисе системы векторов, образующих строки этой матрицы, и системы векторов, образующих ее столбцы. Возникает вопрос: для всякой ли матрицы существует ранг, или, что то же самое, для любой ли матрицы количество элементов в базисах систем строк и столбцов совпадает?

2. Элементарные преобразования матриц

Определение. Следующие преобразования называются *элементарными преобразованиями матрицы*:

1. Умножение какого-нибудь ряда на число, отличное от нуля.
2. Перестановка местами двух параллельных рядов.
3. Присоединение нового ряда, целиком состоящего из нулей.
4. Исключение ряда, целиком состоящего из нулей.
5. Прибавление к одному ряду другого, параллельного ряда, умноженного на какое-либо число.

Лемма 1. Если от матрицы A можно перейти к матрице A’ при помощи одного элементарного преобразования, то и от матрицы A’ можно перейти к матрице A при помощи одного элементарного преобразования.

3 Приведение матрицы к диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

Лемма 2. При помощи элементарных преобразований каждая ненулевая матрица может быть приведена к диагональному виду с ненулевыми диагональными элементами.

Доказательство. Пусть в матрице A отличен от нуля элемент a_{ij}. Переставляя местами строчки и столбцы (свойство 2), можно преобразовать ее в матрицу A’, у которой этот элемент будет стоять в первой строке и первом столбце: $a'_{11} = a_{ij} \neq 0$.

$$A'=\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Прибавив ко второй строке матрицы A’ первую, умноженную на $-\frac{a'_{21}}{a'_{11}}$, затем к третьей – первую, умноженную на $-\frac{a'_{31}}{a'_{11}}$, и т.д. (преобразование 5), мы, очевидно, приведем A’ к виду:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & ... & a''_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a''_{m2} & ... & a''_{mn} \end{bmatrix}.$$

Далее прибавим ко второму столбцу первый, умноженный на $-\frac{a'_{12}}{a'_{11}}$, к третьему столбцу – первый, умноженный на $-\frac{a'_{13}}{a'_{11}}$, и т.д. В результате мы приведем матрицу к виду:

$$A''=\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a''_{22} & ... & a''_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a''_{m2} & ... & a''_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если в A’’ имеются строки или столбцы, целиком состоящие из нулей, то мы их исключим (свойство 4).

Повторив аналогичную последовательность преобразований, отнесенных к совокупности элементов a_{ij} (i, j $\geq$ 2), мы приведем нашу матрицу к виду:

$$A'''=\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a''_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a'''_{33} & ... & a'''_{3q} \\ 0 & 0 & a'''_{43} & ... & a'''_{43} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & a'''_{p3} & ... & a'''_{pq} \end{bmatrix},$$

где $a'_{11} \neq 0, a''_{22} \neq 0$.

Продолжая далее, мы, получим диагональную матрицу с ненулевыми диагональными элементами.

Пример. Приведем к диагональному виду при помощи элементарных преобразований следующую матрицу:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Сначала переставим местами первые две строки.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Затем прибавим к третьей строке первую, умноженную на (-1).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Следующую матрицу получим, прибавив ко второму столбцу первый, к третьему – первый, умноженный на (-2), и к четвертому – первый, умноженный на (-1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Далее к третьей и четвертой строке прибавляем вторую, умноженную на (-1), получим матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Полученную строку, целиком состоящую из нулей, мы исключаем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

С помощью преобразования 5, прибавление к одному ряду другого, параллельного ряда, умноженного на какое-либо число, получаем следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Затем аналогичным способом получаем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Исключая нулевые столбцы, мы получаем искомую диагональную матрицу с ненулевыми диагональными элементами:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Лемма 3. Ранг диагональной матрицы порядка n с ненулевыми диагональными элементами равен ее порядку n.

Доказательство. Рассмотрим диагональную матрицу порядка n:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix} = D \in M_n.$$

Совокупность векторов, составляющих строки этой матрицы, следующая:

$u_1=(d_1, 0, \ldots, 0)$, $u_2=(0, d_2, \ldots, 0)$, …, $u_n=(0, 0, \ldots, d_n)$.

Обратите внимание, что эта же совокупность векторов составляет и столбцы матрицы D. Значит, ранг системы строк будет равен рангу системы столбцов. Докажем, что он равен n. Для этого достаточно показать, что векторы u_1, u_2, …, u_n линейно независимы. Тогда они будут образовывать базис, как максимальная линейно независимая система. Действительно, пусть числа λ_1, λ_2, …, $\lambda_n \in \boldsymbol{R}$ такие, что

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+ \ldots + \lambda_n u_n=\theta.$$

По правилам действий с векторами, это равенство означает истинность следующей системы равенств:

$$\begin{cases} \lambda_1 d_1 = 0 \\ \lambda_2 d_2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda_n d_n = 0 \end{cases}.$$

Так как по условию все $d_i \neq 0$ $(i=1 \div n)$, то это возможно лишь в случае $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Это и означает линейную независимость векторов u_1, u_2, …, u_n.

4. Строчечный и столбцовый ранги матрицы

Лемма 4. Пусть матрица A' получается из матрицы A при помощи некоторого элементарного преобразования. Тогда ранг системы строк матрицы A' не превосходит ранга системы строк матрицы A. То же и для столбцов.

Доказательство. Если одна из матриц A, A' нулевая, то и вторая нулевая. *Поясните.* Тогда ранги их строк равны нулю.

Пусть A и A' – ненулевые матрицы. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Представим строки матрицы A совокупностью векторов

$u_1=(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

$u_2=(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$

……………………

$u_m=(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$.

Соответствующие строки матрицы A' обозначим u_1', u_2', …, u_m'.

Пусть $\mathrm{rang}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}=r$. Нужно показать, что если $s>r$, то любые s строк матрицы A' линейно зависимы. Далее доказательство основано на переборе всех случаев элементарных преобразований для строк и столбцов матрицы A'. Рассмотрим один из них.

Пусть матрица A' получена из матрицы A умножением p-ого столбца на число $\alpha \neq 0$. Тогда произвольные s строк матрицы A' имеют вид:

$$u'_{i_1}=\left(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \ldots, \alpha a_{i_1 p}, \ldots, a_{i_1 n}\right),$$

$$u'_{i_2}=\left(a_{i_2 1}, a_{i_2 2}, \ldots, \alpha a_{i_2 p}, \ldots, a_{i_2 n}\right),$$

………………………

$$u'_{i_s}=\left(a_{i_s 1}, a_{i_s 2}, \ldots, \alpha a_{i_s p}, \ldots, a_{i_s n}\right).$$

В матрице A соответствующие строки

$$u_{i_1}=\left(a_{i_1 1},a_{i_2 2},...,a_{i_1 p},...,a_{i_1 n}\right),$$
$$u_{i_2}=\left(a_{i_2 1},a_{i_2 2},...,a_{i_2 p},...,a_{i_2 n}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{i_s}=\left(a_{i_s 1},a_{i_s 2},...,a_{i_s p},...,a_{i_s n}\right)$$

являются линейно зависимыми, так как s>r, т.е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in R$ не все равные нулю, для которых $\lambda_1 u_{i_1}+\lambda_2 u_{i_2}+...+\lambda_s u_{i_s}=\theta$. Это означает выполнение следующих равенств

$$\begin{cases}\lambda_1 a_{i_1 1}+\lambda_2 a_{i_2 1}+...+\lambda_s a_{i_s 1}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1 a_{i_1 p}+\lambda_2 a_{i_2 p}+...+\lambda_s a_{i_s p}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1 a_{i_1 n}+\lambda_2 a_{i_2 n}+...+\lambda_s a_{i_s n}=0\end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases}\lambda_1 a_{i_1 1}+\lambda_2 a_{i_2 1}+...+\lambda_s a_{i_s 1}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha\lambda_1 a_{i_1 p}+\alpha\lambda_2 a_{i_2 p}+...+\alpha\lambda_s a_{i_s p}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1 a_{i_1 n}+\lambda_2 a_{i_2 n}+...+\lambda_s a_{i_s n}=0\end{cases},$$

или $\lambda_1 u_{i_1}'+\lambda_2 u_{i_2}'+...+\lambda_s u_{i_s}'=\theta$, причем не все λ_i (i=1÷s) равны нулю. Следовательно, строки u_1', u_2', …, u_s' линейно зависимы.

Случаи остальных элементарных преобразований доказываются подобным образом. То же и для столбцов.

Следствие. Пусть матрица A' получается из матрицы A при помощи некоторого элементарного преобразования. Если A обладает рангом, равным r, то и A' имеет ранг, равный r. (Ранг матрицы не меняется при элементарном преобразовании.)

5. Теорема о ранге матрицы

Теорема. Всякая матрица обладает рангом.

Доказательство. Если матрица A нулевая, то rang A = 0.

Если матрица A ненулевая, то по лемме 2 при помощи элементарных преобразований ее можно привести к диагональной матрице A' с ненулевыми диагональными элементами. Согласно лемме 8.6 A' обладает рангом.

Отсюда, благодаря следствию, следует, что и A обладает рангом, поскольку благодаря лемме 1 A в свою очередь может быть получена из A' при помощи элементарных преобразований.

6. Способ нахождения ранга матрицы

При помощи элементарных преобразований заданную матрицу следует привести к диагональному виду с отличными от нуля диагональными элементами. Порядок полученной диагональной квадратной матрицы благодаря лемме 8.6. и следствию 8.8. будет равен рангу исходной матрицы.

В целях экономии вычислений можно не доводить матрицу до диагонального вида. Достаточно привести ее к виду

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3k} & ... & a_{3n}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk} & ... & a_{kn}\end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ (i = 1÷k), или к аналогичной матрице, у которой выше главной диагонали все элементы равны нулю. Ранг такой матрицы равен k.

Пример. Рассмотрим матрицу A:

$$rangA = r\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 3.$$

Замечание. Вычисление рангов матриц удобно использовать при выяснении вопроса о линейной зависимости систем векторов. Например, является ли линейно зависимой следующая система векторов: u_1=(0, 2, -1, 2, 3), u_2=(1, -1, 2, 1, 0), u_3=(1, 1, 1, 3, 3), u_4=(0, 2, 5, 1, -2). Составляя из этих векторов матрицу, получаем матрицу А из примера 8.5. Согласно 8.10 ее ранг равен 3. Это означает, что максимальная линейно независимая совокупность векторов из данной системы содержит три вектора. Следовательно, четыре вектора u_1, u_2, u_3, u_4 линейно зависимы.

Тема. Линейный оператор. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

План

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора в заданном базисе.

2. Матрицы линейного оператора в разных базисах.

3. Действия с линейными операторами.

4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

5. Ранг и дефект линейного оператора.

1. Линейные операторы. Матрица линейного оператора в заданном базисе

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P. ***Линейным оператором***, или ***линейным преобразованием***, пространства L называется отображение $\varphi: L \to L$, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall u, v \in L \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,

2) $\forall u \in L\ \forall \lambda \in P \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Пример. В координатном векторном пространстве V^2 над полем R преобразование симметрии относительно прямой $y=x$ является линейным оператором. Действительно, симметрия φ относительно прямой $y=x$ в пространстве V^2 действует по правилу: $\varphi((x, y)) = (y, x)$. Тогда для $\forall (x, y), (x', y') \in V^2$ $\varphi((x, y)+(x', y')) = \varphi((x+x', y+y')) = (y+y', x+x') = (y, x)+(y', x') = \varphi((x, y))+\varphi((x', y'))$ и $\varphi(\lambda(x, y)) = \varphi((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda y, \lambda x)) = \lambda(y, x) = \lambda\varphi((x, y))$ для $\forall \lambda \in R$.

Предложение 1. Если в линейном пространстве L над полем P отображение $\varphi: L \to L$ является линейным оператором, то $\varphi(\theta) = \theta$, где θ – нейтральный элемент по сложению в L.

Доказательство: Используем свойство линейных пространств: $0u = \theta$ для любого $u \in L$ (см. §1). Имеем $\varphi(\theta) = \varphi(0u) = 0\varphi(u) = \theta$.

Теорема 1. Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Для произвольных элементов $v_1, \ldots, v_n \in L$ существует и единственный линейный оператор $\varphi: L \to L$, такой, что $v_1=\varphi(u_1), \ldots, v_n=\varphi(u_n)$.

Доказательство: Рассмотрим произвольный элемент $w \in L$, пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$, где $b_i \in P$, $i=1 \div n$, тогда положим по определению $\varphi(w) = b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n$.

Проверим, что φ – линейный оператор. Пусть $w, v \in L$ и пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$, $v = c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$, где $b_i, c_i \in P$, $i=1 \div n$. Тогда L $\varphi(w+v) = \varphi((b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n)+(c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n)) =$

$\varphi((b_1+c_1)u_1+(b_2+c_2)u_2+\ldots+(b_n+c_n)u_n) = (b_1+c_1)v_1+(b_2+c_2)v_2+\ldots+(b_n+c_n)v_n =$
$(b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n)+(c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n) = \varphi(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n)+$
$\varphi(c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n) = \varphi(w)+\varphi(v)$. Равенство $\varphi(\lambda w) = \lambda\varphi(w)$ для $\forall\lambda \in P$ проверьте самостоятельно.

Покажем, что $v_i=\varphi(u_i)$ $(i=1\div n)$. Действительно, $u_1 = 1u_1+0u_2+\ldots+0u_n$, тогда $\varphi(u_1) = 1v_1+0v_2+\ldots+0v_n = v_1$ и аналогично для $u_2, \ldots, u_n$.

Таким образом, мы построили линейный оператор, описанный в условии теоремы. Докажем, что такой оператор единственный.

Предположим, что существует ещё линейный оператор ψ: $L \to L$, такой, что $v_1=\psi(u_1), \ldots, v_n=\psi(u_n)$. Покажем, что $\varphi = \psi$, т.е. $\forall w \in L$ $\varphi(w) = \psi(w)$.
$\psi(w) = \psi(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n) = \psi(b_1u_1)+\psi(b_2u_2)+\ldots+\psi(b_nu_n) =$
$b_1\psi(u_1)+b_2\psi(u_2)+\ldots+b_n\psi(u_n) = b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n = \varphi(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n) = \varphi(w)$.

Матрица линейного оператора

<u>Определение</u>. Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис U следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n,\\ \varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n,\end{gathered}$$

где $\alpha_{ij} \in P, i=1\div n, j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** φ в базисе U.

Найдем связь между координатами элемента линейного пространства и координатами его образа при преобразовании φ.

<u>Теорема 2.</u> Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и пусть $A_U(\varphi)$ – матрица линейного оператора φ: $L \to L$ в базисе U. Тогда если $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – координаты некоторого элемента $w \in L$ в базисе U, а $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – координаты $\varphi(w)$ в базисе U, то выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Пусть матрица $A_U(\varphi)$ имеет вид $A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда для $w = c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n$ (где $c_i \in P, i=1\div n$) выполнено:
$\varphi(w) = \varphi(c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n) = c_1\varphi(u_1)+c_2\varphi(u_2)+\ldots+c_n\varphi(u_n) =$
$c_1(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n)+c_2(\alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n)+\ldots$
$+c_n(\alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n) = (c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{21}+\ldots+c_n\alpha_{n1})u_1 +$
$(c_1\alpha_{12}+c_2\alpha_{22}+\ldots+c_n\alpha_{n2})u_2 + \ldots +(c_1\alpha_{1n}+c_2\alpha_{2n}+\ldots+c_n\alpha_{nn})u_n$. Поскольку через базис элемент пространства выражается единственным способом, мы имеем следующие равенства:

$$c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{21}+\ldots+c_n\alpha_{n1}=b_1,$$
$$c_1\alpha_{12}+c_2\alpha_{22}+\ldots+c_n\alpha_{n2}=b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_1\alpha_{1n}+c_2\alpha_{2n}+\ldots+c_n\alpha_{nn}=b_n.$$

Полученная система равенств эквивалентна матричному равенству $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, что и требовалось доказать.

<u>Лемма 1.</u> Пусть A, B – матрицы размерности $n\times n$ над полем P. Если для всех элементов $w=(c_1, c_2, \ldots c_n)$ ($c_i \in P$, $i=1\div n$) линейного пространства L над полем P выполняется равенство $A\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, то $A=B$.

Доказательство: Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ и $B = (b_{ij})_{n\times n}$, тогда, рассмотрев в качестве w элемент $(1,0,0,\ldots,0)$, получаем равенство $A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, откуда имеем $a_{i1} = b_{i1}$ для всех $i=1\div n$. Аналогично, рассматривая в качестве w элементы $(0,1,0,\ldots,0)$, …, $(0,0,0,\ldots,1)$, получим $a_{i2} = b_{i2}$, …, $a_{in} = b_{in}$ для всех $i=1\div n$, т.е. $A=B$.

2. Матрицы линейного оператора в разных базисах

<u>Теорема 3.</u> Пусть в линейном пространстве L над полем P заданы два базиса $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, и пусть S – матрица перехода от базиса U к базису V. Пусть линейный оператор φ: $L \to L$ в базисе U имеет матрицу $A_U(\varphi)$, а в базисе V – матрицу $A_V(\varphi)$. Тогда

$$A_V(\varphi) = S^{-1}A_U(\varphi)S.$$

Доказательство: Рассмотрим произвольный элемент $w \in L$. Пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$ и $w = c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n$ ($b_i, c_i \in P$, $i=1\div n$), и пусть $\varphi(w) = \beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_nu_n$ и $\varphi(w) = \gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\ldots+\gamma_nv_n$ ($\beta_i, \gamma_i \in P$, $i=1\div n$).

Тогда по теореме 1.5.4 получаем:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = S\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

а по следствию 1.5.5 получаем:

$$S^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

По теореме 1.6.7 имеем:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} = A_V(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Далее:

$$S^{-1}A_U(\varphi)\cdot S\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \tilde{n}_2\\ \vdots\\ \tilde{n}_n\end{pmatrix} = S^{-1}A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$S^{-1}A_U(\varphi)\cdot S\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \tilde{n}_2\\ \vdots\\ \tilde{n}_n\end{pmatrix} = A_V(\varphi)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}.$$

Поскольку полученное равенство выполняется для произвольного $w \in L$, т.е. для произвольной матрицы $\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$, то по лемме 1.6.8 имеем равенство

$$S^{-1}A_U(\varphi)S = A_V(\varphi),$$

что и требовалось доказать.

3. Действия с линейными операторами

Определим на множестве всех линейных операторов пространства L над полем P действия сложение, умножение на число из поля P и композицию. Пусть φ, ψ – линейные операторы пространства L и $\lambda \in P$, тогда

1) $\boldsymbol{\varphi+\psi}$: $L \to L$ по правилу $\forall u \in L$ $(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u)+\psi(u)$,

2) $\boldsymbol{\lambda\varphi}$: $L \to L$ по правилу $\forall u \in L$ $(\lambda\varphi)(u) = \lambda\varphi(u)$,

3) $\boldsymbol{\varphi\circ\psi}$: $L \to L$ по правилу $\forall u \in L$ $(\varphi\circ\psi)(u) = \varphi(\psi(u))$.

Проверим, что $\varphi+\psi$ является линейным оператором пространства L. Действительно, $\forall u, v \in L$ $(\varphi+\psi)(u+v) = \varphi(u+v)+\psi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)+\psi(u)+\psi(v) = \varphi(u)+\psi(u)+\varphi(v)+\psi(v) = (\varphi+\psi)(u)+(\varphi+\psi)(v)$ и $\forall u \in L$ $\forall \lambda \in P$ $(\varphi+\psi)(\lambda u) = \varphi(\lambda u)+\psi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)+\lambda\psi(u) = \lambda(\varphi(u)+\psi(u)) = \lambda(\varphi+\psi)(u)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, и пусть линейные операторы φ: $L \to L$ и ψ: $L \to L$ в базисе U имеют матрицы $A_U(\varphi)$ и $A_U(\psi)$ соответственно. Тогда имеют место соотношения:

1. $A_U(\varphi+\psi) = A_U(\varphi)+A_U(\psi)$,
2. $A_U(\lambda\varphi) = \lambda A_U(\varphi)$ $(\lambda \in P)$,
3. $A_U(\varphi\circ\psi) = A_U(\varphi)\cdot A_U(\psi)$.

4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Заметим, что если $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица над полем P, то определитель $|A - \lambda E|$ (где E – единичная матрица размерности $n\times n$) является многочленом над полем P относительно переменной λ, принимающей значения из P.

<u>Опреееление</u>. Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица над полем P и $\lambda \in P$. Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а корни данного многочлена называются ***характеристическими числами*** матрицы A.

Предложение 2. Если для матриц A и B выполняется равенство $B = Q^{-1}AQ$, где Q – некоторая матрица, то A и B обладают одинаковыми характеристическими числами.

Доказательство: Составим характеристический многочлен матрицы B:
$|B - \lambda E| = |Q^{-1}AQ - \lambda E| = |Q^{-1}AQ - \lambda EQ^{-1}Q| = |Q^{-1}AQ - \lambda Q^{-1}EQ| =$
$|Q^{-1}AQ - Q^{-1}\lambda EQ| = |Q^{-1}(A - \lambda E)Q| = |Q^{-1}||A - \lambda E||Q| = |A - \lambda E||Q^{-1}||Q| =$
$|A - \lambda E||E| = |A - \lambda E|$.

Замечание. Т.к. для матриц произвольного линейного оператора φ в различных базисах выполняется равенство $A_V(\varphi) = S^{-1}A_U(\varphi)S$ (теорема 1.6.9.), то из предложения 1.7.2. получаем, что все матрицы линейного оператора имеют один и тот же характеристический многочлен и один и тот же набор характеристических чисел. Поэтому характеристический многочлен матрицы линейного оператора можно назвать ***характеристическим многочленом линейного оператора***, а характеристические числа матрицы линейного оператора можно назвать ***характеристическими числами линейного оператора***.

Определение. Пусть L – линейное пространство над полем P и φ: $L \to L$ – линейный оператор. Элемент $w \in L$ называется ***собственным вектором*** оператора φ, если $w \neq \theta$ и существует $\lambda \in P$, такое, что $\varphi(w) = \lambda w$. При этом λ называется ***собственным значением*** оператора φ, соответствующим вектору w.

Предложение 3. Пусть L – линейное пространство над полем P и φ: $L \to L$ – линейный оператор. Если w – собственный вектор оператора φ и λ – собственное значение φ, соответствующее вектору w, то для любого $\mu \in P$ $(\mu \neq 0)$ вектор μw является собственным вектором оператора φ, и соответствующее ему собственное значение равно λ.

Доказательство: Пусть $\varphi(w) = \lambda w$. Рассмотрим $\varphi(\mu w) = \mu\varphi(w) = \mu(\lambda w) = (\mu\lambda)w = (\lambda\mu)w = \lambda(\mu w)$.

Теорема 5. Собственными значениями линейного оператора являются его характеристически числа, и только они.

Доказательство: Пусть L – линейное пространство над полем P и пусть линейный оператор φ: $L \to L$ в базисе $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ имеет матрицу $A_U(\varphi) = (a_{ij})_{n\times n}$.

Пусть w – собственный вектор φ и λ – собственное значение φ, т.е. $\varphi(w) = \lambda w$ $(\lambda \in P)$ и $w \neq \theta$. Пусть $w = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$, $(b_i \in P,\ i=1 \div n)$. По теореме 1.6.7. $\varphi(w) = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, значит, $\lambda\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A_U(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Запишем последнее равенство в виде системы равенств $\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n = \lambda b_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n = \lambda b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + a_{nn}b_n = \lambda b_n \end{cases}$, откуда получаем

$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n = 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 + \ldots + a_{2n}b_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)b_n = 0 \end{cases}$. Тогда вектор $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ является решением однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$ (*).

Поскольку $w \neq \theta$, то существует $b_i \neq 0$ $(i=1 \div n)$, а значит, система (*) имеет ненулевое решение, тогда определитель матрицы системы (*) равен нулю (в противном случае по теореме Крамера существовало бы только одно решение (нулевое)). Таким образом, $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \left|A_{U(\varphi)} - \lambda E\right| = 0$, т.е. λ – характеристическое число φ.

Пусть теперь λ – характеристическое число оператора φ, значит, $\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Тогда система линейных уравнений $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$ имеет ненулевое решение, пусть этим решением является вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Тогда $\begin{cases} a_{11}\tilde{n}_1 + a_{12}\tilde{n}_2 + \ldots + a_{1n}\tilde{n}_n = \lambda\tilde{n}_1 \\ a_{21}\tilde{n}_1 + a_{22}\tilde{n}_2 + \ldots + a_{2n}\tilde{n}_n = \lambda\tilde{n}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\tilde{n}_1 + a_{n2}\tilde{n}_2 + \ldots + a_{nn}\tilde{n}_n = \lambda\tilde{n}_n \end{cases}$, т.е.

$A_U(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \tilde{n}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\tilde{n}_1 \\ \lambda\tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \lambda\tilde{n}_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \tilde{n}_n \end{pmatrix}$, откуда получаем $\varphi((c_1, c_2, \ldots, c_n)) = \lambda(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Значит, вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – собственный вектор линейного оператора φ, а λ – собственное значение оператора φ.

Замечание. Из теоремы 1.7.6 следует, что для нахождения собственных векторов $w = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ линейного оператора нужно найти характеристические числа λ этого оператора, а затем найти w, решив уравнение $A_U(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \vdots \\ \lambda b_n \end{pmatrix}$, где $A_U(\varphi)$ – матрица оператора в некотором базисе U.

Теорема 6. Собственные векторы линейного оператора, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Теорема 7. Если матрица линейного оператора φ является диагональной в некотором базисе V, то все элементы базиса V являются собственными векторами оператора φ, а диагональ матрицы составлена из соответствующих этим векторам собственных значений оператора.

Доказательство: Пусть L – линейное пространство над полем P и $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – базис L, в котором матрица линейного оператора $\varphi: L \to L$ диагональная: $A_V(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $\alpha_{ii} \in P$, $i=1 \div n$. Поскольку в базисе $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ мы имеем $v_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $v_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$, то, учитывая определение 1.6.5 матрицы линейного оператора, получаем:

$$\varphi(v_1) = \alpha_{11} v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n,$$
$$\varphi(v_2) = 0v_1 + \alpha_{22} v_2 + \ldots + 0v_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(v_n) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \alpha_{nn} v_n.$$

То есть $\varphi(v_1)=\alpha_{11} v_1$, $\varphi(v_2)=\alpha_{22} v_2$, …, $\varphi(v_n)=\alpha_{nn} v_n$. А значит, элементы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются собственными векторами линейного оператора φ, и они соответствуют собственным значениям $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ этого оператора.

5. Ранг и дефект линейного оператора

<u>Определение</u>. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. ***Ядром линейного оператора*** φ называется множество (обозначаемое $\boldsymbol{Ker\,\varphi}$) элементов пространства L, образом которых является нулевой элемент θ, *т.е.*

$$Ker\,\varphi = \{u \in L \mid \varphi(u) = \theta\}.$$

<u>Определение</u>. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. ***Образом линейного оператора*** φ называется множество (обозначаемое $\boldsymbol{Im\,\varphi}$) элементов пространства L, имеющих прообразы при преобразовании φ, т.е.

$$Im\,\varphi = \{u \in L \mid \exists\, v \in L\ \varphi(v) = u\}.$$

<u>Предложение 4</u>. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Множества $Ker\,\varphi$ и $Im\,\varphi$ являются подпространствами пространства L.

<u>Предложение5</u>. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор.

1) φ является инъективным отображением тогда и только тогда, когда $Ker\,\varphi = \{\theta\}$.

2) φ является сюръективным отображением тогда и только тогда, когда $Im\,\varphi = L$.

<u>Определение</u>. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Размерность подпространства $Ker\,\varphi$ (обозначается $\boldsymbol{dim\,Ker\,\varphi}$) называется ***дефектом оператора*** φ. Размерность подпространства $Im\,\varphi$ (обозначается $\boldsymbol{dim\,Im\,\varphi}$) называется ***рангом оператора*** φ.

<u>Теорема 8.</u> Ранг линейного оператора равен рангу матрицы этого оператора.

Доказательство: Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ – базис пространства L.

Покажем сначала, что $Im\,\varphi = [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$.

Рассмотрим произвольный элемент $w \in Im\,\varphi$, тогда $w = \varphi(u)$, $u \in L$. Пусть $u = b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$ $(b_i \in P,\ i=1\div n)$, тогда $w = \varphi(u) = b_1\varphi(u_1)+b_2\varphi(u_2)+\ldots+b_n\varphi(u_n) \in [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$ (см. теорему 1.2.5). Значит, $Im\,\varphi \subset [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$. С другой стороны, согласно предложению 1.8.4, $Im\,\varphi$ является подпространством пространства L, тогда, поскольку $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n) \in Im\,\varphi$, то $[\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)] \subset Im\,\varphi$. Итак, $Im\,\varphi = [\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)]$.

Следовательно, по теореме 1.2.7 получаем: $dim\,Im\,\varphi = rang\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\}$.

Пусть

$$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n,$$
$$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n,$$

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1\div n$, $j=1\div n$. Тогда $rang\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\} = rang\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, но $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = A_U(\varphi)$. Значит, $dim\,Im\,\varphi = rangA_U(\varphi)$.

<u>Теорема 9</u>. Пусть L – линейное пространство над полем P и φ: $L \to L$ – линейный оператор. Тогда

$$dim\,Ker\,\varphi + dim\,Im\,\varphi = dim\,L.$$

Доказательство: Обозначим $dim\,Ker\,\varphi = d$, $dim\,Im\,\varphi = r$, $dim\,L = n$ и докажем, что $n = d+r$. Рассмотрим базис подпространства $Im\,\varphi$: $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Тогда по определению $Im\,\varphi$ существуют элементы $u_1, u_2, \ldots, u_r \in L$, такие, что $v_i = \varphi(u_i)$ $(i=1\div r)$. Покажем, что $u_1, u_2, \ldots, u_r$ линейно независимы. Действительно, рассмотрим равенство $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r = \theta$ $(\alpha_i \in P,\ i=1\div r)$, тогда $\varphi(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r) = \varphi(\theta) = \theta$, а значит, $\alpha_1\varphi(u_1)+\alpha_2\varphi(u_2)+\ldots+\alpha_r\varphi(u_r) = \theta$, т.е. $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r = \theta$. Но $v_1, v_2, \ldots, v_r$ линейно независимы (как базис $Im\,\varphi$), следовательно, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0$, т.е. $u_1, u_2, \ldots, u_r$ линейно независимы.

Далее, рассмотрим $N = [u_1, u_2, \ldots, u_r]$, заметим, что $dim\,N = r$ (см. замечание 1.2.8). Докажем, что $L = N\oplus Ker\,\varphi$ (см. определение 1.3.1).

1) Проверим, что $N \cap Ker\,\varphi = \{\theta\}$. Пусть $w \in N\cap Ker\,\varphi$, тогда (поскольку $w \in N$) $w = \beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_ru_r$. Из того, что $w \in Ker\,\varphi$, получаем $\varphi(w) = \theta$. Значит, $\varphi(\beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_ru_r) = \varphi(\theta)$, тогда, как было показано выше, имеем $\beta_1v_1+\beta_2v_2+\ldots+\beta_rv_r = \theta$ и $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_r=0$. Отсюда $w = 0u_1+0u_2+\ldots+0u_r = \theta$.

2) Проверим, что каждый элемент w пространства L может быть представлен в виде $w = w_1+w_2$, где $w_1 \in N$, $w_2 \in Ker\,\varphi$.

Рассмотрим $\varphi(w) \in Im\,\varphi$, тогда $\varphi(w) = \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r$ $(\alpha_i \in P,\ i=1\div r)$. Обозначим $w_1 = \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r$, очевидно $w_1 \in N$. Обозначим $w_2 = w - w_1$. Покажем, что $w_2 \in Ker\,\varphi$. Действительно, $\varphi(w_2) = \varphi(w - w_1) = \varphi(w) - \varphi(w_1) = (\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) - \varphi(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_ru_r) = (\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) - (\alpha_1\varphi(u_1)+\alpha_2\varphi(u_2)+\ldots+\alpha_r\varphi(u_r)) = (\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) - (\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r) = \theta$, значит, $w_2 \in Ker\,\varphi$. А тогда $w = w_1+w_2$, где $w_1 \in N$, $w_2 \in Ker\,\varphi$.

Итак, $L = N\oplus Ker\,\varphi$. Тогда по следствию 1.3.4 имеем $n = r+d$, что и требовалось доказать.

Определение. Линейный оператор φ линейного пространства L над полем P называется ***невырожденным оператором***, если φ – биективное отображение. В противном случае φ называется ***вырожденным оператором***.

Теорема 10. Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:

1) φ – невырожденный оператор,
2) $Ker\,\varphi = \{\theta\}$,
3) $dim\,Im\,\varphi = dim\,L$,
4) $rang\,A_U(\varphi) = dim\,L$, где U – некоторый базис L.
5) $|A_U(\varphi)| \neq 0$.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

Тема. Операции над матрицами и их свойства

Примеры решения задач

Задача 1. Найти сумму и произведение матриц А и В (если они существуют):

Решение.

Суммой двух матриц $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ одних и тех же порядков m и n называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ тех же порядков m и n, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$), т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \dots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *на вещественное число* λ называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$).

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, имеющей порядки, соответственно равные m и n, *на матрицу* $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, имеющую порядки, соответственно равные n и p, называется матрица $C = [c_{ij}]_{m \times p}$, имеющая порядки, соответственно равные m и p, и элементы c_{ij}, определяемые формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,p)$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ ($i = 1 \div m$; $j = 1 \div p$).

Для обозначения произведения матрицы А на матрицу В используют запись $C = A \cdot B$.

Правило умножения матриц иногда формулируют следующим образом: чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на соответственные элементы j-го столбца второй и полученные произведения сложить.

Произведение А на В определено не всегда: необходимо, чтобы *число столбцов матрицы А было равно числу строк матрицы В,* при этом произведение будет содержать количество строк матрицы А и количество столбцов матрицы В.

1). $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

а). Сумма матриц $A+B$ не существует (не определена), т.к. матрицы имеют разную размерность.

б). $AB=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14-10-2 & 10-5 \\ -21+2-7 & -15+1 \\ -35+14-3 & -25+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -26 & -14 \\ -24 & -18 \end{pmatrix}$

2). $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

а). $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+4 & 5+3 & -1-3 \\ 1+6 & -1+7 & -1+1 \\ 7+9 & 0+1 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -4 \\ 7 & 6 & 0 \\ 16 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

б). $AB=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -1\cdot4+5\cdot6-3\cdot9 & -1\cdot3+5\cdot7-3\cdot1 & -1\cdot5+5\cdot1-3\cdot8 \\ 1\cdot4-1\cdot6-1\cdot9 & 1\cdot3-1\cdot7-1\cdot1 & 1\cdot5-1\cdot1-1\cdot8 \\ 7\cdot4+0\cdot6+4\cdot9 & 7\cdot3+0\cdot7+4\cdot1 & 7\cdot5+0\cdot1+4\cdot8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 29 & -24 \\ -11 & -5 & -4 \\ 64 & 25 & 67 \end{pmatrix}$

3). $A=3C, B=-2D,\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

а). Сумма матриц $A+B$ не существует (не определена), т.к. матрицы имеют разную размерность.

б). $A\cdot B=3C\cdot(-2D)=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}\cdot(-2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 15 & 21 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -14 & -10 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 6\cdot(-4)+15\cdot(-14)+21\cdot(-4) & 6\cdot(-10)+15\cdot(-10)+21\cdot6 \\ 15\cdot(-4)+15\cdot(-14)+(-9)\cdot(-4) & 15\cdot(-10)+15\cdot(-10)+(-9)\cdot6 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -24-210-84 & -60-150+126 \\ -60-126+36 & -150-150-54 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -318 & -84 \\ -150 & -354 \end{pmatrix}$

Задание 2. Найти произведения матриц АВ и ВА.

Решение.

а). $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-3)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-3)\cdot 0\\ 2\cdot 0+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 0\cdot(-3)+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot 1+0\cdot 2 & 1\cdot(-3)+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

б). $A=\begin{pmatrix}0 & -5 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0\cdot 1+(-5)\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1 & 0\cdot(-1)+(-5)\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 0\cdot 0+(-5)\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1\\ 3\cdot 1+0\cdot 1+(-2)\cdot 1+0\cdot 1 & 3\cdot(-1)+0\cdot 0+(-2)\cdot(-1)+0\cdot 0 & 3\cdot 0+0\cdot 0+(-2)\cdot 0+0\cdot 1\\ 1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-1)\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot(-5)+(-1)\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 0 & 1\cdot 9+(-1)\cdot 0+0\cdot 1\\ 1\cdot 0+0\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot(-5)+0\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot(-2)+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1\\ 1\cdot 0+(-1)\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot(-5)+(-1)\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 0 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 0+0\cdot 1\\ 1\cdot 0+0\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot(-5)+0\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot(-2)+1\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 3 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 0\\ -3 & -5 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Задача 3. Решить матричное уравнение, воспользовавшись определением равенства матриц.

Пусть A и B – две (m, n)-матрицы с элементами a_{ij}, b_{ij}, соответственно. Они называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1\div m$, $j = 1\div n$.

Решение.

$$X\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2x+y & 3x-3y\\ 2z+t & 3z-3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=0,\\ 3x-3y=9,\\ 2z+t=3,\\ 3z-3t=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\\ z=\dfrac{1}{3}\\ t=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{7}{3}\end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найти матрицу, транспонированную к матрице A.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2&9\\1&2&-3&14\\3&4&1&16\end{pmatrix}$$

Для произвольной матрицы А *транспонированной* по отношению к ней называется матрица A^T, которая получается в результате замены в А строк соответствующими по номеру столбцами:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\a_{m1}&a_{m2}&...&a_{mn}\end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&...&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&...&a_{m2}\\...&...&...&...\\a_{1n}&a_{2n}&...&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Решение.

$$A^T=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&2&4\\2&-3&1\\9&14&16\end{pmatrix}$$

Задания

1. Найти сумму матриц А и В. Значения k_1,k_2,k_3 взять из таблицы.

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&0&-1\\2&-7&14&5\\0&3&2&-2\\10&2&-5&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}k_1&11&-1&0\\11&0&7&5\\2&k_2&-3&-3\\k_3&7&5&-1\end{pmatrix}$$

	k_1	k_2	k_3
1.	-5	7	-3
2.	2	5	-3
3.	-2	3	1
4.	4	3	-3
5.	2	3	-2
6.	4	3	-3
7.	2	3	-2
8.	4	-4	-3
9.	-1	-2	3
10.	2	-4	1

2. Найти произведение матриц А и В. Значения k_1,k_2,k_3 взять из таблицы.

	k_1	k_2	k_3

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\2&3&4&5\\1&3&2&5\\3&2&4&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}k_1&2&-1\\-1&k_2&3\\-2&4&k_3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

1.	-2	7	3
2.	1	5	3
3.	2	3	4
4.	3	1	2
5.	2	5	3
6.	3	1	2
7.	2	5	3
8.	1	2	7
9.	-3	-4	4
10.	3	3	-4

3. Решить матричное уравнение, используя определение равенства матриц.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. $X \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 24 \end{pmatrix}$

5. $X \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -20 & 13 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 32 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $X \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

9. $X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу, транспонированную к матрице А. Значения k_1, k_2, k_3 взять из таблицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & k_2 \\ -1 & 0 & k_1 & 5 \\ 2 & 14 & -3 & -3 \\ k_3 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

	k_1	k_2	k_3
1.	-5	7	3

2.	2	5	3
3.	-2	3	4
4.	4	3	2
5.	2	3	3
6.	4	3	2
7.	2	3	3
8.	4	-4	7
9.	-1	-2	4
10.	2	-4	-4

5. Найти матрицу:

$a)$ $A^2 - 12E$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$б)$ $(A-2E)^2(A-E)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$в)$ $A^2 + B^2$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тема. Подпространство. Линейная зависимость и независимость систем векторов

Примеры решения задач

Пусть L есть некоторое непустое множество и P – числовое поле. В L определено действие, называемое *сложением*, согласно которому каждой паре элементов u, v $\in$ L сопоставляется третий элемент из L, обозначаемый через u + v. Также определено действие *умножения элементов из L на числа из P*, согласно которому каждой паре, состоящей из элемента u $\in$ L и числа $\lambda \in$ P, сопоставлен элемент из L, обозначаемый через λu.

Если при этом выполнены следующие семь аксиом, то множество L, рассматриваемое вместе с указанными двумя операциями, называется линейным пространством над полем P.

Коммутативность сложения:

$\forall$ u, v $\in$ L u + v = v + u.

2) Ассоциативность сложения:

$\forall$ u, v, w $\in$ L (u + v) + w = u + (v + w).

Обратимость сложения:

$\forall$ u, v $\in$ L всегда найдется такой x $\in$ L, что u + x = v

(при этом элемент x называется разностью между v и u и обозначается: x = v - u).

Ассоциативность умножения на числа из P:

$\forall$ u $\in$ L $\forall \lambda, \mu \in$ P $\lambda(\mu$u) = ($\lambda\mu$)u.

Свойство дистрибутивности относительно сложения чисел из P:

$\forall$ u $\in$ L $\forall \lambda, \mu \in$ P ($\lambda + \mu$)u = λu + μu.

Свойство дистрибутивности относительно сложения элементов из L:

$\forall$ u, v $\in$ L $\forall \lambda \in$ P λ(u + v) = λu + λv.

Свойство единичного множителя:

для числа 1 $\in$ P и $\forall$ u $\in$ L выполнено 1u = u.

Элементы любого линейного пространства будем называть *векторами*

Пусть L – линейное пространство над полем P. Непустое подмножество L' пространства L называется *подпространством пространства L*, если выполнены следующие условия:

$\forall$ u, v $\in$ L'   u + v $\in$ L',

$\forall$ u $\in$ L' $\forall$ $\lambda \in$ P λu $\in$ L',

т.е. L' замкнуто относительно сложения и относительно умножения на число.

Говорят, что вектор v линейного пространства L над полем P ***линейно выражается*** через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in L$, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in P$, что

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m.$$

Выражение, стоящее в правой части, называют *линейной комбинацией* векторов u1, $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$, среди которых есть отличные от нуля, что

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta.$$

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ не являются линейно зависимыми между собой, то они называются ***линейно независимыми***. Это означает, что соотношение

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \theta$$

выполняется **только** при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Задача 1. Найти линейную комбинацию

$$3A_1 - 2A_2 + 8A_3$$

следующих векторов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$3A_1 - 2A_2 + 8A_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, + (-2)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Выяснить, является ли заданная система векторов линейно зависимой.

$$a_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим линейную комбинацию векторов и приравняем её к нулю:

$$\lambda a_1 + \mu a_2 = 0; \quad \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \quad \mu\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} -3\lambda + 6\mu \\ \lambda - 2\mu \\ 5\lambda + 15\mu \end{pmatrix} = \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 6\mu = 0, \\ \lambda - 2\mu = 0, \\ 5\lambda + 15\mu = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$\begin{cases} -3\lambda + 6\mu = 0, \\ \lambda - 2\mu = 0, \\ 5\lambda + 15\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2\mu, \\ \lambda = -3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Получили, сто равенство нулю линейной комбинации возможно только, если коэффициенты при векторах равны нулю. Следовательно, заданная система векторов линейно независима.

Задания

1. Решить векторное уравнение:

а) $A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4X = \Theta$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

б) $3(A_1 - X) + 2(A_2 + X) = 5(A_3 + X)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

в) $2A_1 + 3A_2 - A_3 - 7X = A_4$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Выяснить, является ли заданная система векторов линейно зависимой:

$$a) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \\ -49 \end{pmatrix}.$$

$$б). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$в). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что в координатном векторном пространстве V(3) = {(a1, a2, a3)| ai $\in$ R, i = 1 $\div$ 3} над полем R множество всех векторов, у которых:

а) первая координата равна нулю;

б) вторая координата равна нулю;

в) третья координата равна нулю;

является подпространством.

4. Построить линейную оболочку системы векторов:

$$a). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$б). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$в). \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ базис. Если образуют, то разложите вектор $\vec{x}$ по этому базису.

1. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

3. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

4. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

5. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Тема. Решение систем методами Гаусса и Крамера

Примеры решения задач

Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

называется *основной матрицей системы* (1).

Добавив столбец свободных членов, получаем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

называемую *расширенной матрицей системы* (1).

Теорема Система линейных уравнений разрешима тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы

Теорема *(о числе решений).* Если в разрешимой системе линейных уравнений с n неизвестными (1) rang A = rang B = n, то система (1) имеет единственное решение.

Если rang A = rang B < n, то система (1) имеет бесконечное множество различных

Задача 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$:

а) матричным методом; б) методом Гаусса; в) методом Крамера.

Решение.

Обозначим: A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов при неизвестных,

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица неизвестных, B = $\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов.

а) Решение матричным методом:

Прежде всего, найдем матрицу А-1, обратную матрице А.

Определитель основной матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = .$$

$$= 2 \cdot 14 - 3 \cdot 10 + 2 \cdot (-2) = 28 - 30 - 2 = -6$$

Алгебраические дополнения всех элементов:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=14, A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=5, A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-13$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-10, A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4, A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=8$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2, A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1, A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Отсюда $A^{-1}=\dfrac{1}{-6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/3 & -5/6 & 13/6\\ 5/3 & 2/3 & -8/6\\ 1/3 & -1/6 & -1/6\end{pmatrix}$.

Тогда

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-7/3 & -5/6 & 13/6\\ 5/3 & 2/3 & -8/6\\ 1/3 & -1/6 & -1/6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-7/3)\cdot 9+(-5/6)\cdot 14+13/6\cdot 16\\ 5/3\cdot 9+2/3\cdot 14+(-8/6)\cdot 16\\ 1/3\cdot 9+(-1/6)\cdot 14+(-1/6)\cdot 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix},$$

и, следовательно x1=2; x2=3; x3=-2.

б) Решение с помощью формул Крамера:

$$\Delta_{x1}=\begin{vmatrix}9 & 3 & 2\\ 14 & 2 & -3\\ 16 & 4 & 1\end{vmatrix}=-12, \Delta_{x2}=\begin{vmatrix}2 & 9 & 2\\ 1 & 14 & -3\\ 3 & 16 & 1\end{vmatrix}=-18, \Delta_{x3}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 14\\ 3 & 4 & 16\end{vmatrix}=12,$$

откуда

$$x_1=\frac{\Delta_{x1}}{|A|}=\frac{-12}{-6}=2, x_2=\frac{\Delta_{x2}}{|A|}=\frac{-18}{-6}=3, x_3=\frac{\Delta_{x3}}{|A|}=\frac{12}{-6}=-2.$$

в) Решение методом Гаусса:

Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 9\\ 1 & 2 & -3 & 14\\ 3 & 4 & 1 & 16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -8 & 19\\ 0 & -1 & -4 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 9\\ 0 & 1 & -8 & 19\\ 0 & 0 & -12 & 24\end{pmatrix}.$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

1) – вторую строку умножим на 2 и вычтем из неё первую строку;
– третью строку умножим на 2 и вычтем из неё первую, умноженную на 3;

2) – третью строку сложим со второй.

Последней матрице соответствует ступенчатая система уравнений:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3=9\\ x_2-8x_3=19\\ -12x_3=24\end{cases}$$

, равносильная исходной.

Из этой системы последовательно находим:

$$x_3=-2; x_2=19+8x_2=19+8\cdot(-2)=3; x_1=\frac{9-3x_2-2x_3}{2}=\frac{9-3\cdot 3-2\cdot(-2)}{2}=2.$$

Ответ: $x_1=2, x_2=3, x_3=-2$.

Задание 2. Установить совместность системы уравнений и решить

а) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=4 \\ 7x_1+4x_2+2x_3=8 \\ -8x_1-2x_2-x_3=-4 \end{cases}$.

Решение.

а) Запишем матрицу коэффициентов системы А и расширенную матрицу системы В:

$$A-\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Вертикальной чертой мы отделили элементы матрицы системы (матрица А) от свободных членов системы. Определим ранги матрицы А и В.

Для этого проведём преобразования матрицы В:

Умножим на 2 элементы второй строки;

От четвертой строки, умноженной на 2, отнимем первую строку, умноженную на 3.

От второй строки отнимем третью

От третьей строки отнимем первую строку, умноженную на 4

К третьей строке добавим вторую, умноженную на 3

Третью строку разделим на 4

Прибавим к четвёртой строке третью строку

$$B\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)\sim^1\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & -2 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim^2\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).\sim$$

$$\sim^3\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\sim^4\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что r(B)≤4, но минор четвертого порядка матрицы А

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2-0-0-0=2\neq 0.$$

Следовательно, r(B) = r(A) = 4, т.е. данная система совместна.

Но последняя матрица $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$ - это расширенная матрица

системы $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

"Обратным ходом" метода Гаусса из последнего уравнения системы находим x4 = – 1; из предпоследнего x3 = – 1; из второго x2 = – x3 = 1; из первого x1 = (4 – x4 + x3 – 2 x2) / 2 = (4 + 1 – 1 – 2 / 2 = 1.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

б) Подсчитаем ранги матрицы системы А и расширенной матрицы В.
Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ -8 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 2 & 8 \\ -8 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Минор $M_B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, r(B)=r(A)=2, т.е. данная система совместна.

Исходная система равносильна следующей системе: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

Тогда x_1, x_2 - базисные неизвестные, x_3 - свободное неизвестное. Перенесем слагаемые с x_3 в правую часть уравнения:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4 - x_3 \\ 2x_2 = 4 - x_3 \end{cases}$$

Тогда $x_2 = \dfrac{4 - x_3}{2}$, а по формулам Крамера:

$$x_2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 4 - x_3 \\ 0 & 4 - x_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}((-1)(4 - x_3) - 0) = \frac{4 - x_3}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 - x_3 & 2 \\ 4 - x_3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}((4 - x_3) \cdot 2 - (4 - x_3) \cdot 2) = 0$$

Полагая x_3= c (c$\in$R), получаем: x_1= 0; x_2= $\dfrac{4 - c}{2} = 2 - \dfrac{c}{2}$, т.е. исходная система имеет бесконечное множество решений: [0 $2 - \dfrac{c}{2}$ c], c$\in$R.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 - \dfrac{c}{2}, \\ x_3 = c \end{cases}$ c∈R.

Обобщая все вышесказанное, можно описать *общий способ решения произвольных систем линейных уравнений.*

Прежде всего, мы выясняем вопрос о разрешимости системы, считая ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Далее отбрасываем m – r уравнений, которые линейно выражаются через r строк, образующих базис системы всех строк. Затем придаем произвольные численные значения m – r неизвестным, выбирая их так, чтобы ранг матрицы коэффициентов у оставшихся неизвестных равнялся r. В результате мы получим систему из r линейных уравнений с r неизвестными, у которой ранг матрицы равен r.

Эту систему и следует решать тем или иным способом. В результате этого получим общее решение исходной системы, в котором значения неизвестных зависят от произвольных числовых значений, которые мы придали части этих неизвестных.

Задача 3. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = a \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

Здесь *a* может принимать то или другое значение. Свойства нашей системы будут зависеть от того, каково значение *a*. Принято говорить, что система зависит от параметра *a*.

Рассмотрим матрицу системы и ее расширенную матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований получаем:

$$rang\, A = rang \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = 2,$$

$$rang\, B = rang \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2a \\ 0 & 0 & -5 & -5 & (-1-3a) \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & (-1-a) \end{bmatrix} =$$

$$= rang \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1-a) \end{bmatrix}$$

Если $-1 - a \neq 0$, т.е. $a \neq -1$, то *rang* B = 3. В этом случае *rang* A ≠ *rang* B и, значит, система неразрешима.

В случае *a* = -1 мы имеем *rang* A = *rang* B = 2. Система разрешима и имеет бесконечное множество различных решений.

Найдем общее выражение для решений нашей системы линейных уравнений в случае *a* = -1:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

Полученная система разрешима, причем ранги ее матрицы и расширенной матрицы равны двум.

Для матрицы, составленной из коэффициентов первых двух уравнений, имеем:

$$rang\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} = rang\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2.$$

Отсюда следует, что наша система эквивалентна системе, состоящей из первых двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

В матрице этой системы надо выбрать два столбца, линейно независимых между собой. Таковыми не являются два первых столбца, т.к.

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно взять второй и третий столбцы, поскольку для матрицы, составленной из их коэффициентов, имеем:

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 2.$$

Согласно сказанному выше неизвестным x_1 и x_4, коэффициенты которых не входят в выбранную матрицу, можно придать произвольные численные значения: $x_1 = t_1$, $x_4 = t_4$. Получаем новую систему:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 - t_1 - 2t_4 \\ 4x_2 - 3x_3 = -2t_1 + t_4 \end{cases}.$$

Мы знаем, что у этой системы матрица имеет ранг, равный двум. Поэтому система имеет единственное решение.

Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на два, получаем

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 - t_1 - 2t_4 \\ -5x_3 = 2 + 5t_4 \end{cases}.$$

Поэтому $x_3 = -\frac{2}{5} - t_4,\ x_2 = -\frac{3}{10} - \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_4$.

Общее выражение для всех решений исходной системы линейных уравнений имеет вид:

$$x_1 = t_1,\ x_2 = -\frac{3}{10} - \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_4,\ x_3 = -\frac{2}{5} - t_4,\ x_4 = t_4.$$

Здесь параметры t_1 и t_4 могут принимать любые численные значения. При любых их значениях мы будем иметь решение системы, и всякое решение может быть получено таким способом.

Задания

1. Решите систему методом Гаусса.

3.1. $\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 10x_4 = 1 \end{array}$

3.2. $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -7 \\ x_1 + 7x_2 + 13x_3 - 6x_4 = 23 \end{array}$

3.3. $\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \end{array}$

3.4. $\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{array}$

3.5. $\begin{array}{l} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \\ -6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 = -12 \\ 15x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 16 \end{array}$

3.6. $\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 15x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 25x_4 = 1 \end{array}$

3.7. $\begin{array}{l} 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ -x_1 + 8x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 22 \\ 5x_1 - 15x_2 - 35x_3 + 20x_4 = -35 \end{array}$

3.8. $\begin{array}{l} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -5 \\ 8x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 15x_4 = 14 \end{array}$

3.9. $\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{array}$

3.10 $\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 = 4 \end{array}$

2. Найти общее и одно частное решение системы методом Крамера

	Система уравнений		Система уравнений
1	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = -1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 8, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -8 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = 10, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -10, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 3 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -4 \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_{45} = -4, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -4 \end{cases}$

5	$\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=1, \\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=2, \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=4 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=2, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=-2, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=2, \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-2 \end{cases}$

Тема. Решение однородных систем. Фундаментальная система решений

Примеры решения задач

Система линейных уравнений (5), у которой все свободные члены равны нулю, называется *однородной*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (5).$$

Замечание. Однородная система линейных уравнений всегда имеет решение. Действительно, последовательность (0, 0,…, 0) является решением всякой системы вида (5). Поэтому интересен случай, когда однородная система имеет ненулевое решение, т.е. решение, в котором хотя бы одно из неизвестных имеет значение, отличное от нуля. Если у однородной системы линейных уравнений будут ненулевые решения, то, по теореме 2.10, их будет бесконечно много.

Лемма. Если число уравнений в однородной системе линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет ненулевое решение.

Задача 1. Решить однородную систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-y_1-3y_2=0 \\ 2x_1+x_2-y_1+y_2=0 \\ \quad 3x_2-2y_1 \qquad =0 \end{cases}.$$

Решение.

Найдем фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений, которая должна иметь ранг равный 1.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-y_1-3y_2=0 \\ \quad -3x_2+y_1+7y_2=0 \\ \quad 3x_2-2y_1 \qquad =0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1+2x_2-y_1-3y_2=0 \\ \quad -3x_2+y_1+7y_2=0 \\ \qquad -y_1+7y_2=0 \end{cases}.$$

Пусть $y_2=1$, тогда $y_1=7$ и $w=7v_1+v_2=(7, 7, 14) + (-1, 3, 0)=(6, 10, 14)$ – общее решение.

Заметим, что если мы найдем оставшиеся значения переменных в этой системе $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{14}{3}$, то получим тот же вектор

$$w=\frac{2}{3}u_1+\frac{14}{3}u_2=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)+\left(\frac{14}{3},\frac{28}{3},14\right)=(6,10,14).$$

Задача 2. Решить однородную систему и найти её фундаментальную систему решений.

а).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

с помощью элементарных преобразований может быть приведена к *каноническому виду*:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_4 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ранг r матрицы равен 2, число n неизвестных равно 5, система нетривиально совместна. Размерность пространства решений этой однородной системы равна 3: $d = n - I = 5 - 2 = 3$.

Три линейно независимые решения системы

$$\mathbf{E_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис пространства решений системы, т.е. образуют её фундаментальную систему решений.

б).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_3 = 0, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 10x_4 - 11x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Составляем расширенную матрицу системы:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 10 & -11 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 8 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку последовательно на –2, 5 и 1 и прибавим соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам. Получим матрицу

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 20 & -16 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 10 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку умножим последовательно на числа 4 и 2 и прибавим соответственно к третьей и четвертой строкам. Получим матрицу

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы легко определить ранг, ее базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$. Отсюда следует, что $\mathrm{Rg} A = \mathrm{Rg} A_2^* = 2$.

Число решений в фундаментальной системе равно разности между числом неизвестных и рангом матрицы, в нашем случае фундаментальная система состоит из трех решений.

Переходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_2 + x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2 оставляем в левой части, остальные переносим в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5, \\ -3x_2 = -x_3 + 5x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Положим $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Получим $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$.

Первое решение из фундаментальной системы: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Положим $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = 1$. Получим $x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_1 = -\frac{1}{3}$.

Второе решение из фундаментальной системы решений: $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Положим $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Получим $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 = -\frac{1}{3}$.

Третье решение из фундаментальной системы решений: $x^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений найдена.
Общее решение имеет вид

$$x = C_1 x^{(1)} + C_2 x^{(2)} + C_3 x^{(3)}.$$

Ответ: Фундаментальная система решений:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

общее решение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задания

1. Проверить совместность системы и в случае совместности решить её методами Гаусса и Крамера:

1.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = -5 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$	7.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$	9.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$

2. Решить однородную систему и найти её фундаментальную систему решений:

1.	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$	7.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$	9.	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

Тема. Вычисление определителя по определению

Примеры решения задач

Задача 1. Найти знак перестановки [5, 7, 1, 6, 3].

Решение.

В перестановке [5, 7, 1, 6, 3] всевозможные инверсии составляют следующие шесть пар компонент:

(5, 1), (5, 3), (7, 1), (7, 6), (7, 3), (6, 3).

Следовательно, sign(5, 7, 1, 6, 3) = $(-1)^6$= +1.

Задача 2.Найти определитель третьего порядка по определению.

Решение.

а). $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1 a_{11}a_{22}a_{33} + \sigma_2 a_{11}a_{23}a_{32} + \sigma_3 a_{12}a_{21}a_{33} + \sigma_4 a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + \sigma_5 a_{13}a_{21}a_{32} + \sigma_6 a_{13}a_{22}a_{31},$$

$\sigma_1 = sign(1,2,3) = +1, \quad \sigma_2 = sign(1,3,2) = -1,$

$\sigma_3 = sign(2,1,3) = -1, \quad \sigma_4 = sign(2,3,1) = +1,$

$\sigma_5 = sign(3,1,2) = +1, \quad \sigma_6 = sign(3,2,1) = -1.$

Таким образом, получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

б). $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot(-3)\cdot 16 + 14\cdot 4\cdot 2 - (16\cdot 2\cdot 2 + 14\cdot 1\cdot 3 + 4\cdot(-3)\cdot 9) =$

$$= 18 - 144 + 112 - (64 + 42 - 108) = -14 + 2 = -12$$

Задача 3. Вычислить определители, используя определение минора и найти для них M_{22}, A_{23}:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) Выполним задание для первого определителя:

$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ = (-1) · (-1) – 0 · 0 = 1 – 0 = 1,

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot ((-1)\cdot 5 - 2\cdot 0) = 5.$

Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \quad .$$

$$= -1\cdot(0\cdot(-1) - 3\cdot 5) - 2\cdot(1\cdot(-1) - 3\cdot 0) + 0 = 15 + 2 = 17$$

б) Выполним задание для второго определителя, раскрывая все определители по элементам первой строки:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(12+4) - 2\cdot(-8+4) + 2\cdot(4+6) = 44$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

= -(-8+4) + 2(-8+4) - 2(4-4)= -4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Полученные определители третьего порядка сведем к определителям второго порядка, еще раз разложив каждый из них по первой строке.

$$|B| = 1\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} - 1\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix} + 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} - 2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix} -$$

$$-2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} - 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix} + 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix} + 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix} - 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= 2(12+4) - 2(-8+4) + 1(4+6) + 4(12+4) + 4(-8+4) - 2(4+6) - 4(-8+4) - 4(-8+4) +$$

$$+ 2(4-4) + 4(4+6) + 4(4+6) - 4(4-4) = 190$$

Ответ: а) $|A| = 17$, $M_{22} = 1$, $A_{23} = 5$; б) $|B| = 190$, $M_{22} = 44$, $A_{23} = -4$.

Задания

1. Вычислить определитель матрицы А, используя определение.

$$A = \begin{pmatrix} a & 11 & 1\\ 1 & 7 & b\\ 7 & 5 & c\end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы А, используя определение Значения a, b, c взять из таблицы.

	a	b	c
11.	-5	7	-3
12.	2	5	-3
13.	-2	3	1
14.	4	3	-3
15.	2	3	-2
16.	4	3	-3
17.	2	3	-2
18.	4	-4	-3
19.	-1	-2	3
20.	2	-4	1

3. В заданиях 1-10 определить число инверсий в перестановках:

1. 2, 4, 3, 5, 1, 7, 6.

2. 7, 5, 3, 6, 4, 2, 1.

3. 7, 4, 5, 3, 6, 2, 1, 8.

4. 8, 6, 4, 2, 7, 5, 3, 1.

5. 2, 3, 5, 4, 1.

6. 6, 3, 1, 2, 5, 4.

7. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.

8. 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

9. 1, 3, 5, 7,… $2\boldsymbol{n}-1$, 2, 4, 6, 8,…, $2\boldsymbol{n}$.

10. 2, 4, 6, 8,…, $2\boldsymbol{n}$, 1, 3, 5, 7,… $2\boldsymbol{n}-1$.

В заданиях 11-22 выяснить, какие из данных произведений являются членами определителя соответствующего порядка; указать при этом порядок определителя и знак члена:

11. $a_{34}a_{15}a_{23}a_{42}a_{51}$.

12. $a_{15}a_{23}a_{34}a_{51}a_{42}$.

13. $a_{61}a_{52}a_{42}a_{33}a_{14}a_{25}$.

14. $a_{53}a_{42}a_{31}a_{25}a_{34}a_{16}$.

15. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$.

16. $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

17. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

18. $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

19. $a_{45}a_{71}a_{23}a_{67}a_{34}a_{12}a_{56}$.

20. $a_{23}a_{52}a_{77}a_{34}a_{61}a_{12}a_{45}$.

21. $a_{71}a_{17}a_{26}a_{62}a_{53}a_{35}a_{44}$.

22. $a_{26}a_{35}a_{44}a_{17}a_{53}a_{62}a_{31}$.

Тема. Свойства определителя

Примеры решения задач

Определителем (или детерминантом) квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется сумма всевозможных произведений $\sigma a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$, каждое из которых содержит сомножителями элементы матрицы А, взятые по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца (т.е. последовательность номеров строк $i_1, i_2, \dots, i_n$ и последовательность номеров столбцов $j_1, j_2, \dots, j_n$ являются некоторыми перестановками чисел 1, 2, …, n), а коэффициент σ определяется следующим образом:

$$\sigma = \mathrm{sign}(i_1, i_2, \dots, i_n) \cdot \mathrm{sign}(j_1, j_2, \dots, j_n).$$

Задача 1. Вычислить определитель матрицы А

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

а). Первая и вторая и строки матрицы А пропорциональны, следовательно, по следствию 1 , её определитель равен 0.

б). Вторая строка матрицы А равна сумме первой и третьей строк, следовательно, по свойству 6 , её определитель равен 0.

Задача 2. Доказать, что определитель матрицы А равен 0:

$$A = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а). Третья строка матрицы А равна сумме первой и второй и строк, следовательно, по свойству 6 , её определитель равен 0.

Задача 3. Вычислить определитель матрицы A с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Сначала умножим первую строку матрицы на 4, а вторую на (–1) и прибавим первую строку ко второй:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -15 \\ 6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Теперь умножим первую строку на 6, а третью на (–1) и прибавим первую строку к третьей:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -15 \\ 0 & 2 & -23 \end{pmatrix}$$

Наконец, умножим вторую строку на 2, а третью на (–9) и прибавим вторую строку к третьей:

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 177 \end{pmatrix}.$$

По свойствам определителей, при этих преобразованиях определитель матрицы не меняется: $\det A = \det A' = \det A'' = \det A'''$.

Вычислим $\det A'''$ по определению:

$$\det A''' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 177 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 \cdot 177 = 1593.$$

Задания

1. Вычислить определитель матрицы A с помощью элементарных преобразований. Указать, на какие свойства определителей опирались при выполнении преобразований.

1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	**1.**	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	**2.**	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**3.**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	**4.**	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	**5.**	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**6.**	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

2. Доказать следующие тождества.

а) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

б) $\begin{vmatrix} a_1+b_1y & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} a_1+b_1y & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

г) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

д) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

е) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

ж) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

Тема. Разложение определителя по строке и столбцу

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить определитель разложением по строке (столбцу):
а). Вычислить определитель матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.
Разложим определители по первой строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 14 - 3\cdot 10 + 2\cdot(-2) = 28 - 30 - 2 = -6$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 0 - 0 - 0 = 2.$$

Вычисление определителей высоких порядков непосредственно на основе определения, как правило, чрезвычайно громоздко. Существуют различные приемы, основанные на свойствах определителей, позволяющие производить вычисления определителей с небольшой затратой сил.

Один из приемов состоит в том, что вычисляемый определитель выражают через другие определители меньших порядков и т.д., пока не сводят все к определителям второго порядка, которые вычисляются непосредственно. Указанное снижение порядка осуществляется на основании теоремы о разложении определителя по ряду.

Другой прием заключается в том, что при помощи рассмотренных в этом параграфе преобразований рассматриваемый определитель приводят к такому определителю, величина которого известна. Важнейшим определителем такого типа является определитель треугольной матрицы. Можно указать также равный нулю определитель с пропорциональными параллельными рядами, и в частности определитель с нулевым рядом (который, очевидно, пропорционален любому ряду). На практике встречаются и другие заранее известные определители, к которым сводится вычисление целого ряда определителей.

Наиболее распространенным можно считать способ вычисления определителей, использующий одновременно оба указанных выше приема. Он особенно удобен при вычислении определителей не очень больших порядков, причем в случае, когда не заметно какой-либо удобной закономерности в строении определителя (иначе обычно целесообразнее выбирать способ, связанный с этой закономерностью). Поступают следующим образом. В произвольном ряду определителя с помощью какого-нибудь ненулевого элемента (лучше брать ± 1) обращают все другие элементы этого ряда в нуль (так, как при приведении к треугольному виду). Затем разлагают определитель по этому ряду. Такое разложение дает лишь одно ненулевое слагаемое, т.е. выражает наш определитель через новый определитель, порядок которого на единицу меньше порядка исходного определителя. К полученному определителю снова можно применить аналогичные рассуждения.

Задача 2. Вычислить определитель:
Решение.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 11 & 10 & 4 & 8 & 17 \end{vmatrix}.$$

При помощи элемента a23 = 1 получим нули во второй строке. Для этого прибавим к первому столбцу третий, умноженный на -2, ко второму – третий, умноженный на -2, к четвертому – третий, умноженный на -1, к пятому – третий, умноженный на -3. Получим:

$$D=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по второй строке:

$$D=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом, преобразуя и разлагая получающиеся определители, получаем:

$$D=-\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -8 & 0 & 9 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -8 & 9 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} -53 & 9 & -29 \\ -5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -53 & -29 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -29 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-39.$$

Задания

1. Вычислить определитель матрицы А разложением по строке (стоблцу).

7.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	**7.**	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	**8.**	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**9.**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	**10.**	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	**11.**	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**12.**	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Тема. Методы вычисления обратной матрицы

Примеры решения задач

Если для матриц $A, B \in M_n$ выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A = E$, где E – единичная матрица, то матрица A называется *обратимой*, а матрица B – *обратной к A* и обозначается $B = A^{-1}$.

Матрица обратима тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю.

Задача 1. Определить, имеет ли данная матрица обратную, найти обратную матрицу к данной $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычисляем определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&-3\\3&4&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\4&1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}1&-3\\3&1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=28-30-4=-6.$$

|A| $\neq$ 0 $\Rightarrow$ матрица имеет обратную ей матрицу. Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-3\\4&1\end{vmatrix}=14, A_{21}=-\begin{vmatrix}3&2\\4&1\end{vmatrix}=5, A_{31}=\begin{vmatrix}3&2\\2&-3\end{vmatrix}=-13, A_{12}=-\begin{vmatrix}1&-3\\3&1\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4, A_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&-3\end{vmatrix}=8, A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2, A_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=1, A_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1$$

Таким образом: $B=A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix}14&5&-13\\-10&-4&8\\-2&1&1\end{pmatrix}.$

Задача 2. Найти обратную матрицу и проверить результат:

а) A=$\begin{pmatrix}3&1\\-5&1\end{pmatrix}$ найдем определитель матрицы Δ=$\begin{vmatrix}3&1\\-5&1\end{vmatrix}=8$, определитель матрицы не равен нулю, следовательно, матрица невырожденная.

A_{11}=1 A_{12}=5

A_{21}=-1 A_{22}=3 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\left(\overline{A}\right)^T$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\\frac{5}{8}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\-5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\\\frac{5}{8}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}+\frac{5}{8}&-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\\-\frac{5}{8}+\frac{5}{8}&\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

б)A=$\begin{pmatrix}3&4&2\\5&10&5\\1&1&1\end{pmatrix}$

Δ= $3\begin{vmatrix}10&5\\1&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5&5\\1&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5&10\\1&1\end{vmatrix}=3(10-5)-4(5-5)+2(5-10)=10-5=5$ –

определитель матрицы не равен нулю, следовательно, данная матрица невырожденная

A=$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (\overline{A})$, следовательно

A^{-1}=1/5$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 \\ -1 & 1/5 & 2 \end{pmatrix}$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 \\ -1 & 1/5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+(-2)+0 & 4-4+0 & -3+1+2 \\ 0+1+(-1) & 0+2-1 & -4+2+2 \\ -3+1+2 & 0+1-1 & -2+1+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Существует и другой способ нахождения обратной матрицы.

Предположим, что матрица А – невырожденная и рассмотрим метод нахождения обратной матрицы, основанный на элементарных операциях над строками. Под элементарными преобразованиями понимается:

Умножение строки на любое ненулевое число.

Прибавление к одной строке любой другой, предварительно умноженной на любое число.

Алгоритм метода

1. Сначала составляется расширенная матрица – присоединением к матрице А единичной матрицы Е:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

2. Затем с помощью элементарных операций над строками расширенная матрица (А | Е) преобразуется к виду (Е | В).

С формальной точки зрения такие преобразования могут быть реализованы умножением на матрицу А некоторой матрицы Т, которая представляет собой произведение соответствующих элементарных матриц: ТА=Е.

Это уравнение означает, что матрица преобразования Т представляет собой обратную матрицу для матрицы А: Т = А$^{-1}$.

3. Тогда ТЕ = А$^{-1}$ и, следовательно, В=А$^{-1}$.

Задача 3. Найти матрицу, обратную к матрице А методом элементарных преобразований: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение.

1. Переставим местами первую и вторую строки матрицы.
2. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на –2.
3. К первой строке прибавим вторую, умноженную на 3.
4. Вторую строку умножим на –1.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&5&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\2&5&1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\0&-1&1&-2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-5\\0&-1&1&-2\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-5\\0&1&-1&-2\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&-2\end{pmatrix}$$

Задание

1. Найти матрицу A^{-1} методом элементарных преобразований и проверить, что

$AA^{-1} = E$.

1	$\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$	**6.**	$\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-5&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}$	**7.**	$\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}2&1&1\\4&6&5\\3&5&4\end{pmatrix}$	**8.**	$\begin{pmatrix}2&6&3\\3&2&3\\4&3&4\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$	**9.**	$\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&-3&3\\3&0&2\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&4\end{pmatrix}$	**10.**	$\begin{pmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\5&5&-4\end{pmatrix}$

2. Найти обратные матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ для заданных матриц с помощью алгебраических дополнений.

а) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, где $ad-bc\neq 0$. б) $A=\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&2\end{pmatrix}$. г) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$.

д) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&-1&2\\2&4&-5\end{pmatrix}$. е) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

ж) $A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$. з) $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

Тема. Вычисление ранга матрицы

Примеры решения задач

Число r называется *рангом матрицы* A, если ранг системы строк матрицы A и ранг системы столбцов матрицы A оба равны r. Обозначение: rang A = r.

Итак, по определению рангом матрицы является число, одновременно являющееся количеством элементов в базисе системы векторов, образующих строки этой матрицы, и системы векторов, образующих ее столбцы.

Следующие преобразования называются *элементарными преобразованиями матрицы*:

1. Умножение какого-нибудь ряда на число, отличное от нуля.
2. Перестановка местами двух параллельных рядов.
3. Присоединение нового ряда, целиком состоящего из нулей.
4. Исключение ряда, целиком состоящего из нулей.
5. Прибавление к одному ряду другого, параллельного ряда, умноженного на какое-либо число.

Ранг диагональной матрицы порядка n с ненулевыми диагональными элементами равен ее порядку n.

При помощи элементарных преобразований заданную матрицу следует привести к диагональному виду с отличными от нуля диагональными элементами. Порядок полученной диагональной квадратной матрицы благодаря лемме 8.6. и следствию 8.8. будет равен рангу исходной матрицы.

В целях экономии вычислений можно не доводить матрицу до диагонального вида. Достаточно привести ее к виду

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1 \div k$), или к аналогичной матрице, у которой выше главной диагонали все элементы равны нулю. Ранг такой матрицы равен k.

Рассмотрим матрицу A:

$$rangA = r\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 3.$$

Замечание. Вычисление рангов матриц удобно использовать при выяснении вопроса о линейной зависимости систем векторов.

Например, является ли линейно зависимой следующая система векторов: u_1=(0, 2, -1, 2, 3), u_2=(1, -1, 2, 1, 0), u_3=(1, 1, 1, 3, 3), u_4=(0, 2, 5, 1, -2). Составляя из этих векторов матрицу, получаем матрицу A из примера 8.5. Согласно 8.10 ее ранг равен 3. Это означает, что максимальная линейно независимая совокупность векторов из данной системы содержит три вектора. Следовательно, четыре вектора u_1, u_2, u_3, u_4 линейно зависимы.

Задача 1. Найти методом элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Все элементы первой строки умножим:

а) на 4 и сложим с элементами второй строки;

б) на (-3) и сложим с элементами третьей строки;

в) на 4 и сложим с элементами четвёртой строки;

2. Из элементов четвёртой строки вычтем элементы третьей и умноженные на 2 элементы второй строки

3. а) Элементы третьей строки умножим на 2 и вычтем из неё элементы второй строки

б) отбросим последнюю строку с нулевыми элементами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & -7 & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -18 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & 13 & -6 & -10 \\ 0 & 5 & -23 & 12 & 16 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -18 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & 13 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -18 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 44 & -21 & -33 \end{pmatrix}.$$

Так как для последней матицы существует только минор третьего порядка, отличный от нуля, например $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 44 \end{vmatrix} = 88$, то r(A)=3.

Ответ: r(A)=3.

Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров.

Пусть имеется прямоугольная матрица nxm.

Минором K-ого порядка матрицы A (k<m,k<n) называется определитель, получающийся из элементов, стоящих на пересечении каких-либо строк и каких-либо столбцов.

Рангом матрицы называется целое, положительное число r=RangA, такое, что в данной матрице присутствует хотя бы один минор порядкаr≠0, а все миноры следующего порядка (r+1 и далее) =0.

Если в матрице найден отличный от нуля минор k-ого порядка, то все миноры k+1 порядка считать не обязательно, так как имеет место теорема:

Если все окаймляющие данный минор k-ого порядка миноры k+1 порядка равны нулю, то и все вообще миноры k+1 –ого порядка = 0.

Задача 2. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы А. Выберем, например, минор (элемент) M_1 = 1, расположенный в первой строке и первом столбце.

Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

отличный от нуля.

Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2.
Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый).
Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы А равен двум.

Задания

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2. Найти ранги заданных матриц при помощи элементарных преобразований.

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Тема. Линейный оператор и его простейшие свойства. Матрица линейного оператора

Примеры решения задач

Пусть L – линейное пространство над полем P. Линейным оператором, или линейным преобразованием, пространства L называется отображение $\varphi: L \to L$, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall$ u, v $\in$ L $\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,

2) $\forall$ u $\in$ L $\forall \lambda \in$ P $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис U следующим образом:

$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n$,

$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n$,

…………………………………………

$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n$,

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1\div n$, $j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** φ в базисе U.

Задача 1. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y–z=0$.

Если $\mathbf{x} = \{x_1;\ \ x_2;\ \ x_3\}$, то

$$A\mathbf{x} = \left\{x_1;\ \ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3;\ \ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right\}.$$

Оператор является линейным, если

$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ и $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$.

Проверяем

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \left(x_1 + y_1;\ \ \frac{1}{2}(x_2 + y_2) + \frac{1}{2}(x_3 + y_3);\ \ \frac{1}{2}(x_2 + y_2) + \frac{1}{2}(x_3 + y_3)\right) =$$

$$= \left(x_1 + y_1;\ \ \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3);\ \ \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\right) =$$

$$= A\mathbf{x} + A\mathbf{y}.$$

$$A(\lambda \mathbf{x}) = \left\{ \lambda x_1; \quad \frac{1}{2}\lambda x_2 + \frac{1}{2}\lambda x_3; \quad \frac{1}{2}\lambda x_2 + \frac{1}{2}\lambda x_3 \right\}.$$

$$\lambda(A\mathbf{x}) = \left\{ \lambda x_1; \quad \lambda\left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right); \quad \lambda\left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right) \right\} =$$

$$= \left\{ \lambda x_1; \quad \frac{1}{2}\lambda x_2 + \frac{1}{2}\lambda x_3; \quad \frac{1}{2}\lambda x_2 + \frac{1}{2}\lambda x_3 \right\} = A(\lambda \mathbf{x}).$$

Т.е. оператор А является линейным.

Его матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Область значений оператора – это множество всех векторов

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \left\{ x_1; \quad \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3; \quad \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right\}.$$

Ядро линейного оператора – это множество всех векторов, которые А отображает в нуль-вектор:

$$\operatorname{Ker} A = \{0; \quad x_2; \quad -x_2\}.$$

Задания

Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро операторов А, В и С:

1.	$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad -3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3),$ $Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2),$ $Cx = (x_3^4, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3).$
2.	$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2),$ $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 0, \quad x_2^4 + 2x_3),$ $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2x_3).$
3.	$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3),$ $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$ $Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad x_1, \quad x_1 + 2x_2 + 3).$
.4.	$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$ $Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad 1, \quad 2x_1 - 3x_2 - 4),$ $Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, \quad x_3, \quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3).$
5.	$Ax = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3, \quad 4x_1 - 5x_2 - 6),$ $Bx = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3, \quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3),$ $Cx = (x_1, \quad x_1 - 2x_2 - 3x_3, \quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3).$

Тема. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Ранг и дефект линейного оператора

Примеры решения задач

Пусть L – линейное пространство над полем P. Линейным оператором, или линейным преобразованием, пространства L называется отображение φ: L → L, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall$ u, v $\in$ L φ(u+v) = φ(u)+φ(v),

2) $\forall$ u $\in$ L $\forall$ λ $\in$ P φ(λu) = λφ(u).

Пусть в линейном пространстве *L* над полем *P* задан базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис *U* следующим образом:

$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n$,

$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n$,

……………………………………………

$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n$,

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1\div n$, $j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** *φ* в базисе *U*.

Общая постановка задачи

Найти матрицу некоторого оператора A в базисе $(\mathbf{e}'_1; \ \mathbf{e}'_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}'_n)$, где

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 = t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n = t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n. \end{cases}$$

если в базисе его $(\mathbf{e}'_1; \ \mathbf{e}'_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}'_n)$ матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>План решения.</u>

При переходе от базиса $(\mathbf{e}_1; \ \mathbf{e}_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}_n)$ к базису $(\mathbf{e}'_1; \ \mathbf{e}'_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}'_n)$ матрица оператора преобразуется по формуле $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, где T – матрица перехода от базиса $(\mathbf{e}_1; \ \mathbf{e}_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}_n)$ к базису $(\mathbf{e}'_1; \ \mathbf{e}'_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}'_n)$.

1. Выписываем матрицу перехода:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Находим обратную матрицу $\mathbf{T}^{-1}$.

3. Находим матрицу оператора A в базисе $(\mathbf{e}'_1; \ \mathbf{e}'_2; \ \ldots; \ \mathbf{e}'_n)$ по формуле $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Задача. 1. Найти матрицу в базисе $(e'_1, \ e'_2, \ e'_3)$, где

$$e_1' = e_1 - e_2 + e_3,\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3,\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3,$$

если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг и дефект оператора А.

Решение.

Матрица в базисе (e_1', e_2', e_3') находится по формуле $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.
где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу $\mathbf{T}^{-1}$.
Определитель:

$$|\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 1 + 4 - 1 = 1.$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обратная матрица:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу в новом базисе:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10+0+1 & 5+3-1 & 0-3-1 \\ 6+0+1 & 3+2-1 & 0-2-1 \\ 2+0+0 & 1+1+0 & 0-1+0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & -4 \\ 7 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11-7-4 & -11+7+8 & -11+14-4 \\ 7-4-3 & -7+4+6 & -7+8-3 \\ 2-2-1 & -2+2+2 & -2+4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Т.е. матрица А в базисе (e_1', e_2', e_3') имеет вид:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=111\neq 0$, то rang A=3=rang$R^3$, то оператор А – невырожденный и его дефект равен нулю.

Задания

1. Найти матрицу оператора в базисе $(e_1',\ e_2',\ e_3')$, где

$$e_1'=e_1-e_2+e_3,\ e_2'=-e_1+e_2-2e_3,\ e_3'=-e_1+2e_2+e_3,$$

если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3).

2. Найти ранг и дефект оператора.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

Примеры решения задач

Пусть L – линейное пространство над полем P. Линейным оператором, или линейным преобразованием, пространства L называется отображение $\varphi: L \to L$, для которого выполняются следующие условия:

1) $\forall$ u, v $\in$ L $\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$,

2) $\forall$ u $\in$ L $\forall\ \lambda \in$ P $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Пусть в линейном пространстве L над полем P задан базис $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и задан линейный оператор $\varphi: L \to L$. Пусть элементы $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ линейно выражаются через базис U следующим образом:

$\varphi(u_1) = \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1n}u_n$,

$\varphi(u_2) = \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2n}u_n$,

…………………………………………

$\varphi(u_n) = \alpha_{n1}u_1+\alpha_{n2}u_2+\ldots+\alpha_{nn}u_n$,

где $\alpha_{ij} \in P$, $i=1\div n$, $j=1\div n$. Тогда матрица линейного выражения образов $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$ базисных элементов через этот базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$A_U(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей линейного оператора*** φ в базисе U.

Пусть L – линейное пространство над полем P и $\varphi: L \to L$ – линейный оператор. Элемент $w \in L$ называется ***собственным вектором*** оператора φ, если $w \neq \theta$ и существует $\lambda \in P$, такое, что $\varphi(w) = \lambda w$. При этом λ называется ***собственным значением*** оператора φ, соответствующим вектору w.

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица над полем P и $\lambda \in P$. Многочлен $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A, а корни данного многочлена называются ***характеристическими числами*** матрицы A.

Общая постановка задачи.

Найти собственные значения и собственные векторы оператора А, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

План решения.

Собственные значения оператора А являются корнями его характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

1. Составляем характеристическое уравнение и находим все его вещественные корни λ (среди которых могут быть и кратные).

2. Для каждого собственного значения λ находим собственные вектора. Для этого записываем однородную систему уравнений $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})X = 0$ и находим ее общее решение.

3. Исходя из общих решений каждой из однородных систем, выписываем собственные векторы.

Задача. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его решение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = 1, \ \lambda_3 = 3$.

Найдем собственные векторы:

$$\lambda_{1,2} = 1: \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = c_1. \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 3: \quad \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = -c_1. \end{cases}$$

Собственные векторы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задания

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного в некотором базисе матрицей

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Определить, является ли данный оператор вырожденным или невырожденным.

Материалы для проведения текущей и промежуточной аттестаций представлены в фондах оценочных средств по дисциплине Линейная алгебра