МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ**
**(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
## Практикум по решению задач повышенной сложности по математике

**Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с учебной программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами аудиторных занятий по дисциплине являются практические занятия.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске.

Для успешного освоения дисциплины желательно выполнять индивидуальные задания, готовить доклады и рефераты.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой. Рекомендуется использовать источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

**Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины**

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины |
|---|---|---|
| 1 | Натуральные и целые числа. | Понятие натурального и целого числа. Арифметические операции над натуральными и целыми числами. Делимость. Признаки делимости. Основная теорема арифметики. НОК. НОД. Сравнимость по модулю. Приемы и методы решения задач с целочисленными величинами: разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления; метод анализа делимости нацело, использование признаков делимости; метод анализа остатков; метод анализа последней цифры; метод замены переменных; метод оценок. |
| 2 | Рациональные, иррациональные и действительные числа. | Понятие арифметической дроби. Арифметические операции над рациональными числами. Сравнение рациональных чисел. Решение уравнений в рациональных числах. Иррациональные и действительные числа. Сравнение действительных чисел. Целая, дробная части действительного числа и их свойства. |
| 3 | Степень действительного числа | Степень с натуральными и целыми показателями и их свойства. Арифметические и алгебраические корни n-ой степени. Степени с рациональными показателями. Степени с иррациональными показателями. |
| 4 | Числовые равенства и | Числовые равенства и неравенства и их свойства. |

| | | |
|---|---|---|
| | неравенства. Формулы сокращенного умножения. Известные алгебраические неравенства | Числовые пропорции. Формулы сокращенного умножения. Понятие факториала. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля.<br>Неравенство Коши. Неравенства Бернулли. Неравенство Коши-Буняковского. Задачи на доказательство различных алгебраических неравенств. |
| 5 | Алгебраические уравнения и неравенства | Уравнение. Тождество. Неравенство. Равносильность и следствие. Целые рациональные алгебраические уравнения. Универсальные приемы и методы решения уравнений и неравенств. |
| 6 | Системы уравнений и неравенств. | Основные методы решения систем. Системы алгебраических уравнений и неравенств. Неалгебраические системы уравнений и неравенств. |
| 7 | Задачи на составление уравнений и неравенств. Текстовые задачи. | Задачи на движение. Задачи на концентрацию и процентное содержание. Задачи на работу и производительность труда. Задачи на доли и проценты. Задачи с неполными данными, на оптимизацию. |
| 8 | Числовые последовательности. | Числовые последовательности. Общие понятия и свойства. Арифметическая и геометрическая прогрессии. |
| 9 | Элементы теории множеств и математической логики | Основные понятия теории множеств. Аксиомы. Определения. Теоремы. Леммы. Логическое следование. Необходимые и достаточные условия. Критерий. Признак. Свойство. Прямая, обратная, противоположная теоремы. Доказательство от противного. Метод математической индукции и его использование при доказательстве утверждений. |
| 10 | Функции и их графики | Основные понятия и определения. Способы задания функции. Основные свойства функции. Линейная функция. Обратная пропорциональность. Квадратичная функция. Степенная функция. Показательная, логарифмическая и тригонометрические функции. Их свойства и графики. Задачи повышенной сложности на исследование функций и построение графиков. |
| 11 | Тригонометрия. Тригонометрические уравнения и неравенства | Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Тригонометрические уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции |
| 12 | Показательные и логарифмические уравнения и неравенства | Методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств повышенной сложности. Задания С3 Единого государственного экзамена. |
| 13 | Планиметрия | Аксиомы и определения. Основные геометрические объемы и их свойства. Вписанные и описанные многоугольники. Подобие фигур на плоскости Геометрические построения на плоскости |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | Стереометрия | Аксиомы и определения стереометрии. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей. Площади поверхностей и объемов многогранников. Тела вращения. Площади поверхностей и объемов тел вращений. |

**Вопросы к зачету по дисциплине Практикум по решению задач повышенной сложности по математике**

1. Понятие натурального и целого числа. Арифметические операции над натуральными и целыми числами.
2. Делимость. Признаки делимости.
3. Основная теорема арифметики. НОК. НОД. Сравнимость по модулю.
4. Приемы и методы решения задач с целочисленными величинами: разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления; метод анализа делимости нацело, использование признаков делимости; метод анализа остатков; метод анализа последней цифры; метод замены переменных; метод оценок.
5. Понятие арифметической дроби. Арифметические операции над рациональными числами. Сравнение рациональных чисел.
6. Решение уравнений в рациональных числах. Иррациональные и действительные числа. Сравнение действительных чисел. Целая, дробная части действительного числа и их свойства.
7. Степень с натуральными и целыми показателями и их свойства. Арифметические и алгебраические корни n-ой степени. Степени с рациональными показателями. Степени с иррациональными показателями.
8. Числовые равенства и неравенства и их свойства. Числовые пропорции. Формулы сокращенного умножения. Понятие факториала. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля.
9. Неравенство Коши. Неравенства Бернулли. Неравенство Коши-Буняковского. Задачи на доказательство различных алгебраических неравенств.
10. Уравнение. Тождество. Неравенство. Равносильность и следствие. Целые рациональные алгебраические уравнения. Универсальные приемы и методы решения уравнений и неравенств.
11. Основные методы решения систем. Системы алгебраических уравнений и неравенств. Неалгебраические системы уравнений и неравенств.
12. Задачи на движение. Задачи на концентрацию и процентное содержание. Задачи на работу и производительность труда. Задачи на доли и проценты. Задачи с неполными данными, на оптимизацию.
13. Числовые последовательности. Общие понятия и свойства. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
14. Основные понятия теории множеств. Аксиомы. Определения. Теоремы. Леммы. Логическое следование. Необходимые и достаточные условия. Критерий. Признак. Свойство. Прямая, обратная, противоположная теоремы. Доказательство от противного. Метод математической индукции и его использование при доказательстве утверждений.
15. Основные понятия и определения. Способы задания функции. Основные свойства функции. Линейная функция. Обратная пропорциональность.
16. Квадратичная функция. Степенная функция. Показательная, логарифмическая и тригонометрические функции. Их свойства и графики. Задачи повышенной сложности на исследование функций и построение графиков.
17. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Тригонометрические уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

18. Методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств повышенной сложности. Задания С3 Единого государственного экзамена.

19. Аксиомы и определения. Основные геометрические объемы и их свойства. Вписанные и описанные многоугольники. Подобие фигур на плоскости Геометрические построения на плоскости

20. Аксиомы и определения стереометрии. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей. Площади поверхностей и объемов многогранников. Тела вращения. Площади поверхностей и объемов тел вращений.

**Индивидуальные задания по дисциплине «Практикум по решению задач повышенной сложности по математике»**

Тождественное преобразование алгебраических выражений

1. Упростить выражение:

$$\frac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}.$$

2. Упростить выражение:

$$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$$

3. Упростить выражение:

$$\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$$

Тождественное преобразование тригонометрических выражений (типовые примеры)

1. Доказать тождество:

$$\frac{\cos 4x\cdot\operatorname{tg}2x-\sin 4x}{\cos 4x\cdot\operatorname{ctg}2x+\sin 4x}=-\operatorname{tg}^2 2x.$$

2. Доказать тождество:

$$4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha.$$

3. Преобразовать в произведение: $2\cos^2 2\alpha+3\cos 4\alpha-3$ .

Прогрессии

1. Найдите целое положительное число n из уравнения

$$(3+6+9+\ldots+3(n-1))+\left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2}\right)=137$$

2. Пусть $a_1,a_2,\ldots a_n$ – последовательные члены геометрической прогрессии, $S_n$ - сумма её n первых членов. Доказать, что

$$S_n=a_1a_2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_n}\right)$$

3. Решить уравнение: $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$ , где x – целое положительное число.

Алгебраические уравнения

1. Решить уравнение: $(x^2-6x)^2-2\cdot(x-3)^2=81$ .

2. Решить уравнение: $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1$ .

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases}(x+y)^2+2x=35-2y,\\(x-y)^2-2y=3-2x\end{cases}$ .

Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения

**1.** Упростить выражение:

$$\left(x^{1+\frac{1}{2\cdot\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\cdot\log_{x^2}2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Решить уравнение: $x^{2\cdot\lg^2 x}=10\cdot x^3$ .

3. Решить систему уравнений:

$$y^{5x^2-51x+10}=1$$

$$xy=15$$

Тригонометрические уравнения

1. Решить уравнение: $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

2. Решить уравнение:

$$\mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cdot\cos x$$

3. Решить уравнение: $4\cdot(\sin x\cdot\cos^5 x+\cos x\cdot\sin^5 x)+\sin^3 2x=1$

Неравенства

1. При каких значениях а квадратных трехчлен $ax^2 - 7x + 4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных значений х?

2. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$ .

3. Решить неравенство:

$$\frac{\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)}{\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)}>\frac{1}{2}$$

.

Задачи по геометрии с применением тригонометрии

1. Основания равнобедренной трапеции равны a и b ( a > b), угол при большем основании равен α. Найти радиус окружности, описанной около трапеции.

2.Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно k. Найти углы ромба и допустимые значения k.

3.Угол между высотой и образующей конуса равен α. В конус вписана правильная треугольная призма; нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Боковые грани призмы – квадраты. Найти отношение боковых поверхностей призмы и конуса.

Последовательности и прогрессии

1. В строку подряд написано 1000 чисел. Под каждым числом a первой строки напишем число, указывающее, сколько раз число a встречается в первой строке. Из полученной таким образом второй строки аналогично получаем третью: под каждым числом второй строки пишем, сколько раз оно встречается во второй строке. Затем из третьей строки так же получаем четвёртую, из четвёртой — пятую, и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Докажите, что 11-я строка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строка не совпадает с 11-й.

2. Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4,… выделить арифметическую прогрессию

а) длиной 4

б) длиной 5

в) длиной k, где k — любое натуральное число?

3. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006 , но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k. При каком наименьшем k такое возможно?

4. Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 21991 после нескольких переходов станет однозначным.

5. Дан прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.

а) Могут ли стороны данного треугольника быть членами одной возрастающей геометрической прогрессии?

б) Докажите, что для любого натурального n большего 1, можно найти такие три числа, которые будут являться сторонами этого треугольника и членами одной арифметической прогрессии с разностью n.

Задачи на движение

1. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

2. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч. 11 11

3. Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

4. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

5. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

6. Два велосипедиста одновременно отправились в 143-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 2 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

7. Моторная лодка прошла против течения реки 195 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 14 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

8. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 308 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 44 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

9. От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 182 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

10. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 30 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час 20 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

11. Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Задачи на смеси и сплавы

1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй - 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго сплава?

2. В сосуд, содержащий 180 г 70%-го водного раствора уксуса добавили 320 г воды. Найдите концентрацию уксусной кислоты в получившемся растворе.

3. Имеются два сплава, состоящие из золота и меди. В первом сплаве отношение масс золота и меди равно 8:3, а во втором - 12:5. Сколько килограммов золота и меди содержится в сплаве, приготовленном из 121 кг первого сплава и 255 кг второго сплава?

4. Смешали 10%-й раствор серной кислоты с 30%-м раствором той же кислоты. В результате получили 600 г 15%-го раствора серной кислоты. Сколько взяли того и другого раствора?

5. Смешав 40% и 15% растворы кислоты, добавили 3 кг чистой воды и получили 20% раствор кислоты. Если бы вместо 3 кг воды добавили 3 кг 80% раствора той же кислоты, то получили бы 50%-ый раствор кислоты. Сколько килограммов 40% -го и 15% растворов кислоты было смешано?

6. Сколько нужно добавить воды в сосуд, содержащий 150 г 70% -го раствора уксусной кислоты, чтобы получить 6 % раствор уксусной кислоты? 12 12

7. К 12 кг сплава меди и олова добавили 8 кг другого сплава, содержащего те же металлы в обратной пропорции, получив в итоге сплав, содержащий 55% меди. Сколько процентов меди было в каждом из исходных сплавов?

8. Раствор соли массой 40 кг разлили в два сосуда так, что во 2-ом сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в 1-ом. Если бы во 2-ой сосуд добавили ещѐ 1 кг соли, то количество соли в нѐм стало бы вдвое больше, чем в 1-ом сосуде. Сколько раствора было в 1-ом сосуде?

9. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке 2,5 раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Определить, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

10. Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый 40% и второй 60%. Эти растворы смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-ый раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получили бы 70%-ый раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го растворов?

Задачи на работу

1. Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

2. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

3. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

4. На изготовление 16 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 40 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

5. Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 378 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

6. Заказ на 153 детали первый рабочий выполняет на 8 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 8 деталей больше?

7. На изготовление 459 деталей первый рабочий затрачивает на 10 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 567 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

8. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 15 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

9. Десять работников должны были выполнить работу за 8 дней. Когда они проработали 2 дня, то оказалось, что закончить работу необходимо уже через 3 дня. Сколько еще нужно взять работников, если известно, что производительность труда у работников одинаковая?

10. Студенческая бригада подрядилась выложить плиткой пол площадью 210 м 2 . Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 1,5 м 2 больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 9 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 6 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если одной коробки хватает на 1,3 м 2 , а для замены некачественных плиток понадобится 2 коробки?

<u>Задачи на проценты и сложные проценты</u>

1. В 2008 году в городском квартале проживало 20000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 9%, а в 2010 году — на 4% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

2. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 36% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

3. Восемь рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов двенадцать рубашек дороже куртки?

4. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 108%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

5. Дима, Артем, Гриша и Игорь учредили компанию с уставным капиталом 150000 рублей. Дима внес 24% уставного капитала, Артем — 60000 рублей, Гриша — 0,22 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Игорь. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 600000 рублей причитается Игорю? Ответ дайте в рублях.

6. Акционерное общество «МММ-лимитед» объявило котировку своих акций на ближайшие 3 месяца с приростом в процентах последовательно по месяцам на 243 %,

412 % и 629 % по отношению к каждому предыдущему месяцу. Каков средний ежемесячный рост котировок акций за указанный период?

7. Себестоимость изделия понизилась за 1 полугодие на 10 %, а за второе – на 20 %. Определить первоначальную себестоимость изделия, если новая себестоимость стала 576 руб.

8. Пусть вкладчик положил на счет в банке 25000р. и в течение 3-х лет не будет снимать деньги со счета. Подсчитаем, сколько денег будет на счете вкладчика через 3 года, если банк выплачивает 30% в год, и проценты после каждого начисления присоединяются к начальной сумме 25000р., т.е. капитализируются.

9. Зарплата служащему составляла 20000р. Затем зарплату повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Сколько стал получать служащий?

10. На товар снизили цену сначала на 20%, а затем еще на 15%. При этом он стал стоить 23,8 тыс.р. Какова была первоначальная цена товара?

11. Завод увеличивал объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за 2 года объем выпускаемой продукции увеличивался на 21%.

12. Цену товара первоначально понизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 30% и, наконец, после пересчета произвели снижение на 50%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Планиметрия

1. В окружность вписан четырехугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Известно, что AD = 8, AB = 4, угол CDB равен 60 градусов. а) Докажите, что EM — медиана треугольника CED. б) Найдите длину EM

2. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. а) Доказать, что площади треугольников ABC и ABF равны. б) Найти отношение AE: EC, если AB = 5 и BC = 9.

3. Точки A, B, C лежат на окружности радиуса 2 с центром O, а точка K — на прямой, касающейся этой окружности в точке B, причем угол AKC равен 46°, а длины отрезков AK, BK, CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). а) Докажите, что углы ACK и AOK равны. б) Найдите расстояние между точками A и C.

4. В четырехугольнике ABCD, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что CD : BC = 3 : 2. а) Доказать, что расстояния от точки E до прямых AD и BC равны. б) Найти отношение площадей треугольников ADE и BCE.

5. В трапеции ABCD с боковыми сторонами AB = 8 и CD = 5 биссектриса угла B пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла D пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка L лежит на основании BC. а) Докажите, что прямая MK проходит через середину стороны AB. б) Найти отношение KL : MN, если LM : KN = 4 : 7.

6. В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причем Величина угла ABM равна 60 градусам, BM = 8. а) Найдите величину угла BAC; б) Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

7. Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции ABCD, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L

соответственно. а) Докажите, что MK = NL. б) Найдите MN, если известно, что BC = 3, AD = 8 и MK : KL = 1 : 3.

8. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что AB = 5, AC = 4. Точка O — центр окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно. а) Докажите, что б) Найдите длину отрезка CE.

9. Через вершины B и C треугольника ABC проходит окружность, пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках K и M. а) Доказать, что треугольники ABC и AMK подобны. б) Найти MK и AM, если AB = 2, BC = 4, CA = 5, AK = 1.

10. В выпуклом четырехугольнике KLMN точки A, B, C, D — середины сторон KL, LM, MN, NK соответственно. Известно, что KL = 3. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Площади четырехугольников KAOD, LAOB и NDOC равны соответственно 6, 6 и 9. а) Докажите, что площади четырехугольников MCOB и NDOC равны. б) Найдите длину отрезка MN.

<u>Стереометрия</u>

1. Плоскость, проведенная через центр шара, вписанного в конус, параллельна плоскости основания конуса, делит объем конуса пополам. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

2. В треугольной пирамиде SABC все ребра равны друг другу. На ребре SA взята точка M такая, что SM = MA, на ребре SB — точка N такая, что SN : SB = 1 : 3. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды SABC.

3. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

5. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды

6. Правильную четырехугольную пирамиду пересекает плоскость, проходящая через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру. Площадь получившегося сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение длины высоты пирамиды к длине бокового ребра

**Контрольная работа по дисциплине «Практикум по решению задач повышенной сложности по математике»**

**Вариант 1**

1. Решить уравнение:
$3sin^2 5x + 7\cos 5x - 3 = 0$;

2. Решить уравнение: $2^{\sqrt{3x-1}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

3. Сколько мест могло быть в первом ряду. Во-первых, их не больше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 41 равна 861. Во-вторых, их не меньше 40, так как сумма натуральных чисел от 1 до 39 равна 780, и даже после прибавления к ней 39,

результат будет меньше 857. Значит в первом ряду ровно 40 мест. Теперь несложно определить, на какое место был продан лишний билет: 1 + … + 40 = 820; 857 – 820 =37
4. Хорда удалена от центра окружности на расстояние *h*. В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписан квадрат так, что пара его соседних вершин лежит на хорде, а другая пара соседних вершин – на соответствующей дуге окружности.
Найдите разность длин сторон квадратов.
5. Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д.
Чему равен 2005-й член этой последовательности?

**Вариант 2**

1. Решить уравнение: $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$
2. Решить уравнение: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$
3. Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?
4. Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006, которые после зачеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.
5. Вычислить сумму $a^{2006} + 1/a^{2006}$, если $a^2 - a + 1 = 0$.

**Вариант 3**

1.Решить уравнение: $2tg^2 3x - 3tg3x + 1 = 0$
2. Решить уравнение: $2^{2x+1} + 4^{x-1} + (\frac{1}{2})^{3-2x} = \frac{19}{32}$
3. Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?
4. Вычислить сумму $a^{2006} + 1/a^{2006}$, если $a^2 - a + 1 = 0$.
5. Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006, которые после зачеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

**Вариант 4**

1.Решть уравнение: $2cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$
2. Найти *x*: $2^{3x+2} + 8^x = 320$
3. На острове Невезения отменили понедельники: у них за воскресеньем сразу следует вторник. За последний год (то есть, с 15 декабря 2002 года по 14 декабря 2003 года) воскресенья на острове совпадали с нашими воскресеньями ровно восемь раз. Какой день недели на острове сегодня?
4. Решите уравнение (x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = 1320.
5.На плоскости дан отрезок АВ. Где может быть расположена точка С, чтобы АВС был остроугольным?

**Темы рефератов по дисциплине Практикум по решению задач повышенной сложности по математике**

1. Делимость. Признаки делимости.
2. Приемы и методы решения задач с целочисленными величинами: разложение целого числа в сумму по степеням основания системы счисления; метод анализа делимости нацело, использование признаков делимости; метод анализа остатков; метод анализа последней цифры; метод замены переменных; метод оценок.
3. Иррациональные и действительные числа.
4. Степень с натуральными и целыми показателями и их свойства.
5. Числовые равенства и неравенства и их свойства.
6. Понятие факториала.
7. Бином Ньютона. Биномиальные коэффициенты.
8. Треугольник Паскаля.
9. Неравенство Коши.
10. Неравенства Бернулли.
11. Неравенство Коши-Буняковского
12. Универсальные приемы и методы решения уравнений и неравенств.
13. Основные методы решения систем.
14. Задачи на движение.
15. Задачи на концентрацию и процентное содержание.
16. Задачи на работу и производительность труда.
17. Задачи на доли и проценты.
18. Числовые последовательности.
19. Метод математической индукции и его использование при доказательстве утверждений.
20. Квадратичная функция.
21. Степенная функция.
22. Показательная, логарифмическая и тригонометрические функции.
23. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.
24. Основные геометрические объемы и их свойства.
25. Площади поверхностей и объемов многогранников.
26. Тела вращения. Площади поверхностей и объемов тел вращений.

Общие требования, предъявляемые к реферату

- реферат должен представлять собой самостоятельную разработку проблемы по изучаемой дисциплине
- основой реферата должны служить современные публикации, материалы по соответствующей теме
- план и материалы реферата должны раскрывать выбранную тему
- содержание раскрываемых вопросов должно сопровождаться ссылками на источники, использованные автором, и в конце работы прилагается список этих источников

Основные этапы подготовки реферата

- выбор темы
- консультации руководителя
- подготовка плана реферата
- работа с источниками, сбор материала
- написание текста реферата
- оформление и предоставление ее руководителю

Требования к оформлению: объём реферата должен составлять 15- 20 страниц печатного текста, формат А4, при 14 шрифте и 1,5 межстрочном интервале на страницах указываются номера. Поля страницы: левое 3 см, верхнее и нижнее по 2 см, правое 1,5 см. Все формулы должны быть набраны в редакторе формул.

Реферат примерно должен иметь следующую структуру:

1. Введение излагается на 2-3 страницах. Содержит актуальности выбранной темы, определение цели и задач работы.
2. Основная часть имеет 2-3 пункта, примерно равных по объёму. В них раскрывается тема, при соблюдении логики в переходе от одного вопроса к другому и чёткости завершающих их выводов.
3. Заключение занимает 1-2 страницы и содержит основные обобщённые выводы по всему реферату.

Список литературы составляется в алфавитном порядке и должен включать не менее 5-6 наименований.