


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ  
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
естественнонаучных и  
общеобразовательных дисциплин

 С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
Б1.В.ДВ.04.01. Линейная алгебра**

**1. Код и наименование направления подготовки:**

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

**2. Профили подготовки:**

Математика. Информатика и информационные технологии в образовании

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная, заочная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** естественнонаучных и  
общеобразовательных дисциплин

**6. Составитель программы:** Л.В. Лободина, кандидат педагогических наук, доцент

**7. Рекомендована:** научно-методическим советом Филиала (протокол № 1 от  
31.08.2018 г.)

**8. Учебный год:** 2017-2018, 2018-2019    **Семестры:** 2 (офо) / 3 (зфо)

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

**Целью учебной дисциплины «Линейная алгебра»** является формирование системы фундаментальных знаний в области линейной алгебры, представлений о свойствах линейных пространств.

### Задачи учебной дисциплины:

- ознакомление студентов с теоретическими основами курса линейной алгебры;
- формирование навыков вычисления определителей, решения систем линейных уравнений;
- отработка навыков использования алгебраических методов в практической деятельности учителя математики;
- формирование математической культуры будущего учителя.

При проведении учебных занятий по дисциплине обеспечивается развитие у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Линейная алгебра» входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является дисциплиной по выбору вариативной части образовательной программы. Для изучения дисциплины требуется освоение курсов «Математика» и «Введение в математический анализ». Дисциплина является предшествующей для курсов «Математический анализ», «Алгебра и теория чисел», «Геометрия», «Общая и экспериментальная физика» и др.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	<p><b>знает (имеет представление):</b> связь теоретических основ и технологических приёмов линейной алгебры (<i>понятия матрицы, определителя, линейной зависимости, независимости и базиса системы векторов, векторного пространства, системы линейных уравнений, линейного оператора; методы вычисления определителей, решения СЛУ, нахождения собственных значений линейного оператора</i>) с содержанием преподаваемых учебных предметов.</p> <p>связь теоретических основ и технологических приёмов линейной алгебры с содержанием преподаваемых учебных предметов;</p> <p><b>умеет:</b></p> <p>ставить познавательные цели учебной деятельности;</p> <p>осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений;</p> <p>применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения линейной алгебры;</p> <p>применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе реализации образовательных программ образовательной области «Математика и информатика»;</p> <p>осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов (<i>применять основные методы линейной алгебры к решению задач школьного курса математики</i>);</p> <p><b>владеет (имеет навыки):</b></p> <p>исследовательской и проектной деятельности;</p> <p>общепользовательской ИКТ-компетентности;</p> <p>общепедагогической ИКТ-компетентности;</p> <p>предметно-педагогической ИКТ-компетентности.</p>

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 4/144.

Форма промежуточной аттестации экзамен.

### 13. Виды учебной работы

#### Очная форма обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		2 сем.
Контактная работа, в том числе:	72	72
лекции	36	36
практические занятия	36	36
Самостоятельная работа	36	36
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)	36	36
Итого:	144	144

#### Заочная форма обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		3 сем.
Контактная работа, в том числе:	16	16
лекции	8	8
практические занятия	8	8
Самостоятельная работа	119	119
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 9 час.)	9	9
Итого:	144	144

### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Матрицы и операции над ними	Операции над матрицами и их свойства. Элементарные преобразования матриц.
1.2	Векторные пространства	Понятие векторного пространства над полем, его простейшие свойства. Подпространство. Сумма подпространств и прямая сумма подпространств. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Основные свойства линейной зависимости. Ранг матрицы. Базис и размерность векторного пространства. Изоморфизм векторных пространств.
1.3	Системы линейных уравнений	Системы линейных уравнений (СЛУ): основные понятия. Равносильность СЛУ. Элементарные преобразования СЛУ. Теорема Кронекера-Капелли. Решение СЛУ методом Гаусса. Однородная СЛУ, её фундаментальная система решений.
1.4	Определители и их свойства	Перестановки. Подстановки. Свойства определителей. Разложение определителей по строке или столбцу. Условие вырожденности квадратной матрицы. Теорема об определителе произведения. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Решение СЛУ методом Крамера.
1.5	Линейные преобразования и их свойства	Понятие линейного преобразования и его простейшие свойства. Запись линейного преобразования (оператора) в координатах. Матрица линейного оператора. Нахождение координат образа вектора при линейном преобразовании. Связь между

		координатами вектора при переходе от одного базиса к другому. Обратимость матрицы перехода от одного базиса к другому. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах. Операции над линейными преобразованиями. Ранг и дефект линейного оператора. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.
<b>2. Практические занятия</b>		
2.1	Матрицы и операции над ними	Операции над матрицами и их свойства. Элементарные преобразования матриц.
2.2	Векторные пространства	Подпространство. Прямая сумма подпространств. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Ранг матрицы. Базис и размерность векторного пространства.
2.3	Системы линейных уравнений	Решение СЛУ методом Гаусса. Исследование СЛУ. Однородная СЛУ, её фундаментальная система решений.
2.4	Определители и их свойства	Перестановки. Подстановки. Свойства определителей. Разложение определителей по строке или столбцу. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений. Решение СЛУ методом Крамера.
2.5	Линейные преобразования и их свойства	Понятие линейного преобразования и его простейшие свойства. Матрица линейного оператора. Нахождение координат образа вектора при линейном преобразовании. Связь между координатами вектора при переходе от одного базиса к другому. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах. Операции над линейными преобразованиями. Ранг и дефект линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.

## 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Матрицы и операции над ними	6	6	0	6	18
2.	Векторные пространства	6	6	0	6	18
3.	Системы линейных уравнений	8	8	0	8	24
4.	Определители и их свойства	8	8	0	8	24
5.	Линейные преобразования и их свойства	8	8	0	8	24
6.	Экзамен					36
	Итого:	36	36	0	36	144

### Заочная форма обучения

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1.	Матрицы и операции над ними	1	1	0	23	25
2.	Векторные пространства	2	1	0	23	26
3.	Системы линейных уравнений	2	2	0	25	29
4.	Определители и их свойства	1	2	0	23	26
5.	Линейные преобразования и их свойства	2	2	0	25	29
6.	Экзамен					9

	Итого:	8	8	0	119	144
--	--------	---	---	---	-----	-----

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Для достижения планируемых результатов обучения используются интерактивные лекции, групповые дискуссии, анализ имитационных моделей.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

##### а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Окунев Л.Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009
2	Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учеб. пос. для вузов.- СПб: Лань, 2008

##### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Туганбаев, А.А. Линейная алгебра: учебное пособие / А.А. Туганбаев. - М.: Флинта, 2012. - 74 с. - ISBN 9785976514072; То же [Электронный ресурс]. – URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115141">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115141</a> (15.06.2016).
4	Алексеева, Т.И. Руководство к решению задач по алгебре (Линейная алгебра) [Электронный ресурс]: учебное пособие для физ. мат. специальностей пед. вузов/ Т.И. Алексеева. - Борисоглебск: ГОУ ВПО "БГПИ", 2009. Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. публикации ISBN 978-5-85897-449-9.

##### в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
5	Бондаренко, Ю.В. Линейная алгебра. Матрицы. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов : [для проведения занятий по курсу линейной алгебры : для направления 080700 - Бизнес-информатика] / Ю.В. Бондаренко, К.В. Чудинова; Воронеж. гос. ун-т. — Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интранета ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000 ; Adobe Acrobat Reader. — URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m13-103.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m13-103.pdf</a> (22.06.2018).
6	Вахитов, Р.Х. Фундаментальная и компьютерная алгебра [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 1 к.днев.отд-нияфак. компьютер. наук, для направления 010200 - Математика и компьютер. науки]. Ч. 3. Алгебра многочленов /

	Р.Х.Вахитов, Е.В.Вахитова; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012 .—Загл. с титул. экрана .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл .— Windows 2000 ; Adobe Acrobat Reader .— URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-207.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m12-207.pdf</a> (22.06.2018).
--	--

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Протасов, Ю.М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Курс лекций для студентов заочного отделения / Ю.М. Протасов. - М. : Флинта, 2012. - 168 с. - ISBN 9785976509566 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115117">http://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=115117</a> (22.06.2018).
2	Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. Практикум : учебно-методическое пособие для вузов. Ч. 1 / Воронеж. гос. ун-т; сост. Т.В. Рудченко .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— 50 с. : ил. —Библиогр.: с.49-50 .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07167.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07167.pdf</a> > (22.06.2018).

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

**программное обеспечение:**

- Win10 (или WinXP, Win7), OfficeProPlus 2010
- браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer
- STDU Viewer version 1.6.2.0
- 7-Zip
- GIMP GNU Image Manipulation Program
- Paint.NET
- Tux Paint
- Adobe Flash Player

### **информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:**

- Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>;
- Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – <https://www.lektorium.tv/>;
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

## 19. Фонд оценочных средств:

### 19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1: готовность реализовывать образовательные программы по учебным	Знать: связь теоретических основ и технологических приёмов линейной алгебры ( <i>понятия матрицы, определителя, линейной зависимости, независимости и</i>	Матрицы и операции над ними Векторные пространства Системы линейных уравнений	Математические диктанты Контрольная работа № 2 Контрольная

предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	<i>базиса системы векторов, векторного пространства, системы линейных уравнений, линейного оператора; методы вычисления определителей, решения СЛУ, нахождения собственных значений линейного оператора)</i> с содержанием преподаваемых учебных предметов. связь теоретических основ и технологических приёмов линейной алгебры с содержанием преподаваемых учебных предметов.	Определители и их свойства Линейные преобразования и их свойства	работа № 3
	Уметь: ставить познавательные цели учебной деятельности; осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения линейной алгебры; применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе реализации образовательных программ образовательной области «Математика и информатика»; осуществлять деятельность по разработанным программам учебных предметов ( <i>применять основные методы линейной алгебры к решению задач школьного курса математики</i> ).	Матрицы и операции над ними Векторные пространства Системы линейных уравнений Определители и их свойства Линейные преобразования и их свойства	Комплекты заданий для самостоятельных и контрольных работ  Комплект индивидуальных заданий  Комплект задач (повышенной сложности)
	Владеет (имеет навыки): исследовательской и проектной деятельности; общепользовательской ИКТ-компетентности; общепедагогической ИКТ-компетентности; предметно-педагогической ИКТ-компетентности.	Матрицы и операции над ними Векторные пространства Системы линейных уравнений Определители и их свойства Линейные преобразования и их свойства	Комплекты заданий для самостоятельных и контрольных работ
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>			Вопросы к экзамену

## 19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом линейной алгебры;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
- 4) умение применять теоретические знания для решения практических задач в области линейной алгебры, решать типовые расчётные задачи.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

## Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом линейной алгебры, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения типовых расчётных задач и практических заданий более высокого уровня сложности в области линейной алгебры.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Обучающийся владеет понятийным аппаратом линейной алгебры, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, допускает незначительные ошибки при решении практических заданий более высокого уровня сложности в области линейной алгебры.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Обучающийся владеет частично теоретическими основами линейной алгебры, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, в ряде случаев затрудняется применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, не всегда способен решить практические задания более высокого уровня сложности в области линейной алгебры.</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при решении типовых расчётных задач либо не имеет представления о способе их решения.</i>	<i>–</i>	<i>Неудовлетворительно</i>

### 19.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

#### 19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

1. Линейная зависимость (независимость) векторов линейного пространства. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Базис.
2. Определители квадратной матрицы. Свойства определителей.
3. Линейные пространства, примеры. Аксиомы линейного пространства. Элементарные следствия из аксиом линейного пространства.
4. Решение матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений матричным способом.
5. Элементарные преобразования матриц. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду.
6. Разложение определителей по строке и столбцу. Вычисление определителей  $n$ -го порядка. Условие вырожденности квадратной матрицы.
7. Основные свойства линейной зависимости векторов линейного пространства. Подпространства линейного пространства.
8. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
9. Умножение матриц и их свойства. Степень матрицы. Транспонированная матрица.
10. Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Сведение систем линейных уравнений к крамеровской системе.
11. Линейные операции над матрицами и их свойства.
12. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
13. Матрицы, их размерность. Матрицы специального назначения.
14. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
15. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.



16. Системы линейных уравнений, основные понятия. Равносильность систем линейных уравнений.
17. Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований.
18. Однородная система линейных уравнений, ее фундаментальная система решений.
19. Ранг матрицы. Нахождение ранга и базиса системы векторов. Изоморфизм линейных пространств.

### 19.3.2 Перечень практических заданий (примеры)

#### Тема 1. Матрицы и операции над ними

##### Вариант 1.....

Задание 1. ....

Вычислить произведения матриц:

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad C * D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание 2.

Привести матрицы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.

Найти  $A*B - B*A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Тема 2. Векторные пространства

##### Вариант 1

Задание 1. Найти линейную комбинацию  $3a_1 + 2a_2 - a_3$  следующих векторов:

$$a_1 = (1; 2; 3; -2), a_2 = (-1; 1; 4; 5), a_3 = (-5; 3; 6; 2).$$

Задание 2. Решить уравнение  $3a_3 - 4x = 5a_1$ . Векторы  $a_3, a_1$  взять из предыдущего задания.

Задание 3. Выяснить, являются ли следующие векторы линейно независимыми

$$a_1 = (5; 4; 3; 1), a_2 = (3; -1; 2; 2), a_3 = (8; 1; 3; 2).$$

Задание 4.

Выяснить, является ли системы векторов  $\begin{cases} e_1 = (2; 4; 3; 2), \\ e_2 = (4; 2; 2; 8), \\ e_3 = (4; 5; 8; 7), \\ e_4 = (6; 7; 5; 3) \end{cases}$  базисом пространства  $R^4$ . Найти

координаты вектора  $b = (18; 24; 13; 6)$  в этом базисе.

#### Тема 3. Системы линейных уравнений

##### Вариант 1

Задание 1. Решить систему уравнений методом Гаусса  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

Задание 2. Найти фундаментальную систему решений и записать структуру общего решения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$$

Задание 3. Найти матрицу, обратную данной  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Задание 4. Решить матричное уравнение  $X \cdot A + 2 \cdot X = B + C \cdot X$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Тема 4. Определители и их свойства

##### Вариант 1

Задание 1.

Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 2. Дана матрица А. Докажите, что она имеет обратную, и найдите ее с помощью

алгебраических дополнений  $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 3. Вычислить ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 11 & 1 \\ 3 & 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 4.

Докажите, что система  $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$  имеет единственное решение. Неизвестное  $x_3$

найдите по формуле Крамера. Решите систему методом Гаусса.

#### Тема 5. Линейные преобразования и операции над ними

##### Вариант 1

Задание 1. В двумерном векторном пространстве с базисом  $(e_1, e_2)$  отображение  $\varphi$  переводит любой вектор с координатами  $(x; y)$  в вектор с координатами  $(3x - 2y; 2x + y)$ . Установить, являются ли это отображение линейным оператором. Если да, то найти матрицу линейного оператора в стандартном базисе.

Задание 2. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы  $b_1, b_2, b_3$  соответственно

в векторы  $a_1, a_2, a_3$ , относительно стандартного базиса  $e_1, e_2, \hat{a}_3$ :

$$a_1 = (1; 2; 1), a_2 = (2; 3; 3), a_3 = (3; 7; 1), b_1 = (3; 1; 4), b_2 = (5; 2; 1), b_3 = (1; 1; -6).$$

##### Вариант 2

Задание 1. Выяснить, будет ли линейным оператором отображение  $\varphi$  пространства  $R^3$  в себя, если для любого вектора  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  выполняется:  $\varphi(x) = (x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_3, x_1 + 2x_2)$ . Если да, то найти матрицу линейного оператора в стандартном базисе.

Задание 2. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $V^2$  в базисе  $a_1 = (2; 1), a_2 = (1; 1)$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Найти матрицу того же отображения в базисе } b_1 = (5; 2), b_2 = (1; 0).$$

#### 19.3.3 Тестовые задания

Не предусмотрены

#### 19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

## Вариант 1

### Тема Алгебраические структуры

Задание 1. Определить, какой алгебраической структурой является множество  $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  по операции обычного умножения.

### Тема Алгебраические структуры

Задание 2. Выяснить, будут ли гомоморфны алгебры  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  и  $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ , если отображение  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$  задано по следующему правилу:  $(\forall x \in \mathbb{Z}) \varphi(x) = 2x$ .

### Тема Алгебраические структуры

Задание 3. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить:

а)  $\frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i}$ ; б) все значения  $\sqrt[4]{-4}$  и изобразить их геометрически.

### Тема Системы линейных уравнений

Задание 4. Вычислить  $f(A)$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = x^3 - 2x + 7$ .

### Тема Системы линейных уравнений

Задание 5. Исследовать систему на совместность и найти её решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

### Тема Векторные пространства

Задание 6. Установить, линейно зависима или нет система векторов  $a_1 = (1; 2; 3)$ ,  $a_2 = (1; -2; 3)$ ,  $a_3 = (1; 2; -3)$  в соответствующем арифметическом пространстве над полем  $\mathbb{Q}$ .

### Тема Системы линейных уравнений

Задание 7.

Найти общее и какое-либо частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4. \end{cases}$$

### Тема Системы линейных уравнений

Задание 8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

### 19.3.5 Темы курсовых работ

Не предусмотрены

### 19.3.6 Темы рефератов

Не предусмотрены

### 19.3.7 Перечень вопросов к математическим диктантам (примеры)

Математический диктант 1.....

1. Матрицы, их размеры.
2. Матрицы специального назначения.
3. Линейные операции над матрицами.
4. Свойства линейных операций над матрицами.
5. Умножение матриц.

6. Свойства операции умножения матриц.
7. Степень матрицы.
8. Транспонированная матрица и ее свойства.
9. Элементарные преобразования матриц.
10. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду.
11. Ранг матрицы. Нахождение ранга матрицы.

**Математический диктант 2**.....

12. Линейные пространства, примеры.
13. Аксиомы линейного пространства.
14. Элементарные следствия из аксиом линейного пространства.
15. Линейная зависимость (независимость) векторов линейного пространства.
16. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.
17. Базис линейного пространства.
18. Основные свойства линейной зависимости векторов линейного пространства.
19. Подпространства линейного пространства.
20. Ранг и базис системы векторов.
21. Изоморфизм линейных пространств.

**19.3.8 Комплект индивидуальных заданий (примеры)**

1. Решить систему уравнений путем нахождения обратной матрицы:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \qquad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$$

1.1.  $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$                       1.2.  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \qquad 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6$$

2. Найти ранг матрицы методом окаймления миноров. Значения параметров взять из таблицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & k_2 \\ -1 & 0 & k_1 & 5 \\ 2 & 14 & -3 & -3 \\ k_3 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

	$k_1$	$k_2$	$k_3$
	-5	7	3
	2	5	3

3. Решить однородную систему и найти её фундаментальную систему решений:

	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
--	--	----	--

4. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

	Система уравнений		Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

**19.3.9 Комплект задач (повышенной сложности) (примеры)**

1. Даны два множества, состоящие из матриц:  $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ e & f & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in R \right\}$ , и

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & d \\ -b & -d & g \end{pmatrix} \mid a, b, d, g \in R \right\}. \text{ Выяснить, образует ли множество } X \text{ векторное}$$

пространство с естественными операциями сложения и умножения на число. Доказать, что множество  $Y$  образует подпространство  $X$ .

2. Даны два множества, состоящие из многочленов:  $X = \{\alpha x^6 + \beta x^4 + \gamma x^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in R\}$ ,  $Y = \{\alpha x^6 - \alpha x^4 + \alpha x^2 \mid \alpha \in R\}$ . Доказать, что множество  $X$  образует векторное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число, а  $Y$  – его подпространство.
3. Доказать, что в линейном вещественном пространстве многочленов степени  $\leq n$  система векторов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  составляет базис, и найти размерность этого пространства.

4. Найти какой-нибудь фундаментальный набор решений. Записать на его основе все

решения системы уравнений: 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ -4x_2 + 5x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0, \\ -6x_1 - x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

5. Решить систему уравнений тремя способами (методом Гаусса, методом Крамера и

матричным способом): 
$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

6. Линейное отображение  $A$  пространства  $R^2$  в базисе  $a_1 = (1; 2), a_2 = (2; 3)$  имеет матрицу  $A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , а линейное отображение  $B$  пространства  $R^2$  в базисе  $b_1 = (3; 1), b_2 = (4; 2)$  имеет матрицу  $B_b = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу линейного отображения  $A+B$  в базисе  $b_1, b_2$ .

7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного

матрицей 
$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах: фронтальных опросов, математических диктантов, контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и

практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.