МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Введение в математический анализ

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

В ходе лекционных занятий необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Тема	Рассматриваемые вопросы
1	Введение в анализ	Множества. Действительные числа. Функция. Последовательности. Предел функции. Непрерывность функций. Производная функции. Дифференциал функции. Функции нескольких переменных.
2	Неопределенный интеграл	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование. Методы интегрирования. Замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших иррациональных и трансцендентных функций.
3	Определенный интеграл	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о

		среднем. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Методы приближенного вычисления определенного интеграла. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.
4	Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода	Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода с бесконечными пределами и от неограниченных функций, определения, их основные свойства. Условия сходимости несобственных интегралов и способы исследования сходимости.

При подготовке к очередному лекционному занятию необходимо:

1.Разобрать материал, излагавшийся на предыдущем лекционном занятии, при этом выделить наиболее важную часть изложенного материала (основные определения и формулы).

2.Выделить основные соотношения формулы и определения.

3.Сформулировать (подготовить) вопросы, возникшие при разборе материала предыдущей лекции.

4.Сравнить лекционный материал с аналогичным материалом, изложенным в литературе, попытаться самостоятельно найти ответ на возникшие при подготовке вопросы.

5.Используя литературу, ознакомиться с материалом, изложение которого планируется на предстоящей лекции.

6.Определить наиболее трудную для вашего понимания часть материала и попытаться сформулировать основные вопросы по этой части.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

Содержание дисциплины «Введение в математический анализ» представлено следующими разделами:

1. Введение в анализ
2. Неопределенный интеграл
3. Определенный интеграл
4. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода

При подготовке к практическим занятиям необходимо:

1.Понять смысл основных формул и определений, содержащиеся в лекционном материале.
2.Уточнить область применимости основных формул и определений.
3.Приложить максимум усилий для самостоятельного выполнения домашнего задания.
4.Сформулировать вопросы, возникшие при выполнении домашнего задания.
5.Подобрать интересные на ваш взгляд примеры и задачи (ситуации) для рассмотрения их на предстоящем семинарском занятии.
6.Выполнить домашнее задание, используя методы, отличные от тех, которые были изложены преподавателем на лекциях (семинарах). Сравнить полученные результаты.

Тематика рефератов/докладов/эссе, методические рекомендации по выполнению контрольных и курсовых работ, иные материалы

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

Контрольные работы могут браться из учебного пособия: Солодовникова Е.Н., Шарипов Б.У. Математика: учебное пособие по организации самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки «Машиностроение», профиль «Технологии, оборудование и автоматизация машиностроительных производств». – Борисоглебск: БФ ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», 2015. – 100 с.

Контрольные работы по дисциплине «Введение в математический анализ»» должны быть выполнены в соответствии с вариантом, который совпадает с порядковым номером фамилии студента в групповом списке.

В данных методических материалах рассматриваются темы в объеме рабочей программы по дисциплине «Введение в математический анализ», позволяющие самостоятельно освоить необходимый теоретический материал и выполнить контрольные задания. В соответствии с этим каждый раздел содержит рассматриваемые вопросы, позволяющие изучить основной теоретический материал, и вопросы для самопроверки. Цель последних – помочь студентам при повторении и закреплении материала. По всем темам приведены подробные решения типовых примеров и задач, что должно способствовать лучшему пониманию и усвоению предмета.

1.ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1.Множества. Действительные числа.
1.2 Функция.
1.3 Последовательности.
1.4 Предел функции.
1.5 Непрерывность функций.
1.6 Производная функции.
1.7Дифференциал функции.
1.8 Функции нескольких переменных.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры различных множеств, совпадающих множеств.
2. Какие числовые множества называются промежутками?
3. Из отрезка [*a*; *b*] удален интервал (*a*; *b*). Что осталось?
4. Что называется абсолютной величиной числа?
5. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.
6. Прочитайте запись: $\lim f(x) = b$. Дайте определение предела функции в точке.
7. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
8. Приведите примеры бесконечно малых и бесконечно больших величин.
9. Какие функции называются эквивалентными бесконечно малыми?
10. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.
11. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

12. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.
13. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?
14. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
15. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
16. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируете зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
17. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
18. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
19. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
20. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
21. В чем заключается механический смысл производной?
22. Что называется производной второго порядка, и каков ее механический смысл?
23. Каково механическое истолкование производной второго порядка?
24. Что называется производной третьего порядка?
25. Функция $y=y(x)$ в точке x_0 дважды дифференцируема. Будет ли y' непрерывна в точке x_0? Почему?
26. Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая? Приведите пример функции, у которой существует $f'(x_0)$, но не существует $f''(x_0)$.
27. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
28. Как можно объяснить, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?
29. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?
30. В чем заключается необходимый и достаточный признак экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функций с помощью первой производной.
31. Как отыскивают экстремумы функций с помощью второй производной?
32. В чем разница между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее набольшего и наименьшего значений?
33. Как определяется выпуклость и вогнутость функции?
34. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования?

Разбор типового варианта контрольной работы по разделу Введение в анализ

Задание 1. Найти дифференциал функции y, если $y = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$y = \ln(\sin x) - \ln x$.

Используем формулу $dy = y' \cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = ctgx - \frac{1}{x};$$

$$dy = \left(ctgx - \frac{1}{x}\right)dx.$$

Задания 2- 3. Используя правила и формулы дифференцирования, найти производные функций:

1) $f(x) = 5 + x^2 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = x\sin x$;

4) $f(x) = xarctgx - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

Решение.

1) $f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + \log_2 x + 3\ln x)' =$
$= (5)' + (x^3)' + (3x^2)' + (\sin x)' + (\cos x)' + (2tgx)' - (3ctgx)' + (\log_2 x)' + (3\ln x)' =$
$= 3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{x}\log_2 e + \dfrac{3}{x}$;

2) $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)} =$
$= \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$;

3) $f'(x) = (x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cdot\cos x$;

4) $f'(x) = (x\cdot arctgx)' - (\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2))' = (x)'arctgx + x(arctgx)' - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}(1+x^2)' =$
$= 1\cdot arctgx + \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{2x}{2(1+x^2)} = arctgx$.

Задание 4. Вычислить пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$.

Решение. Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции $5x^2+1$ и $7x^5+2x+3$ являются бесконечно большими. Поэтому, $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^2+1) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(7x^5+2x+3) = \infty$.

Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределенности и использовании теоремы о пределе отношения двух функций выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\frac{0}{7}=0.$$

Ответ. 0.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Ответ. -9.

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для вычисления данного предела подставим значение $x=-1$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\frac{(-1)^2+14\cdot(-1)-32}{(-1)^2-6\cdot(-1)+8}=\frac{-45}{15}=-3.$$

Ответ. -3.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: $\lim\limits_{A\to 0}\dfrac{\sin A}{A}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$$

Ответ. k

е) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\,\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{0\cdot\infty\}$ в этом случае, нужно произведение преобразовать в частное, то есть неопределенность $\{0\cdot\infty\}$ свести к неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\,\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left[\sin\frac{\pi x}{2}=1,\,npu\; x=1\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y\to 0, x=y+1\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\frac{\pi}{2}(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\sin\frac{\pi}{2}y}.$$

Выделяем первый замечательный предел, то есть, умножаем числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. Получаем,

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

ж) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-2}{x+1}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Ответ. e^{-2}.

з) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\begin{bmatrix} y=x-2, \\ x=y+2,\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\left(3(y+2)-5\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+3y)^{\frac{1\cdot 3}{y\cdot 3}}=e^3.$$

Ответ. e^3.

и) $\lim\limits_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Подставим значение $x=\dfrac{5}{2}$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left(3\cdot\frac{5}{2}-5\right)^{\frac{1}{5/2-2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{25}{4}$.

<u>**Примеры контрольной работы по разделу Введение в анализ**</u>

<u>Вариант 1</u>

Задача 1. Найти дифференциал dy. $y=\ln\left(\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\right)+\arcsin\mathrm{e}^x$.

Задача 2. Найти производную. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

Задача 3. Найти производную $y=\ln\mathrm{tg}\left(x/2\right)-x/\sin x$.

Задача 4. Вычислить пределы функций

а). $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$. б). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

<u>Вариант 2</u>

Задача 1. Найти дифференциал dy. $y=\dfrac{\ln|x|}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$

Задача 2. Найти производную. $y=arctg\,\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Задача 3. Найти производную. $y=\dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

Задача 4. Вычислить пределы функций

а). $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}=e^{4\pi^2}}$. б). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\pi x}$.

<u>Вариант 3</u>

Задача 1. Найти дифференциал dy. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x$.

Задача 2. Найти производную. $y=x+\dfrac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

Задача 3. Найти производную. $y=\ln^3(1+\cos x)$

Задача 4. Вычислить пределы функций

а). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin \pi x}$. б). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x-\sqrt{3x^2-5x+2}})}$.

<u>Вариант 4</u>

Задача 1. Найти дифференциал dy. $y=\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)$.

Задача 2. Найти производную. $y=ctg(\cos 5)-\dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

Задача 3. Найти производную. $y=2\arcsin\dfrac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$,

Задача 4. Вычислить пределы функций

а). $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$. б). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Неопределенный интеграл.
- 2.1.1. Первообразная. Понятие неопределенного интеграла.
- 2.1.2. Свойства неопределенного интеграла.
- 2.1.3. Таблица основных неопределенных интегралов.

2.2. Основные методы интегрирования.
- 2.2.1. Метод непосредственного интегрирования.
- 2.2.2. Метод интегрирования подстановкой.
- 2.2.3. Метод интегрирования по частям.

2.3. Интегрирование рациональных функций.
- 2.3.1. Понятие о рациональных функциях.
- 2.3.2. Интегрирование рациональных дробей.

2.4. Интегрирование тригонометрических функций.
- 2.4.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
- 2.4.2. Интегралы типа $\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx$.
- 2.4.3. Использование тригонометрических преобразований.

2.5. Интегрирование иррациональных функций.
- 2.5.1. Квадратичные иррациональности.
- 2.5.2. Тригонометрическая подстановка.
- 2.5.3. Интегрирование дифференциального бинома.

2.6. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы.

Вопросы для самопроверки

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Запишите первообразные для функций: 3, $4x^3$, $\cos x$, $\dfrac{2}{x}$.
4. Какая из двух функций $5x^4$ или x^5+4 является первообразной для другой?
5. Первообразная определяется неоднозначно. Как это нужно понимать?

6. Что называется неопределенным интегралом?
7. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
8. Как называются все элементы равенства $\int f(x)dx = F(x) + c$?
9. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
10. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
11. Как доказать справедливость каждой формулы интегрирования?
12. Что такое интегральные кривые? Как они расположены друг относительно друга? Могут ли они пересекаться?
13. Как расположены касательные к интегральным кривым в точках, имеющих одну и ту же абсциссу?

Таблица 1. ***Таблица основных интегралов***

1. $\int 0 \cdot dx = c$;	2. $\int 1 \cdot dx = x + c$;	3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c \quad (x \neq 0)$;	5. $\int e^x dx = e^x + c$;	6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (0 < a \neq 1)$;	8. $\int \cos x dx = \sin x + c$;	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;	11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$;
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + k}\right\rvert + c$;	14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg + c$;	15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$;
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$ $(a \neq 0)$		

Индивидуальные задания

Пример 2.1

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение.

Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его. Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то интеграл можно записать в следующем виде:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Применяя свойство неопределенного интеграла, задаваемое равенством $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, получим:

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Получили два табличных интеграла. По формулам находим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

2.1.Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы

1. $\int \frac{dx}{16-x^4}$; 2. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$; 3. $\int \frac{-3x^4+3x^2-1}{x^2-1}dx$; 4. $\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{1-x^2}dx$;

5. $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}dx$; 6. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$; 7. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$; 8. $\int 2^x e^x dx$;

9. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 10. $\int \frac{3tg^2 x+4}{\sin^2 x}dx$; 11. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$;

12. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}dx$; 13. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$; 14. $\int 4x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$;

15. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; 16. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; 17. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$;

18. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right)dx$; 19. $\int \left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$;

20. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$; 21. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 22. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$;

23. $\int ctg^2 xdx$; 24. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; 25. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$

Пример 2.2

Вычислить интеграл $\int arctgxdx$.

<u>Решение</u>.

Положим $u = arctgx, dv = dx$.

Тогда $du = (arctgx)' dx = \frac{dx}{1+x^2}; \int dv = \int dx, v = x$

(здесь в качестве *v* можно взять любую из первообразных вида *x* + С, где С – произвольная постоянная. Взято *v* = *x*, т.е. С=0).

По формуле ($\int udv = uv - \int vdu$) имеем:

$$\int \underset{u}{arctgx}\,\underset{dv}{dx} = \underset{v}{x}\,\underset{u}{arctgx} - \int \underset{v}{x}\,\underset{du}{\overline{\frac{dx}{1+x^2}}} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

2.2. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы

1. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; 2. $\int e^{\sqrt{x}}dx$; 3. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 4. $\int \cos(\ln x)dx$;

5. $\int \ln\left(x^2+2\right)dx$; 6. $\int \ln^2 xdx$; 7. $\int \left(x^2+1\right)\cos xdx$; 8. $\int e^x \sin\frac{x}{2}dx$;

9. $\int e^{2x}\cos 3xdx$; 10. $\int e^x \sin xdx$; 11. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 12. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

13. $\int x^2 e^x dx$; 14. $\int x^2 \sin xdx$; 15. $\int x^2 \cos xdx$; 16. $\int (x+1)\cos 3xdx$;

17. $\int x\sin xdx$; 18. $\int x\cos xdx$; 19. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$; 20. $\int x^3 e^{-x}dx$;

21. $\int xe^{5x}dx$; 22. $\int xe^{-x}dx$; 23. $\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$;

24. $\int \left(4x^3+6x-7\right)\ln xdx$; 25. $\int \left(x^2+3x+2\right)\ln xdx$

Пример 2.3

Вычислить интеграл $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.

Решение.

Полагаем $t = e^x$, $x = \ln t$. Отсюда $dx = (\ln t)' dt = \frac{dt}{t}$.

Следовательно,

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t+1)}{(t+1)t} dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\ln(1+t) - \ln t + C$$

Возвращаясь к переменной *x*, окончательно получаем:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = 2\ln(1 + e^x) - x + C.$$

2.3. Применяя метод подстановки, вычислить интегралы

1. $\int \frac{dx}{2 - 3x}$; 2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$; 3. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$; 4. $\int \frac{5x - 6}{\sqrt{1 - 3x}} dx$;

5. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{\sqrt{x+1} - 1}} dx$; 6. $\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx$; 7. $\int \frac{\cos 3x}{3 + \sin 3x} dx$;

8. $\int \cos^3 x \sin x dx$; 9. $\int \sin^2 x \cos x dx$; 10. $\int e^{\cos x} \sin x dx$;

11. $\int e^{-x^3} x^2 dx$; 12. $\int e^{\sin x} \cos x dx$; 13. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; 14. $\int \frac{e^{arctgx}}{1 + x^2} dx$;

15. $\int e^{-tgx} \sec^2 x dx$; 16. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$; 17. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$; 18. $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$;

19. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$; 20. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 - 8} dx$; 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$; 22. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$;

23. $\int \frac{(arctgx)^{100}}{1 + x^2} dx$; 24. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$; 25. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
3.2. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
3.3. Формула Ньютона-Лейбница.
3.4. Основные свойства определенного интеграла.
3.5. Вычисления определенного интеграла.
 3.5.1. Формула Ньютона-Лейбница.
 3.5.2. Интегрирование подстановкой.
 3.5.3. Интегрирование по частям.
 3.5.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
3.6. Несобственные интегралы.
 3.6.1Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода).
 3.6.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода).
3.7. Приложения определенного интеграла
3.7.1. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
 3.7.1.1. Схемы применения определенного интеграла.
 3.7.1.2. Вычисление площадей плоских фигур.

3.7.1.3. Вычисление дуги плоской кривой.
3.7.1.4. Вычисление объемов тел.
3.7.1.5. Вычисление площади поверхности вращения.
3.7.1.6. Механические приложения определенного интеграла.
3.7.2. Приближенное вычисление определенного интеграла.
3.7.2.1. Формула прямоугольников.
3.7.2.2. Формула трапеций.
3.7.2.3. Формула парабол (Симпсона).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое определенный интеграл?
2. Как называются все элементы в записи $\int_a^b f(x)dx$?
3. От чего зависит приращение $F(b)-F(a)$?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
5. В чём заключается геометрический смысл определенного интеграла?
6. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю? Ответ обоснуйте.
7. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Индивидуальные задания

Пример 3.1

Вычислить интеграл $\int_a^b \sin xdx$.

Решение.

Так как одной из первообразных для функции $f(x)=\sin x$ является функция $F(x)=-\cos x$, то, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_a^b \sin xdx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

3.1. Вычислить интегралы

1. $\int_0^2 (3x^2-1)dx$; 2. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$; 3. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$; 6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$;

7. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 9. $\int_0^2 x(3-x)dx$;

10. $\int_0^{\pi} \sin 2xdx$; 11. $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin xdx$; 12. $\int_0^e \ln xdx$;

13. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 14. $\int_1^0 \ln^2 xdx$; 15. $\int_0^{\sqrt{3}} arctgxdx$;

16. $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$; 17. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$; 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$;

19. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;   20. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;   21. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$;

22. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;   23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; 24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$;

25. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

Пример 3.2

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x)=1-x^2$ и $y = 0$.

Решение.

Можно считать, что эта фигура ограничена осью Ox, графиком функции $f(x)=1-x^2$ и прямыми $x = -1$, $x=1$ (рис. 2).

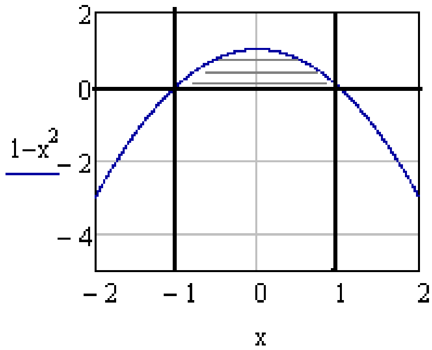

Рис. 2

Поэтому по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$ её площадь равна:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

3.2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

1. $y=4-x^2$, $y=0$;   2. $y^2=2\rho x$, $x=h$;   3. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$;

4. $y=x^2$, $y=2-x^2$;   5. $y=x^2$, $y=1$;   6. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$;

7. $y=|x|+1$, $y=0, x=-2, x=1$;   8. $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$;

9. $y=\arcsin 2x$, $x=0, y=-\frac{\pi}{2}$;   10. $y=\sin 2x$, $y=1, x=\frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

11. $x^2-y^2=1$, $x=2$;   12. $xy=4$, $x=4, y=4, x=0, y=0$;

13. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;   14. $y=\left|x^2-1\right|$, $y=0, x=-2, x=2$;

15. $y=x^2-2x+2$, $x=-1, x=2$ и отрезком $[-1,2]$ оси ox;

16. $y=-x^2+4$, $y=0$;   17. $y=\frac{1}{x}$, $y=0, x=1, x=3$;

18. $y=2\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$;   19. $x-y-1=0$, $x=-4, x=-2, y=0$;

20. $y=-x^2-1$, $x=1, x=4, x=0$;   21. $y=x^2-6x$, $x=0$;

22. $y=x^2$, $y=4, y=9, x=0$;   23. $y=x^2$, $y=2x$;

24. $y=\sin x$, $y=0$, если $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$;   25. $y=8+2x-x^2$, $y=x+6$

Пример 3.3

Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от x=0 до x=5.

Решение.

Данная кривая симметрична относительно оси Оx. Найдем длину верхней ветви кривой. Производная функции $y=x^{3/2}$ равна $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. По формуле длины дуги плоской кривой ($L=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$) получим:

$$L=\int\limits_0^5 \sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int\limits_0^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2} \Big|_0^5 =\frac{335}{27}.$$

3.3 Вычислить длину дуги кривой

1. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=4$;
2. $y=x^2-1$, отсеченной осью Оx;
3. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от $x=0$ до $x=a$;
4. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;
5. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$;
6. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$;
7. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ от $x=-1$ до $x=2$;
8. $y=x^2$ от $x=0$ до $x=2$;
9. $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$;
10. $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$;
11. $y=\left(\frac{2}{5}\right)x\sqrt[4]{x}-\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Оx.
12. $y=\frac{x^2}{2}$ от $x=0$ до $x=1$;
13. $y=1-\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;
14. $x=\frac{t^3}{3}-t$, $y=t^2+2$ от $t=0$ до $t=3$;
15. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t=o$ до $t=\ln\pi$;
16. $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$;
17. $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$;

18. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=4$;

19. $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от $x=0$ до $x=a$;

20. $y=\ln\cos x$ от $x=0$ до $x=\dfrac{\pi}{6}$;

21. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$;

22. $y^2=\dfrac{4}{9}(2-x)^3$ от $x=-1$ до $x=2$;

23. $y=x^2$ от $x=0$ до $x=2$;

24. $x=e^t\cdot\sin t$, $y=e^t\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$;

25. $y=\ln\sin x$ от $x=\dfrac{\pi}{3}$ до $x=\dfrac{\pi}{2}$

Пример3.4

Найти объём тела, образованного вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси О*x*.

Решение.

Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти половину искомого объёма. По формуле объёма тел вращения ($V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$) имеем:

$$\frac{1}{2}V=\pi\int\limits_0^a y^2(x)dx=\pi\int\limits_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int\limits_0^a dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int\limits_0^a x^2dx=$$

$$=\left(\pi b^2x-\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a=\pi b^2a-\frac{\pi b^2a^3}{3a^2}=\frac{2}{3}\pi ab^2.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}V=\dfrac{2}{3}\pi ab^2$, откуда $V=\dfrac{4}{3}\pi ab^2$. Если *a*=*b*=*R*, то эллипс является окружностью. Тогда объём тела вращения окружности вокруг оси О*x* есть шар, объём которого $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

3.5. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой

1. $y^2=2\rho x$, $x=h$ вокруг оси Ox;
2. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x\ge0$ вокруг оси Ox;
3. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x\ge0$ вокруг оси Oy;
4. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ вокруг оси Ox;
5. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг оси Ox;
6. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг оси Oy;
7. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг оси Ox;
8. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг оси Oy;
9. $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ вокруг оси Ox;
10. $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ вокруг оси Oy;

11. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $y=0$;

12. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $x=0$;

13. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $x=2$;

14. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $x=-2$;

15. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $y=-1$;

16. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $y=2$;

17. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $y=0$;
18. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $x=0$;
19. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $y=-1$;
20. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $x=1$;
21. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $x=-1$;
22. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $y=1$;
23. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$ вокруг прямой $y=0$;
24. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$ вокруг прямой $x=0$;
25. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$ вокруг прямой $x=2\pi$.

4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-ГО И 2-ГО РОДА

4.1. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода с бесконечными пределами и от неограниченных функций, определения, их основные свойства.

4.2. Условия сходимости несобственных интегралов и способы исследования сходимости.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение несобственного интеграла первого рода (интеграла, у которого один или оба предела интегрирования бесконечны), укажите его геометрический смысл.
2. при решении каких задач используются несобственные интегралы?
3. Приведите примеры сходящегося и расходящегося интегралов первого рода.
4. В каком смысле следует понимать распространение формулы Ньютона-Лейбница на случай несобственных интегралов с бесконечными пределами?
5. При каких значениях *к* сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$?
6. Дайте определение несобственного интеграла второго рода (интеграла от неограниченной функции).
7. Укажите геометрический смысл несобственного интеграла второго рода в случае, когда подынтегральная функция неотрицательна.
8. Приведите примеры сходящегося и расходящегося интегралов второго рода.
9. Как вычисляется интеграл от функции f(x), неограниченной в конечном числе точек отрезка [a; b].

Пример 4.

Исследовать на сходимость $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.
По определению имеем:
$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to-\infty}\int\limits_{R}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to-\infty} arctgx \Big|_{R}^{0}=\lim_{R\to-\infty}(arctg0-arctgR)=0-\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$
то есть интеграл сходится.

4. Исследовать на сходимость

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$; 2. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; 3. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$; 4. $\int\limits_{0}^{+\infty} arctgxdx$;

5. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1+\ln x}{x}dx$; 6. $\int_{0}^{+\infty}\sin xdx$; 7. $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$; 8. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^a}$;

9. $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 10. $\int\limits_{0}^{1}\ln xdx$; 11. $\int_{0}^{1}\ln^2 xdx$; 12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ctgxdx$;

13. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; 14. $\int_{0}^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}$; 15. $\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$;

17. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^a}$; 18. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin xdx$; 19. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$; 20. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

21. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln xdx}{x^2}$; 22. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x^4}$; 23. $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$; 24. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{x}$;

25. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

Методические рекомендации по написанию реферата

Написание реферата является

- одной из форм обучения студентов, направленной на организацию и повышение уровня самостоятельной работы студентов;
- одной из форм научной работы студентов, целью которой является расширение научного кругозора студентов, ознакомление с методологией научного поиска.

Реферат, как форма обучения студентов, - это краткий обзор максимального количества доступных публикаций по заданной теме, с элементами сопоставительного анализа данных материалов и с последующими выводами.

При проведении обзора должна проводиться и исследовательская работа, но объем ее ограничен, так как анализируются уже сделанные предыдущими исследователями выводы и в связи с небольшим объемом данной формы работы.

Преподаватель рекомендует литературу, которая может быть использована для написания реферата.

Целью написания рефератов является:

– привитие студентам навыков библиографического поиска необходимой литературы (на бумажных носителях, в электронном виде);

– привитие студентам навыков компактного изложения мнения авторов и своего суждения по выбранному вопросу в письменной форме, научно грамотным языком и в хорошем стиле;

– приобретение навыка грамотного оформления ссылок на используемые источники, правильного цитирования авторского текста;

– выявление и развитие у студента интереса к определенной научной и практической проблематике с тем, чтобы исследование ее в дальнейшем продолжалось в подготовке и написании курсовых и дипломной работы и дальнейших научных трудах.

Основные задачи студента при написании реферата:

- с максимальной полнотой использовать литературу по выбранной теме (как рекомендуемую, так и самостоятельно подобранную) для правильного понимания авторской позиции;

- верно (без искажения смысла) передать авторскую позицию в своей работе;

- уяснить для себя и изложить причины своего согласия (несогласия) с тем или иным автором по данной проблеме.

Требования к содержанию:

- материал, использованный в реферате, должен относится строго к выбранной теме;

- необходимо изложить основные аспекты проблемы не только грамотно, но и в соответствии с той или иной логикой (хронологической, тематической, событийной и др.)

- при изложении следует сгруппировать идеи разных авторов по общности точек зрения или по научным школам;

- реферат должен заканчиваться подведением итогов проведенной исследовательской работы: содержать краткий анализ-обоснование преимуществ той точки зрения по рассматриваемому вопросу, с которой Вы солидарны.

Примерные темы рефератов по дисциплине «Введение в математический анализ»

Геометрические приложения определенного интеграла:

1. Вычисление площади плоской фигуры
2. Вычисление длины дуги плоской кривой
3. Вычисление площади криволинейного сектора
4. Вычисление объемов
5. Вычисление площади поверхности вращения

Физические приложения определенного интеграла:

6. Вычисление пройденного пути
7. Вычисление работы с помощью определённого интеграла
8. Координаты центра тяжести
9. Статические моменты относительно координатных осей материальной кривой

Численное интегрирование:

10. Метод прямоугольников
11. Метод трапеций
12. Метод Симпсона
13. Метод Гаусса

Тесты по дисциплине «Введение в математический анализ»

<u>При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:</u>

а) готовясь к тестированию, проработайте информационный материал по дисциплине. Проконсультируйтесь с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

б) четко выясните все условия тестирования заранее. Вы должны знать, сколько тестов Вам будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т.д.

в) приступая к работе с тестами, внимательно и до конца прочтите вопрос и предлагаемые варианты ответов. Выберите правильные (их может быть несколько). На отдельном листке ответов выпишите цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;
г) в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант.
д) если Вы встретили чрезвычайно трудный для Вас вопрос, не тратьте много времени на него. Переходите к другим тестам. Вернитесь к трудному вопросу в конце.
е) обязательно оставьте время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Тесты берутся из пособия Рязанова Е.А., Шарипов Б.У. Тестовый контроль знаний по математическому анализу (Часть 2): учебное пособие по организации самостоятельной работы студентов по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль подготовки «Математическое образование» - Борисоглебск: ФГБОУ ВПО «Борисоглебский государственный педагогический институт», 2014. – 45 с., ил.

База заданий для подготовки к тестированию по дисциплине «Введение в математический анализ»

Раздел Введение в анализ

1. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{x-2}$:

A) $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$
B) $(-\infty;2)$
C) $(2;\infty)$
D) $(0;2)$
E) $(1;2)$

2. Найти область определения функции $y=\sqrt{-x}$:
A) $(-\infty;0]$
B) $[0,+\infty)$
C) $(-\infty,+\infty)$
D) $x\neq 0$
E) $(-1;0)$

3. Найти область определения функции $y=\sqrt{x^2+1}$:
A) $(-\infty;+\infty)$
B) $[-1;+\infty)$
C) $(-\infty;1]$
D) $[1;+\infty)$
E) $[-1;1]$

4. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{4-x^2}$:

A) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$
B) $x\neq 2$

C) $x \neq -2$
D) $(-2;2)$
E) $(-\infty;-2]$

5. Функция $y = f(x)$ называется четной, если:
A) $f(-x) = f(x)$
B) $f(-x) = -f(-x)$
C) $f(-x) = -f(x)$
D) $f(-x) = x^2 f(x)$
E) $f(x) = xf(-x)$

6. Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если:
A) $f(-x) = -f(x)$
B) $f(-x) = f(x)$
C) $f(-x) = -f(-x)$
D) $f(-x) = x^2 f(x)$
E) $f(x) = xf(-x)$

7. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$:

A) e^2
B) e^{-2}
C) 2
D) -2
E) 0

8. Чему равен второй замечательный предел:
A) e
B) 2
C) 1
D) 0
E) ∞

9. Вычислите предел $\mathop{Lim}\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1}{2x-1}$:

A) ∞
B) 0
C) 3
D) -3
E) $\frac{3}{2}$

10. Вычислите предел $\mathop{Lim}\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$:

A) 3
B) 8
C) 2

D) $\frac{2}{3}$
E) 0

11. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$:

A) 2
B) 4
C) 1
D) -2
E) 0

12. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-1}$:

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{2}{7}$
C) 7
D) $\frac{8}{5}$
E) 3

13. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{5-x^2}$:

A) -2
B) 2
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{1}{5}$
E) ∞

14. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$:

A) $0{,}5$
B) ∞
C) $2{,}25$
D) $0{,}2$
E) 1

15 Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 8x}{x}$

A) 8
B) 2
C) $\frac{1}{3}$
D) 0
E) ∞

16. Вычислите предел $\ell im_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$:

A) $e^{\frac{1}{3}}$
B) e
C) 2
D) $\frac{1}{3}$
E) e^3

17. Вычислите предел $\underset{x\to 0}{Lim}\ \sin 3xctg5x$:

A) $\frac{3}{5}$
B) 3
C) 15
D) 0
E) 5

18. Вычислите предел $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{3x}{\sin x}$:

A) 3
B) 0
C) 1
D) $\frac{1}{3}$
E) 1

19. Вычислите предел $\underset{x\to 1}{Lim}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$:

A) -1
B) $\frac{1}{2}$
C) 0
D) 2
E) 1

20. Вычислите предел $\underset{x\to 2}{Lim}\frac{8+2x-3x^2}{6+x+2x^2}$:

A) 0
B) $-\frac{3}{2}$
C) 4
D) $-\frac{10}{9}$
E) 1

21. Найти точки разрыва функции $y=\frac{9-x^2}{x^2-8x}$:

A) $x_1=8; x_2=0$

B) $x_1 = 2; x_2 = 0$

C) $x_1 = 3; x_2 = 4$

D) $x = 0$

E) $x_1 = 9; x_2 = 5$

22. Найти точки разрыва функции $y = \frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$:

A) $x_1 = -1; x_2 = 3$

B) $x_1 = 2; x_2 = 4$

C) $x_1 = 0; x_2 = 5$

D) $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -2$

E) $x_1 = 3; x_2 = 6$

23. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{2}{9-x^2}$:

A) $x_1 = -3; x_2 = 3$

B) $x = -3$

C) $x = 3$

D) $x = 0$

E) $x = 9$

24. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x-1}{x(x+1)}$:

A) $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

B) $x_1 = 4,\ x_2 = 3$

C) $x_1 = 6,\ x_2 = 7$

D) $x_1 = 5,\ x_2 = 3$

E) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

25. Найдите производную функции $y = 5\ln x - x^2$:

A) $\frac{5}{x} - 2x$

B) $\frac{x}{5} - x$

C) $-\frac{5}{x} + 2x$

D) $\frac{5}{x} + 2x$

E) $\frac{5}{x} - x$

26. Вычислить производную $y'(0)$ функции $y = tg3x$:

A) 3

B) -3

C) 0

D) . ∞
E) 1

27. Найти производную y' функции $y = x^3 + \cos 5x$:
A) $3x^2 - 5\sin 5x$
B) $3x^2 + 5\sin 5x$
C) $3x^2 + \sin 5x$
D) $\frac{x^4}{4} + 5\sin 5x$
E) $4 + 3x^2 + \sin 5x$

28. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $M(-2;-8)$ к кривой $y = x^3$:
A) 12
B) 11
C) 10
D) -10
E) 0

29. Найти производную функции $y = \sin^2 5x$:
A) $5\sin 10x$
B) $10\sin 5x$
C) $\cos 10x$
D) $5\cos 5x$
E) $\cos 5x$

30. Производная функции $y = (1-2x)^{10}$ равна:
A) $-20(1-2x)^9$
B) $20x^9$
C) $2(1-2x)^9$
D) $10(1-2x)^9$
E) $20(1-2x)^9$

31. Найдите производную функции $y = \frac{\sin x}{x}$:
A) $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
B) $\frac{x\cos x + \sin x}{x^2}$
C) $\frac{\cos x}{x^2}$
D) $\cos x$
E) $-\frac{\cos x}{x^2}$

32. Вычислить производную $f'(-1)$ функции $f(x) = \frac{1}{2x+3}$:

A) -2
B) 1
C) 2
D) -3
E) -1

33. Укажите формулу дифференциала функции $y = f(x)$:
A) $dy = f'(x)dx$
B) $dy = f'(x)$
C) $dy = f(x)dx$
D) $dy = \dfrac{1}{f'(x)}dx$
E) $dy = f^2(x)dx$

34. Найти дифференциал dy функции $y = \sin 2x$:
A) $dy = 2\cos 2xdx$
B) $dy = 2\cos 2x$
C) $dy = -2\sin 2xdx$
D) $dy = \sin 2xdx$
E) $dy = 2\sin 2xdx$

35. Найти дифференциал функции $y = \cos x$:
A) $-\sin xdx$
B) $\sin x$
C) $\sin x + c$
D) $\cos xdx$
E) $\sin xdx$

36. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t_0 \le t \le T$, найти производную y'_x :
A) $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$
B) $y'_x = \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}$
C) $y'_x = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$
D) $y'_x = \varphi'(t)\psi'(t)$
E) $y'_x = -\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

37. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме $x = t^2 + 1$, $y = 2t^3 - 5$ найти производную y'_x :
A) $y'_x = 3t$
B) $y'_x = \dfrac{1}{3t^2}$

C) $y'_x = 2t$
D) $y'_x = 6t^2$
E) $y'_x = -\frac{1}{3t^2}$

38. Написать уравнение касательной проведенной в точке $M(0;1)$ графика функции $y = e^{2x}$:
A) $y = 2x+1$
B) $y = x+1$
C) $y = 2x-2$
D) $y = x$
E) $y = -x+1$

39. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), то в интервале (a,b) найдется хотя бы одна точка c, в которой .
A) $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
B) $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$
C) $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$
D) $f(c) = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$
E) $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{c-a}$

40. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b), $f(a) = f(b)$ то в интервале (a,b) найдется хотя бы одна точка c, в которой :
A) $f'(c) = 0$
B) $f'(c) > 0$
C) $f'(c) < 0$
D) $f(c) = 0$
E) $f'(c) = c$

41. .Для функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$, применяя теорему Лагранжа, найти значение c:
A) $c = \frac{1}{4}$
B) $c = \frac{1}{2}$
C) $c = \frac{3}{4}$
D) $c = \frac{2}{3}$

E) $c=\frac{1}{3}$

42. Для функции $f(x)=x^3-x^2-x+1$ на отрезке $[-1;1]$ найти c, применяя теорему Ролля:

A) $c=-\frac{1}{3}$

B) $c=\frac{1}{2}$

C) $c=\frac{4}{5}$

D) $c=\frac{3}{4}$

E) $c=0$

43. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3}{\ln x}$:

A) 3
B) 7
C) -3
D) 0
E) -1

44. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$:

A) 0.5
B) -1
C) 1
D) ∞
E) 0

45. Найти производную второго порядка функции $y=x^3-3x^2+6$:

A) $3x^2-6x$
B) $3x+2$
C) $6x-3$
D) $6x-6$
E) $6x+6$

46. Найти производную n–го порядка функции $y=e^{mx}$:

A) $y^{(n)}=m^n e^{mx}$
B) $y^{(n)}=m^{-n}e^{mx}$
C) $y^{(n)}=m^{-n}e^{-mx}$
D) $y^{(n)}=e^n m^{mx}$
E) $y^{(n)}=e^n n^{mx}$

47. Найти производную n-го порядка от функции $y=\cos x$:

A) $y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

B) $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

C) $y^{(n)} = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

D) $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

E) $y^{(n)} = \cos(x + n\pi)$

48. Найти производную n-го порядка от функции $y = a^x$, где $0 < a \neq 1$:

A) $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$

B) $y^{(n)} = a^x (\ln a)^{n+1}$

C) $y^{(n)} = a^x (\ln a)^{n-1}$

D) $y^{(n)} = (a^x)^n \ln a$

E) $y^{(n)} = a^{nx} \ln a^n$

49. Найти критические точки функции $y = x^2 e^{-x}$:

A) $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

B) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

C) $x_1 = -2,\ x_2 = 0$

D) $x = 1$

E) $x_1 = -1,\ x_2 = 0$

50. Найти интервалы возрастания функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$:

A) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

B) $(-3,\ 1)$

C) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

D) $(1,\ 3)$

E) $(-1,\ 3)$

51. Найти интервал выпуклости (вверх) функции $y = x^3 - 3x$:

A) $(-\infty,\ 0)$

B) $(-\infty,\ \infty)$

C) $(6,\ \infty)$

D) $(-1,\ 1)$

E) $(0, +\infty)$

52. .Найти вертикальную асимптоту функции $y = \frac{x^2 + 6x}{x + 2}$:

A) $x = -2$

B) $x = 2$

C) $x = 6$

D) $x = -6$

E) $x = 0$

53. Укажите количество точек максимума функции $y = x^3 + 3x$:
A) 0
B) 1
C) 3
D) 4
E) 2

54. Найти точку перегиба $M(x_M, y_M)$ функции $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$:
A) $(1;4)$
B) $(1;24)$
C) $(1;-8)$
D) $(1;-1)$
E) Точек перегиба нет

55. Найти интервал убывания функции $y = x^3 - 3x$:
A) $(-1,1)$
B) $(-\infty, \infty)$
C) $(0,\infty)$
D) $(-\infty,-1) \cup (1;+\infty)$
E) $(-\infty,1)$

56. Те значение аргумента, при которых функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x) = 0$ или не существует, называются:
A) . Критическими точками функции
B) Точками перегиба графика функции
C) Точками разрыва графика функции
D) Точками максимума функции
E) Точками минимума функции

57. Как определяется k в наклонной асимптоте $y = kx + b$ функции $y = f(x)$:
A) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$
B) $k = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{x}$
C) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{f(x)}$
D) $k = \lim\limits_{x \to a} \frac{x}{f(x)}$
E) $k = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - x}{f(x)}$

58. Как называется точка, отделяющая выпуклые и вогнутые части графика функции:
A) Точка перегиба
B) Точка минимума
C) Точка максимума
D) Критическая точка

E) Точка разрыва

59. Как определяется b в наклонной асимптоте $y = kx + b$ функции $y = f(x)$:

A) $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$

B) $b = \lim\limits_{x \to \infty} kf(x)$

C) $b = \lim\limits_{x \to a} (f(x) - kx)$

D) $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + kx)$

E) $b = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$

60. Найдите дифференциал функции $y = \sin(3x - 1)$:

A) $3\cos(3x-1)dx$

B) $\sin(3x-1)dx$

C) $\dfrac{1}{3}\cos(3x-1)dx$

D) $3\cos(3x-1)$

E) $\sin(3x-1)dx$

61. Найти $f'(0)$ для функции $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{10}$:

A) 20

B) 10

C) 2^9

D) 2^{10}

E) 1

62. Вычислить производную функции $f(x) = 2^{x^2}$:

A) $2x2^{x^2}\ln 2$

B) $2^{x^2}\ln 2$

C) $2x2^{x^2}$

D) $2x^3 2^{x^2-1}$

E) $x^2 2^{x^2-1}$

63. Укажите множество, где функция $y = x^3 + 5x$ монотонно убывает:

A) пустое множество

B) $(-\infty, \infty)$

C) $(0, \infty)$

D) $(-1, 1)$

E) $(-\infty, 1)$

64. Найти экстремумы функций: $y = 2x^3 - 3x^2$

A) $y_{\max}(0) = 0,\ y_{\min}(1) = -1.$

B) $y_{\max}(1) = -1,\ y_{\min}(0) = 0.$

C) $y_{\max}(1) = 1,\ y_{\min}(0) = -1.$

D) $y_{\max}(0)=1,\ y_{\min}(1)=-2.$

E) $y_{\max}(-1)=0,\ y_{\min}(0)=-2.$

65. Найти наибольшее и наименьшее значение функций $y=x^4-2x^2+5$ на отрезке [-2 2]:

A) $13;4$

B) $13;-4$

C) $4;-12$

D) $1;-1$

E) $0;-1$

66. Найти интервалы выпуклости графиков функций $y=x^4-12x^3+48x^2-50$

A) $(1;5)$

B) $(-\infty;1)\cup(5+\infty)$

C) $(-2;2)$

D) $(-1;5)$

E) $(1;-5)$

67. Найти уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;f(x_0))$:

A) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

B) $y+f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

C) $y-f(x_0)=f'(x_0)(x+x_0)$

D) $y+f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$

E) $y-f(x_0)=f'(c)(c-x_0)$

68. Найти интервалы возрастания функции: $y=4x-x^2$

A) $(-\infty;2)$

B) $(0;4)$

C) $(0;\infty)$

D) $(-4;0)$

E) $(0;1)$

69. .Найти интервалы выпуклости графиков функций $y=x^3-12x^2$

A) $(-\infty;\ 4)$

B) $(-\infty;\ +\infty)$

C) $(0;\ 4)$

D) $(4;\ +\infty)$

E) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 4)$

70. Найти производную от функции: $f(x)=\sin^3(2x+5)$

A) $6\sin^2(2x+5)\cos(2x+5)$

B) $6\sin^2(2x+5)\cos x$

C) $6\sin^2(2x+5)$

D) $3\sin(2x+5)$
E) $3\sin^2(2x+5)$

71. Найти производную от функции $y = xtgx$

A) $tgx + \frac{x}{\cos^2 x}$

B) $\frac{1}{\cos^2 x}$

C) $tgx - \frac{x}{\cos^2 x}$

D) $1 + \frac{x}{\cos^2 x}$

E) $\frac{x}{\cos^2 x}$

72. Найти производную от функции $f(x) = e^{\cos^2 x}$

A) $-\sin 2xe^{\cos^2 x}$
B) $-\cos^2 xe^{\cos^2 x-1}$
C) $\sin 2xe^{\cos^2 x}$
D) $\cos^2 xe^{\cos^2 x-1}$
E) $e^{-\sin 2x}$

73. Найти производную от функции $f(x) = tge^x ctge^x$
A) 0
B) $e^x tge^x ctge^x$
C) $e^x tg^2 e^x$
D) $e^x ctg^2 e^x$
E) $e^x(\cos^{-2} x + \sin^{-2} x)$

74. Найти производную $f(x) = \cos x \sin x$
A) $\cos 2x$
B) $\frac{1}{2}\sin 2x$
C) $\frac{1}{2}\cos 2x$
D) $\sin x - \cos x$
E) $\sin 2x$

75. Найти производную от функции: $y = 2^{3-5x}$
A) $(-5\ln 2)\cdot 2^{3-5x}$
B) $10^{3-5x}\ln 2$
C) $(3-5x)2^{3-5x}$
D) 0
E) $2^{3-5x}\ln 2$

76 .Найти наклонную асимптоту функции $y=\frac{x^2+6x}{x+2}$

A) $y=x+4$
B) $y=4x+1$
C) $y=0$
D) $y=x$
E) $y=x+6$

77. Найти наклонную асимптоту функции $y=\frac{2x^2-1}{x}$

A) Не имеет наклонную асимптоту
B) $y=2x$
C) $y=2$
D) $x=0$
E) $y=-2x$

78. Найти максимум функции $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$

A) не имеет максимума
B) $y_{\max}=1$
C) $y_{\max}=0.5$
D) $y_{\max}=1.5$
E) $y_{\max}=0$

Разделы Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода

1. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется:
A) Неопределенным интегралом от функции $f(x)$
B) Определенным интегралом от функции $f(x)$
C) Несобственным интегралом от функции $f(x)$
D) Криволинейным интегралом от функции $f(x)$
E) Двойным интегралом от функции $f(x)$

2. Укажите свойство неопределенного интеграла:
A) $\int df(x)=f(x)+C$
B) $\int df(x)=f(x)$
C) $\int df(x)=F(x)+C$
D) $\int df(x)=F(x)$
E) $\int df(x)=C$

3. Укажите свойство неопределенного интеграла:
A) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$
B) $\left(\int f(x)dx\right)'=F(x)$

C) $\left(\int f(x)dx\right)' = C$

D) $\left(\int f(x)dx\right)' = F(x) + C$

E) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) + C$

4. Укажите формулу интегрирования заменой переменной в неопределенном интеграле:

A) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

B) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))tdt$

C) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))dt(\varphi(t))$

D) $\int f(x)dx = \int f(t)d\varphi(t)$

E) $\int f(x)dx = \int f(t)\varphi(t)dt$

5. Найдите интеграл $\int \frac{5}{(x+3)^3}dx$:

A) $-\frac{5}{2(x+3)^2} + C$

B) $-\frac{5}{(x+3)^2} + C$

C) $-\frac{2}{5(x+3)^2} + C$

D) $5\ln|x+3|^2 + C$

E) $5\ln|x+3| + C$

6. Найдите интеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$:

A) $\frac{\ln^3 x}{3} + C$

B) $\ln^3 x + C$

C) $\ln x + C$

D) $-\frac{2\ln x}{x^2} + C$

E) $2\ln x + C$

7. Найдите интеграл $\int \cos^3 x \sin x dx$:

A) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$

B) $\sin x + C$

C) $-3\cos^2 x + C$

D) $\frac{\cos^4 x}{4} + C$

E) $3\cos^2 x + C$

8. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$:

A) $\arcsin\frac{x}{4}+C$

B) $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x}{4}+C$

C) $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}+C$

D) $\ln\left|x+\sqrt{16-x^2}\right|+C$

E) $\arcsin\frac{x}{4}$

9. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4}$:

A) $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$

B) $\ln\left|x^2+4\right|+C$

C) $arctg\frac{x}{4}+C$

D) $arctg\frac{x^2}{4}+C$

E) $arctg\frac{x^2}{2}+C$

10. Какой метод применяется при нахождении интеграла $\int \arcsin x dx$:

A) Интегрирование по частям
B) Метод замены переменной
C) С помощью универсальной подстановки $t=tg\frac{x}{2}$
D) Непосредственное интегрирование
E) Метод подведения под знак дифференциала

11. Найдите интеграл $\int \sin 5x dx$:

A) $-\frac{1}{5}\cos 5x+C$
B) $5\cos 5x+C$
C) $\frac{1}{5}\cos 5x+C$
D) $-5\cos 5x+C$
E) $\cos 5x+C$

12. Найдите интеграл $\int x\cos x dx$:

A) $x\sin x+\cos x+C$
B) $x\sin x-\cos x+C$
C) $\sin x+C$
D) $\cos x+C$

E) $x\cos x+\sin x+C$

13. Найдите интеграл $\int \ln xdx$:

A) $x\ln x-x+C$
B) $\ln x+C$
C) $\dfrac{1}{x}+C$
D) $x\ln x-x$
E) $x+C$

14. Найдите интеграл $\int \dfrac{dx}{x+1}$:

A) $\ln|x+1|+C$
B) $\ln|x|+C$
C) $(x+1)^2+C$
D) x^2+x+C
E) $x+C$

15. Найдите интеграл $\int e^{3x+5}dx$:

A) $\dfrac{1}{3}e^{3x+5}+C$
B) $3e^{3x+5}+C$
C) $e^{3x+5}+C$
D) $\dfrac{1}{3}e^{x}+C$
E) $\dfrac{1}{3}e^{3x+5}$

16. Укажите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле:

A) $\int udv=uv-\int vdu$
B) $\int udv=uv+\int vdu$
C) $\int udv=uv+\int vdv$
D) $\int udv=\int vdu$
E) $\int udv=-uv+\int vdu$

17. Найдите интеграл $\int \left(x+\sin\dfrac{x}{2}\right)dx$:

A) $\dfrac{x^2}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}+C$
B) $\dfrac{x^2}{2}-\cos\dfrac{x}{2}+C$
C) $x^2+\cos\dfrac{x}{2}+C$
D) $\dfrac{x^2}{2}+2\cos\dfrac{x}{2}+C$

E) $2x+\cos x$

18. Найдите интеграл $\int \frac{x+1}{x}dx$:

A) $x+\ln|x|+C$

B) $\ln|x|+C$

C) $(x+1)^2+C$

D) $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C$

E) $x+C$

19. Найдите интеграл $\int \sin^2 xdx$:

A) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

B) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

C) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

D) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

E) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin x+C$

20. Найдите интеграл $\int \cos\frac{x}{4}dx$:

A) $4\sin\frac{x}{4}+C$

B) $\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}+C$

C) $\cos x+C$

D) $\sin\frac{x}{4}+C$

E) $\sin x+C$

21. Найдите интеграл $\int \sin 3x\sin xdx$:

A) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

B) $\frac{1}{4}\sin 3x-\sin 4x+C$

C) $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$

D) $4\sin 2x-8\sin 4x+C$

E) $4\sin 3x-\sin x+C$

22. Найдите интеграл $\int \sin 2x\cos 5xdx$:

A) $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$

B) $-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C$

C) $-14\cos 7x+6\cos 3x+C$

D) $-\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{6}\sin 3x+C$

E) $-2\cos 2x+5\sin 5x+C$

23. Найдите интеграл $\int \sin^2 x dx$:

A) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

B) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$

C) $\frac{1}{2}x-\sin 2x+C$

D) $x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

E) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

24. Найдите интеграл $\int \cos^2 x dx$:

A) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

B) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

C) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

D) $x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

E) $\frac{1}{2}x-\sin 2x+C$

25. С помощью универсальной подстановки $t=tg\frac{x}{2}$ найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$:

A) $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$

B) $\ln|\sin x|+C$

C) $\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$

D) $-\ln\left|ctg\,\frac{x}{2}\right|+C$

E) $\ln|t|+C$

26. Найдите интеграл $\int \sin^3 x dx$:

A) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

B) $3\cos^3 x+\cos x+C$

C) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

D) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\sin x+C$

E) $\frac{1}{3}\cos^3 x+\sin x+C$

27. Найдите интеграл $\int \frac{5dx}{x+\sqrt{2}}$:

A) $5\ln\left|x+\sqrt{2}\right|+C$

B) $5\ln|x|+C$

C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{2}\right|+C$

D) $\frac{1}{5}\ln\left|x+\sqrt{2}\right|+C$

E) $\ln\left|x+\sqrt{2}\right|+C$

28. Найдите интеграл $\int \frac{3dx}{2x+5}$:

A) $\frac{3}{2}\ln|2x+5|+C$

B) $6\ln|2x+5|+C$

C) $3\ln|2x+5|+C$

D) $\frac{1}{5}\ln\left|x+\sqrt{2}\right|+C$

E) $6(2x+5)^{-2}+C$

29. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$:

A) $-\frac{1}{2(x+2)^2}+C$

B) $\frac{1}{(x+2)^2}+C$

C) $\frac{(x+2)^2}{2}+C$

D) $-\frac{1}{(x+2)^2}+C$

E) $\frac{(x+2)4}{4}+C$

30. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{(3x+4)^2}$:

A) $-\frac{1}{3(3x+4)}+C$

B) $\frac{1}{3x+4}+C$

C) $-\frac{1}{3x+4}+C$

D) $-\frac{1}{(3x+4)^2}+C$

E) $\frac{(3x+4)^3}{9}+C$

31. Укажите простейшую дробь 3-го типа $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$, $\int \frac{3x+2}{x^2+4x-1}dx$, $\int \frac{dx}{(3x+7)^3}$, $\int \frac{x+4}{2x^2+3x-2}dx$:

A) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$

B) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x-1}dx$, $\int \frac{x+4}{2x^2+3x-2}dx$

C) $\int \frac{dx}{(3x+7)^3}$

D) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx$, $\int \frac{3x+2}{x^2+4x-1}dx$

E) простейшей дроби 3-го типа нет

32. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)}$:

A) $\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$

B) $\ln|(x+1)(x+1)|+C$

C) $\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$

D) $\ln|x+1|-2\ln|x+2|+C$

E) $\ln|x+1|-\ln|x+2|$

33. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{(x-2)(3-x)}$:

A) $\ln|x-2|+\ln|3-x|+C$

B) $\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$

C) $\ln|x-2|-\ln|3-x|+C$

D) $2\ln|x-2|\cdot 3\ln|3-x|+C$

E) $3\ln|x-2|+2\ln|3-x|+C$

34. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$:

A) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

B) $\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

C) $\ln\left|x-\sqrt{x^2+9}\right|+C$

D) $\ln\left|x+x^2+9\right|+C$

E) $\ln|x+3|+C$

35. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$:

A) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

B) $\ln\left|x+\sqrt{3-x^2}\right|+C$

C) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C$

D) $\ln\left|x-\sqrt{3-x^2}\right|+C$

E) $3\arccos\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

36. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}$:

A) $\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{\sqrt{4x^2-49}}{2}\right|+C$

B) $\arcsin\frac{2x}{7}+C$

C) $\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{4x^2-49}\right|+C$

D) $\frac{1}{2}\ln\left|x+4x^2-49\right|+C$

E) $\ln\left|x-\dfrac{\sqrt{4x^2-49}}{2}\right|+C$

37. Укажите формулу тригонометрии, которая используется при интегрировании произведений синусов и косинусов:

A) $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

B) $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

C) $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

D) $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

E) $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$

38. Укажите формулу тригонометрии , которая используется при вычислении интеграла $\int\sin^m x\cos^n xdx$, где m и n-четные неотрицательные числа:

A) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

B) $\sin^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2};\cos^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

C) $\sin x=\dfrac{1-\cos 2x}{2};\cos x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

D) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos x}{2};\cos^2 x=\dfrac{1+\cos x}{2}$

E) $\sin^2 x=\dfrac{1+\sin 2x}{2};\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

39. Рациональная дробь $P(x)=\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ где $R(x),Q(x)$ многочлены с действительными коэффициентами называется правильной, если:

A) . Степень числителя больше степени знаменателя
B) Степень числителя равна степени знаменателя
C) Степень числителя меньше степени знаменателя
D) Степень числителя равна двум
E) Степень числителя равна трем

40. Подынтегральная функция $\int\dfrac{2x-1}{(x-3)(x-4)}dx$ является..:

A) Рациональной функцией
B) Иррациональной функцией
C) Тригонометрической функцией
D) Монотонной функцией
E) Линейной функцией

41. Укажите формулу Ньютона-Лейбница, если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$:

A) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

B) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$

C) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$

D) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) + F(b)$

E) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) + F(b) + C$

42. Вычислите интеграл $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$:

A) 2
B) -2
C) 4
D) -4
E) 0

43. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$:

A) $\frac{1}{2}$
B) 2
C) -2
D) $-\frac{1}{2}$
E) 0

44. Вычислите интеграл $\int_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right)dx$:

A) $\frac{7}{3}$
B) $\frac{3}{7}$
C) $\frac{13}{3}$
D) 7
E) 0

45. Какое отношение верно:

A) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

B) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

C) $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

D) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

E) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) + F(b)$

46. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) $\sqrt{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

47. Вычислите интеграл $\int_0^1 xe^x dx$:

A) 1
B) -1
C) 0
D) $2e$
E) e

48. Укажите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле :

A) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b$

C) $\int_a^b udv = uv + \int_a^b vdu$

D) $\int_a^b udv = uv - \int_a^b vdu$

E) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$

49. Какой из интегралов представляет определенный интеграл $\int x\sin\ xdx;\ \int_0^{\infty} e^x dx;\ \int_1^2 x^2 dx;\ \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$:

A) $\int_1^2 x^2 dx$

B) $\int_0^{\infty} e^x dx;\ \int_1^2 x^2 dx;\ \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$

C) $\int x\sin\ xdx; \int_1^2 x^2 dx$

D) $\int_0^{\infty} e^x dx; \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$

E) $\int_0^{\infty} e^x dx;\ \int_1^2 x^2 dx$

50. Укажите формулу нахождения площади плоской фигуры:

A) $S = \int_a^b f(x)dx$

B) $S = \int_a^b f^2(x)dx$

C) $S = \int_a^b f'(x)dx$

D) $S = \int_a^b \sqrt{f(x)}dx$

E) $S = \int_a^b f'(x)dx + C$

51. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0,\ x = 2,\ y = x^2$ равна:

A) $S = \frac{8}{3}$

B) $S = \frac{2}{3}$

C) $S = 4$

D) $S = 8$

E) $S = 0$

52. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$:

A) $S = \frac{14}{3}$

B) $S = \frac{8}{3}$

C) $S = \frac{13}{3}$

D) $S=\frac{16}{3}$

E) $S=\frac{11}{3}$

53. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0,\ x=1,\ x=4,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, равна:

A) $S=2$
B) $S=-2$
C) $S=8$
D) $S=1$
E) $S=6$

54. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$:
A) $S=e-1$
B) $S=e+1$
C) $S=e$
D) $S=1-e$
E) $S=2e+1$

55. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi$:
A) $S=2$
B) $S=-2$
C) $S=\pi$
D) $S=2\pi$
E) $S=0$

56. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=2,\ x=1$:

A) $S=\ln 2$
B) $S=\frac{1}{2}$
C) $S=1$
D) $S=\ln\frac{1}{2}$
E) $S=2$

57. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^4, y=0, x=1, x=2$:

A) $S=6\frac{1}{5}$
B) $S=6\frac{3}{5}$
C) $S=32$
D) $S=15$
E) $S=1$

58. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2, y=2x$:

A) $S = 1\frac{1}{3}$

B) $S = \frac{2}{3}$

C) $S = 1\frac{2}{3}$

D) $S = 2$

E) $S = 1$

59. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $y = 0, x = 2$:

A) $S = 2\frac{2}{3}$

B) $S = 8$

C) $S = 1\frac{3}{3}$

D) $S = 2$

E) $S = 4$

60. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Oy и прямыми $y = 0,\quad y = 1$

A) $V_y = \frac{\pi}{2}$

B) $V_y = \frac{1}{2}$

C) $V_y = \pi$

D) $V_y = \frac{\pi}{5}$

E) $V_y = \frac{1}{5}$

61. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a,\quad x = b$ вычисляется по формуле:

A) $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

B) $V_x = \pi \int_b^a f(x)dx$

C) $V_x = \pi \int_a^b f\ \ (x)dx$

D) $V_x = \pi \int_b^a f^2(x)dx$

E) $V_x = \int_a^b f^2(x)dx$

Методические рекомендации по составлению глоссария

Составление глоссария – вид самостоятельной работы студента, выражающейся в подборе и систематизации терминов, непонятных слов и выражений, встречающихся при изучении темы.

Для составления глоссария по заданной теме нужно найти информацию с разных источников (сеть Internet, энциклопедии, практические пособия, учебная литература), изучить ее и составить в рукописном варианте или пользуясь текстовым процессором.

<u>Общие требования составления глоссария</u>

– Глоссарий состоит из слов, соответствующих тематике задания.

– Используемые слова должны быть именами существительными в именительном падеже единственного числа.

– Допускается использование иностранных слов, если они подходят теме.

– Не допускаются аббревиатуры, сокращения.

– Все тексты должны быть написаны разборчиво, желательно отпечатаны.

Пример глоссариев по дисциплине «Введение в математический анализ»

Глоссарий 1 Неопределенный интеграл

Понятие	Определение
Первообразной для функции f(x) на некотором множестве X	называется функция F(x), которая является дифференцируемой и для которой для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = F'(x) \cdot dx$
Неопределённым интегралом	называется множество всех первообразных для функции f (x)
Интегрируемой на [a, b]	называется функция, для которой на [a,b] существует первообразная, а значит, и неопределённый интеграл
Интегрированием	называется операция нахождения неопределённого интеграла
Свойство инвариантности	если F′(x) = f(x) , то $\int f(u)du = F(u) + C$, где u = ϕ(x) – произвольная функция, имеющая непрерывную производную
Непосредственное интегрирование	выполняется с помощью таблиц, преобразования подынтегральных выражений, свойств неопределенного интеграла
Метод поднесения под знак дифференциала	основывается на свойстве инвариантности неопределенного интеграла: если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$
Чтобы поднести под знак дифференциала функцию	нужно записать под знаком дифференциала ее первообразную
Метод замены переменной	заключается во введении новой переменной с целью получения табличного интеграла или интеграла, сводимого к табличным
Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен	выделением полного квадрата из квадратного трёхчлена и введением замены переменной $x + \frac{b}{2a} = t$ интегралы сводятся к табличным или к более простым

Метод интегрирования по частям	$\int udv = uv - \int vdu$
Циклическое интегрирование	применяя формулу интегрирования по частям достаточное число раз (но не менее двух), получают в правой части равенства интеграл, аналогичный интегралу в левой части равенства. Решая полученные уравнения относительно искомого, получают данный интеграл
Простейшие рациональные дроби I, II, III и IV типов	правильные рациональные дроби вида (I) $\frac{A}{(x-a)}$; (II) $\frac{A}{(x-a)^k}, (k \geq 2, k \in N)$ (III) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, (D = p^2 - 4q < 0)$ (IV) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, (k \geq 2, D = p^2 - 4q < 0$ где A, a, M, N, p, q – действительные числа
Алгоритм интегрирования рациональных дробей	1) если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, нужно отделить целую часть и правильную рациональную дробь; 2) в правильной рациональной дроби знаменатель нужно разложить на множители; 3) правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших рациональных дробей; 4) проинтегрировать целый многочлен и сумму простейших рациональных дробей
Интегрирование иррациональных функций	$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left|\frac{ax+b}{cx+d} = t^p\right|,$ $p = НОК\ (n_1, n_2, \dots, n_k)$
Дифференциальным биномом	называется выражение где $x^m(a+bx^n)^p$, m, n, p, – рациональные числа; a, b – действительные числа
Интегрирование дифференциальных биномов	выражаются через элементарные функции в следующих трёх случаях: 1. $p - целое\left(\left|a+bx^n = t\right|\right)$; 2. $\frac{m+1}{n} - целое\left(\left|\begin{array}{l}a+bx^n = t^q,\\ q - знаменатель(p)\end{array}\right|\right)$; 3. $\left(\frac{m+1}{n}+p\right) - целое\left(\left|\begin{array}{l}a+bx^n = t^q x^n,\\ q - знаменатель(p)\end{array}\right|\right)$
Интегрирование тригонометрических функций	всегда может быть выполнено с помощью универсальной тригонометрической подстановки

	$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \quad x=2\operatorname{arctg}t, \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt} \Rightarrow$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}$

Глоссарий 2

Раздел 1. Неопределенный интеграл

- **Первообразная функция от заданной функции f(x)** - функция F(x), производная которой равна f(x), или дифференциал которой равен f(x)dx, т.е. F′(x) = f(x) dF(x) = f(x)dx.
- **Неопределенный интеграл функции f(x)** - совокупность всех первообразных, т.е. выражение вида F(x) + C, где F(x) - первообразная функции f(x), C - постоянная величина: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Раздел 2. Определенный интеграл

- **Определенный интеграл функции f(x)** - число, равное площади криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y = f(x) (f(x) ≥ 0 на отрезке [a,b]), осью OX и прямыми x = a, x = b.
- **Основные свойства определенного интеграла:**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx;$$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если интервал интегрирования [a,b] разбит на части [a,c] и [c,b].

Раздел 3. Несобственный интегралы 1-го и 2-го рода

- **Несобственный интеграл по бесконечному промежутку интегрирования** - определенный интеграл, у которого хотя бы один из пределов бесконечен.
- **Несобственный интеграл сходится**, если существует конечный предел:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Готовиться к экзамену необходимо последовательно, с учетом контрольных вопросов, разработанных ведущим преподавателем кафедры. Сначала следует определить место каждого контрольного вопроса в соответствующем разделе темы учебной программы, а затем внимательно прочитать и осмыслить рекомендованные научные работы, соответствующие разделы рекомендованных учебников. При этом полезно делать хотя бы самые краткие выписки и заметки. Работу над темой можно считать завершенной, если вы сможете ответить на все контрольные вопросы и дать определение понятий по изучаемой теме.

Для обеспечения полноты ответа на контрольные вопросы и лучшего запоминания теоретического материала рекомендуется составлять план ответа на контрольный вопрос. Это позволит сэкономить время для подготовки непосредственно перед экзаменом за счет обращения не к литературе, а к своим записям.

При подготовке необходимо выявлять наиболее сложные вопросы, с тем, чтобы обсудить их с преподавателем на лекциях и консультациях.

Нельзя ограничивать подготовку к экзамену простым повторением изученного материала. Необходимо углубить и расширить ранее приобретенные знания за счет новых идей и положений.