МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Олимпиадная математика

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами аудиторных занятий по дисциплине являются лекционные занятия.

Для успешного освоения дисциплины желательно выполнять индивидуальные задания, готовить доклады и рефераты.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1	Цели и задачи математических олимпиад школьников	Цели и задачи математических олимпиад школьников. История Международного, Всесоюзного и регионального математических олимпиадных движений. Современное состояние олимпиадного движения (виды математических соревнований для школьников).
2	Проведение математической олимпиады; проверка, оценка заданий, выявление победителей. Некоторые рекомендации по подготовке учащихся к участию и олимпиадах.	Проведение математической олимпиады; проверка, оценка заданий, выявление победителей. Некоторые рекомендации по подготовке учащихся к участию и олимпиадах.
3	Задачи специфической тематики: логарифм, логарифмические уравнения и неравенства	Задачи специфической тематики: логарифм, логарифмические уравнение и неравенств
4	Задачи специфической тематики: тригонометрия, тригонометрические уравнения и неравенства	Задачи специфической тематики: тригонометрия, тригонометрические уравнение и неравенств
5	Задачи специфической тематики: показательные уравнение и неравенств	Задачи специфической тематики: показательные уравнение и неравенств
6	Система подготовки участников олимпиад	Математическая разминка, тренировочные олимпиады и другие математические состязания, обучающие занятия, сборы, слеты, летные школы участников олимпиад
7	Арифметика	Задачи с цифрами, целые числа (четность,

		делимость, сравнения по модулю, разложение на простые множители, китайская теорема об остатках), рациональные числа
8	Алгебра.	Тождества, метод математической индукции, уравнения и системы уравнений, неравенства (неравенства со средними), многочлены (теорема Безу).
9	Планиметрия	Треугольники, четырехугольники, окружности, геометрические места точек, задачи на повороты и симметрии, векторы, площадь фигур.
10	Стереометрия	Стереометрия
11	Задачи специфической тематики: логика и теория множеств	Задачи специфической тематики: логика и теория множеств
12	Задачи специфической тематики: комбинаторика	Задачи специфической тематики: комбинаторика
13	Задачи специфической тематики: вероятность и статистика	Задачи специфической тематики: вероятность и статистика

Задания к зачету по дисциплине «ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Задача 1. Какой цифрой оканчивается сумма $9^{2007} + 9^{2006}$?

Задача 2. В оранжерее было срезано 360 гвоздик. Причем красных на 80 больше, чем белых, а розовых на 160 штук меньше, чем красных. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из этого количества цветов ?
Сколько и каких цветов было в каждом букете?

Задача 3. Существует ли такой круг, чтобы его площадь и длина окружности выражались одним и тем же числом ?

Задача 4. После семи стирок измерения куска хозяйственного мыла, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, уменьшились в двое. На сколько еще стирок хватит оставшегося куска мыла ?

Задача 5. Какими двумя цифрами заканчивается число 13!?

Задача 6. Из 38 учащихся 28 посещают хор и 17 лыжную секцию. Сколько лыжников посещает хор, если в классе нет учащихся, которые не посещают хор или лыжную секцию?

Задача 7. *Решить уравнение:* $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^{x}$.

Задача 8. *Решить неравенство* $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}}<8^{\frac{x-3}{3x-7}}$.

Задача 9. *Решить неравенство* $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\le -1$.

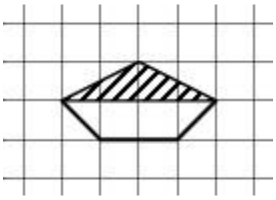
Задача 10. Решить уравнение: $6cos^2x+5sinx-7=0.$

Задача 11. *Решить уравнение* $1-\lg 5=\dfrac{1}{3}\left(\lg\dfrac{1}{2}+\lg x+\dfrac{1}{3}\lg 5\right)$..

Задача **12.** Расставьте знаки арифметических действий и скобки там, где считаете нужным, чтобы получилось верное равенство:
2 4 6 = 3 3 3

Задача **13.** Найти сумму всех трёхзначных чисел, произведение цифр которых равно 3.

Задача **14.** На клетчатой бумаге изображена чашка с крышкой (см. рис. 1). На покраску крышки израсходовали 30 г краски. Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки? Не забудьте обосновать ответ.



Задача 15. На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится пять раз в день с 7 до 19 часов». И, действительно, первый раз почтальон забирает почту в 7 утра, а последний – в 7 вечера. Через какие равные интервалы времени вынимаются письма из ящика?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Контрольные работа №1
Вариант 1

Решить уравнение:

1. $3sin^2 5x + 7\cos 5x - 3 = 0$;

$$2^{\sqrt{3x-1}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$$

2. Решить уравнение:

3. Сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39, результат будет меньше 857. Значит в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет: 1 + … + 40 = 820; 857 – 820 =37

4. Хорда удалена от центра окружности на расстояние **h**. В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписан квадрат так, что пара его соседних вершин лежит на хорде, а другая пара соседних вершин – на соответствующей дуге окружности.

Найдите разность длин сторон квадратов.

5. Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д.

Чему равен 2005-й член этой последовательности?

Вариант 2

1. Решить уравнение: $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

2. Решить уравнение: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$

3. Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

4. Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006, которые после зачеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.
5. Вычислить сумму $a^{2006} + 1/a^{2006}$, если $a^2 – a + 1 = 0$.

Вариант 3.

1.Решить уравнение: $2tg^2 3x - 3tg3x + 1 = 0$

2. Решить уравнение: $2^{2x+1} + 4^{x-1} + (\frac{1}{2})^{3-2x} = \frac{19}{32}$

3. Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?
4. Вычислить сумму $a^{2006} + 1/a^{2006}$, если $a^2 – a + 1 = 0$.
5. Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006, которые после зачеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

Вариант 4.

1.Решть уравнение: $2cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

2. Найти *x*: $2^{3x+2} + 8^x = 320$

3. На острове Невезения отменили понедельники: у них за воскресеньем сразу следует вторник. За последний год (то есть, с 15 декабря 2002 года по 14 декабря 2003 года) воскресенья на острове совпадали с нашими воскресеньями ровно восемь раз. Какой день недели на острове сегодня?
4. Решите уравнение (x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = 1320.
5.На плоскости дан отрезок АВ. Где может быть расположена точка С, чтобы ?АВС был остроугольным?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

1. На окраску кубика ушло 6г краски. Когда она высохла, кубик распилили на 8 одинаковых кубиков. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить неокрашенную часть их поверхности?
2. Одновременно навстречу друг другу выползли две черепахи. Скорость первой – 4м/мин, скорость второй – 6 м/мин. Вместе с первой черепахой выбежала собака, скорость которой 20м/мин. Встретив вторую черепаху, она повернула назад и побежала к первой, добежав до нее, снова повернула назад и так бегала до тех пор, пока черепахи не встретились. Сколько м пробежала собака, если черепахи проползли 100м?
3. Каждый день кот Леопольд прогуливался в городском парке. Однажды, 6 апреля кот Леопольд встретил на прогулке мышей – Серого и Белого. Леопольд забыл, когда у мышат Дни Рождения и решил спросить их об этом, чтобы вовремя подарить подарки. «Он был вчера» - ответил Серый мышонок. Белый же мышонок сказал: «Он будет завтра». На следующий день кот Леопольд опять спросил мышат об этом. «Он был вчера» - ответил Серый мышонок. «Он будет завтра» - сказал Белый. Кот Леопольд задумался над словами мышат. Он точно знал, что обманывать они могут только в день своего рождения, хоть и часто шутят над ним. Как же коту Леопольду узнать, когда дни рождения у мышат?

4. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает в остатке 6, а при делении на 9 остаток равен 8.

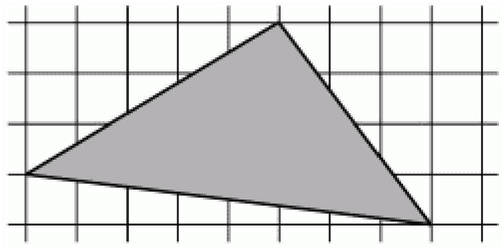
5. От полного стакана кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем я отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Затем я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком, долил стакан молоком доверху и выпил все до конца. Чего в итоге я выпил больше: молока или черного кофе?

6.Объём воды при замерзании увеличивается на 10%? На сколько процентов уменьшается объём льда при таянии?

7. Было взято 10 листов бумаги. Некоторые листы разрезали на 10 частей, затем некоторые из получившихся кусков вновь разрезали на 10 частей и т.д. На каком-то этапе подсчитали общее количество получившихся листов бумаги. Оказалось их всего 1386 листов бумаги. Правильно ли подсчитали количество листов?

8. В одном резервуаре 380 $м^3$ воды, а в другом - 1500 $м^3$. В первый резервуар каждый час поступает 80 $м^3$ воды, а из второго каждый час выкачивают 60 $м^3$. Через сколько часов воды в резервуарах станет поровну?

9. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке. Площадь одной клетки равна 1.



10.Как посадить 10 яблоней, чтобы нашлось 5 рядов, в каждом из которых ровно 4 яблони?

11. В четырехугольнике ABCD продолжения противоположных сторон AB и CD пересекаются под углом 20°; продолжения противоположных сторон BC и AD также пересекаются под углом 20°. Докажите, что два угла четырехугольника равны, а два других различаются на 40°.

12. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см, в результате чего его площадь увеличилась на 39 см2. Найдите периметр исходного прямоугольника.

13. В десятичной записи трех различных чисел используются только цифры 0 и 1. Может ли одно из этих чисел быть средним арифметическим двух других?

14. Однажды несколько друзей обменивались рукопожатиями. В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех из них имеется хотя бы один человек, который успел пожать руки трем другим. Доказать, что друзьям осталось сделать не более трех рукопожатий.

15. Имеется семь последовательных натуральных чисел. Сумма первых трех равна 39. Чему равна сумма последних трех?

16. Бабушка печет блины. К приходу ее внука из школы на тарелке лежат 19 блинов. Придя, внук тотчас же начинает их есть. Пока он ест 4 блины , бабушка подкладывает на тарелку 3 новых. Маленький обжора уходит, съев 24 блина. Сколько блинов осталось на тарелке?

17. У флориста (составителя букетов) имеются розы: 42 красные, 21 белые и 35 желтых. Какое наибольшее количество одинаковых букетов он может составить, если хочет использовать все имеющиеся розы?

18. На какую наибольшую степень числа 2 делится число 18 - 2

19. Марат шифрует трехзначные числа: вместо каждой цифры он пишет последнюю цифру ее квадрата (например, вместо 7 пишет 9, а вместо 2 пишет 4). Из скольких чисел после шифрования получится число 941 ?

20. На какую наибольшую степень числа 2015 делится число 2015!

21. Если a и b - корни уравнения x2 —x -2011 =0, то число 2 a2 + b2 -a- ab — 2011 равно

22. В ящике лежат цветные карандаши: 12 красных, 5 синих, 6 зеленых и 4 желтых. В темноте берем из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо был хотя бы один карандаш каждого цвета?

3. Из пункта А и Б одновременно навстречу друг другу вышли два мальчика, каждый со своей скоростью, и встретились через 1 час 25 минут. После этого они, не останавливаясь, пошли дальше и, дойдя до пунктов Б и А, повернули обратно. Сколько времени пройдет между первой их встречей и второй?

24. Сторож работает 3 дня, а на четвертый день отдыхает. Он отдыхал в воскресенье и начал работу в понедельник. Через сколько дней его отдых снова придется на воскресенье?

25. У Диего в саду растут мандарины и апельсины. В прошлом году с одного мандаринового дерева он собрал в среднем по 350 кг плодов, а с апельсинового - по 600 кг. В среднем он собрал по 400 кг плодов с одного дерева. Чему равен процент апельсиновых деревьев в саду у Диего?