


МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин

 С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.ДВ.03.01 Введение в математический анализ**

1. Код и наименование направления подготовки:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

2. Профили подготовки:

Математика. Информатика и информационные технологии в образовании

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная, заочная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин

6. Составитель программы: Е.С. Зюзин, канд. физ.-мат. наук, доцент, Е.С. Мещерякова, ст. преподаватель

7. Рекомендована: научно-методическим советом Филиала (протокол № 1 от 31.08.2018 г.)

8. Учебный год: 2017-2018, 2018-2019 **Семестры:** 2 (офо), 4(зфо)

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью учебной дисциплины «Введение в математический анализ» является обеспечение фундаментальной математической подготовки как основы будущей профессиональной деятельности; формирование мировоззрения и развитие личности будущего педагога.

Задачи учебной дисциплины:

- дать представление о месте и роли введения в анализ и интегрального исчисления в системе математических наук;
- ознакомление с понятиями и методами введения в математический анализ, интегрального исчисления;
- ознакомление с математическими методами решения прикладных задач;
- воспитание математической культуры;
- формирование у студентов навыков работы с учебной, научной и научно-методической литературой.

10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Введение в математический анализ» входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является дисциплиной по выбору вариативной части образовательной программы. Для изучения дисциплины требуется освоение курсов «Математика» или «Элементы дифференциального исчисления», «Основы физики». Дисциплина является предшествующей для курсов «Математический анализ», «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дифференциальные уравнения», «Методика обучения математике» и др.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	<p>знает (имеет представление): связь теоретических основ и технологических приёмов элементов введения в математический анализ с содержанием преподаваемых учебных предметов (<i>понятия функции, предела функции, производной, первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла, несобственного интеграла, интеграла с переменной верхней границей; методы вычисления интегралов и т.д.</i>).</p> <p>умеет:</p> <ul style="list-style-type: none">– ставить познавательные цели учебной деятельности;– осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений;– применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения введения в математический анализ; <p>владеет (имеет навыки):</p> <ul style="list-style-type: none">– исследовательской и проектной деятельности;– общепользовательской ИКТ-компетентности;– общепедагогической ИКТ-компетентности;– предметно-педагогической ИКТ-компетентности.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 5/180.

Форма промежуточной аттестации экзамен.

13. Виды учебной работы

Очная форма обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		2 сем.
Контактная работа, в том числе:	72	72
лекции	36	36
практические занятия	36	36
лабораторные работы	0	0
Самостоятельная работа	72	72
Форма промежуточной аттестации (экзамен –36 час.)	36	36
Итого:	180	180

Заочная форма обучения

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		4 сем.
Контактная работа, в том числе:	16	16
лекции	8	8
практические занятия	8	8
лабораторные работы	0	0
Самостоятельная работа	155	155
Форма промежуточной аттестации (экзамен –9 час.)	9	9
Итого:	180	180

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Введение в анализ	Множества. Действительные числа. Функция. Последовательности. Предел функции. Непрерывность функций. Производная функции. Дифференциал функции. Функции нескольких переменных.
1.2	Неопределенный интеграл.	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование. Методы интегрирования. Замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций.
1.3	Определенный интеграл.	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода с бесконечными

		пределами и от неограниченных функций, определения, их основные свойства. Условия сходимости несобственных интегралов и способы исследования сходимости. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Методы приближенного вычисления определенного интеграла.
2. Практические занятия		
2.1	Введение в анализ	Множества. Действительные числа. Функция. Последовательности. Предел функции. Непрерывность функций. Производная функции. Дифференциал функции. Функции нескольких переменных.
2.2	Неопределенный интеграл.	Первообразная функция и неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Методы интегрирования. Замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций.
2.3	Определенный интеграл.	Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Несобственные интегралы 1-го рода. Несобственные интегралы 2-го рода. Признаки сходимости несобственных интегралов. Геометрические приложения определенного интеграла. Физические приложения определенного интеграла.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

Очная форма обучения

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение в анализ	8	8	0	10	26
2.	Неопределенный интеграл.	12	14	0	28	54
3.	Определенный интеграл.	16	14	0	34	64
4.	Экзамен					36
	Итого:	36	36	0	72	180

Заочная форма обучения

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение в анализ	1	1	0	25	27
2.	Неопределенный интеграл.	3	3	0	60	66
3.	Определенный интеграл.	4	4	0	70	78
4.	Экзамен					9
	Итого:	8	8	0	155	180

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ. Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Для достижения планируемых результатов обучения используются интерактивные лекции, групповые дискуссии.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.1: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008
2	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.2: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Алексеева Т.И. Основные понятия и теоремы математического анализа: учебно-метод. пособие. Ч. 2.- Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2010
4	Тиняков Г.П. Дополнительные главы математического анализа: учеб. пос.- М.: МГИУ, 2008

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
5	Мельников, Р.А. Математический анализ (практическое руководство для решения индивидуальных заданий) : учебное пособие / Р.А. Мельников, С.А. Силкин, В.А. Филин ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». - Елец : Елецкий государственный университет им И.А. Бунина, 2011. - 325 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-94809-520-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272211 (21.06.2018).
6	Туганбаев, А.А. Математический анализ: интегралы : учебное пособие / А.А. Туганбаев. - 3-е изд., стереотип. - Москва : Издательство «Флинта», 2017. - 76 с. - ISBN 978-5-9765-1306-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=103835 (21.06.2018).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Методические материалы по дисциплине
2	Алексеева Т.И. Основные понятия и теоремы математического анализа: учебно-метод. пособие. Ч. 2.- Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2010

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

программное обеспечение:

–Win10 (или WinXP, Win7), OfficeProPlus 2010

–браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer

- STDU Viewer version 1.6.2.0
- 7-Zip
- GIMP GNU Image Manipulation Program
- Paint.NET
- Tux Paint
- Adobe Flash Player

информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:

- Научная электронная библиотека – <http://www.scholar.ru/>;
- Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>;
- Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – <https://www.lektorium.tv/>;
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)
ПК-1 готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Знать: связь теоретических основ и технологических приёмов введения в математический анализ с содержанием преподаваемых учебных предметов (<i>понятия функции, предела функции, производной, первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла, несобственного интеграла, интеграла с переменной верхней границей; методы вычисления интегралов и т.д.</i>).	1. Введение в анализ. 2. Неопределенный интеграл. 3. Определенный интеграл.	Практическое задание Контрольная работа Тест
	Уметь: – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения введения в математический анализ;	1. Введение в анализ. 2. Неопределенный интеграл. 3. Определенный интеграл.	Комплекты индивидуальных заданий Доклады, рефераты Тест
	Иметь навыки: – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности;	1. Введение в анализ. 2. Неопределенный интеграл. 3. Определенный интеграл.	Доклады, рефераты Комплекты индивидуальных

	– общепедагогической ИКТ-компетентности; – предметно-педагогической ИКТ-компетентности.		заданий Аннотированный каталог
Промежуточная аттестация – экзамен			Вопросы к экзамену

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом введения в математический анализ;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
- 4) умение применять теоретические знания для решения практических задач в области математического анализа, решать типовые расчётные задачи.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом введения в математический анализ, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения типовых расчётных задач и практических заданий более высокого уровня сложности в области математического анализа.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Обучающийся владеет понятийным аппаратом введения в математический анализ, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, допускает незначительные ошибки при решении практических заданий более высокого уровня сложности в области математического анализа.</i>	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
<i>Обучающийся владеет частично теоретическими основами введения в математический анализ, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, в ряде случаев затрудняется применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, не всегда способен решить практические задания более высокого уровня сложности в области математического анализа..</i>	<i>Пороговый уровень</i>	<i>Удовлетворительно</i>
<i>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при решении типовых расчётных задач либо не имеет представления о способе их решения.</i>	–	<i>Неудовлетворительно</i>

19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

Раздел «Введение в анализ» (коллоквиум №1)

1. Множества.
2. Действительные числа.

3. Функция.
4. Последовательности.
5. Предел функции.
6. Непрерывность функций.
7. Производная функции.
8. Дифференциал функции.
9. Функции нескольких переменных.

Раздел «Неопределенный интеграл» (коллоквиум №2)

10. Первообразная и неопределенный интеграл.
11. Основные свойства неопределенного интеграла (с доказательствами).
12. Таблица основных интегралов.
13. Метод непосредственного интегрирования. Метод замены переменной.
14. Метод интегрирования по частям.

Интегрирование рациональных функций

15. Интегрирование рациональных функций. Общие сведения.
16. Простейшие дроби и их интегрирование.
17. Интегрирование правильных дробей.
18. Методы неопределенных коэффициентов. Метод частных значений.

Интегрирование тригонометрических функций

19. Универсальная тригонометрическая подстановка.

20. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$. Использование тригонометрических преобразований.

Интегрирование иррациональных функций

21. Квадратичные иррациональности. Дробно-линейная подстановка.

22. Тригонометрическая подстановка. Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

Подстановки Эйлера.

23. Интегрирование дифференциального бинома.

Раздел «Определенный интеграл» (коллоквиум №3)

24. Задачи, приводящие к понятию интеграла.
25. Определение определенного интеграла. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
26. Условия существования определенного интеграла.
27. Суммы Дарбу и их свойства.
28. Основные свойства определенного интеграла (с доказательствами).
29. Формула Ньютона – Лейбница и ее применение для вычисления определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле.
30. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
31. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
32. Несобственный интеграл I рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования). Признаки сходимости
33. Несобственный интеграл II рода (интеграл от разрывной функции). Признаки сходимости
34. Схемы применения определенного интеграла.
35. Вычисление площадей плоских фигур.
36. Вычисление длины дуги плоской кривой.
37. Вычисление объемов тел.
38. Вычисление площади поверхности вращения.
39. Работа переменной силы. Путь, пройденный телом.
40. Координаты центра тяжести. Статические моменты.
41. Приближенное вычисление определенного интеграла.

19.3.2 Перечень практических заданий (примеры)

Тема 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

- 1.1. Множества. Действительные числа.
- 1.2 Функция.
- 1.3 Последовательности.

- 1.4 Предел функции.
- 1.5 Непрерывность функций.
- 1.6 Производная функции.
- 1.7 Дифференциал функции.
- 1.8 Функции нескольких переменных.

Задание 1. Найти дифференциал функции y , если $y = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Задания 2- 3. Используя правила и формулы дифференцирования, найти производные функций:

1) $f(x) = 5 + x^2 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2\operatorname{tg}x - 3\operatorname{ctg}x + \log_2 x + 3 \ln x$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = x \sin x$;

4) $f(x) = x \operatorname{arctg}x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.

Задание 4. Вычислить пределы функций

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{7x^5 + 2x + 3}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$.

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$.

е) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

ж) Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

з) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)_{x-2}^{\frac{1}{x-2}}$.

и) $\lim_{x \rightarrow 5/2} (3x - 5)_{x-2}^{\frac{1}{x-2}}$.

Тема 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

- 1.1. Неопределенный интеграл.
 - 1.1.1. Первообразная. Понятие неопределенного интеграла.
 - 1.1.2. Свойства неопределенного интеграла.
 - 1.1.3. Таблица основных неопределенных интегралов.
- 1.2. Основные методы интегрирования.
 - 1.2.1. Метод непосредственного интегрирования.
 - 1.2.2. Метод интегрирования подстановкой.
 - 1.2.3. Метод интегрирования по частям.
- 1.3. Интегрирование рациональных функций.
 - 1.3.1. Понятие о рациональных функциях.
 - 1.3.2. Интегрирование рациональных дробей.
- 1.4. Интегрирование тригонометрических функций.
 - 1.4.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
 - 1.4.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
 - 1.4.3. Использование тригонометрических преобразований.
- 1.5. Интегрирование иррациональных функций.
 - 1.5.1. Квадратичные иррациональности.
 - 1.5.2. Тригонометрическая подстановка.
 - 1.5.3. Интегрирование дифференциального бинома.

Задание 1.1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы

1. $\int \frac{dx}{16 - x^4}$; 2. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$; 3. $\int \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$; 4. $\int \frac{-2x^4 + 4x^2 - 1}{1 - x^2} dx$;

$$\begin{aligned}
& 5. \int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx; \quad 6. \int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx; \quad 7. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx; \quad 8. \int 2^x e^x dx; \\
& 9. \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx; \quad 10. \int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 4}{\sin^2 x} dx; \quad 11. \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx; \\
& 12. \int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx; \quad 13. \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx; \quad 14. \int 4x \left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx; \\
& 15. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right) dx; \quad 16. \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx; \quad 17. \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx; \\
& 18. \int \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx; \quad 19. \int \left(\frac{1}{x^2 - 25} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} \right) dx; \\
& 20. \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx; \quad 21. \int \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx; \quad 22. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; \\
& 23. \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \quad 24. \int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx; \quad 25. \int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx
\end{aligned}$$

Задание 1.2 . С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы

$$\begin{aligned}
& 1. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad 2. \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad 3. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad 4. \int \cos(\ln x) dx; \\
& 5. \int \ln(x^2 + 2) dx; \quad 6. \int \ln^2 x dx; \quad 7. \int (x^2 + 1) \cos x dx; \quad 8. \int e^x \sin \frac{x}{2} dx; \\
& 9. \int e^{2x} \cos 3x dx; \quad 10. \int e^x \sin x dx; \quad 11. \int \frac{xdx}{\cos^2 x}; \quad 12. \int \frac{xdx}{\sin^2 x}; \\
& 13. \int x^2 e^x dx; \quad 14. \int x^2 \sin x dx; \quad 15. \int x^2 \cos x dx; \quad 16. \int (x + 1) \cos 3x dx; \\
& 17. \int x \sin x dx; \quad 18. \int x \cos x dx; \quad 19. \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx; \quad 20. \int x^3 e^{-x} dx; \\
& 21. \int x e^{5x} dx; \quad 22. \int x e^{-x} dx; \quad 23. \int \ln(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) dx; \\
& 24. \int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx; \quad 25. \int (x^2 + 3x + 2) \ln x dx
\end{aligned}$$

Задание 1.3 Применяя метод подстановки, вычислить интегралы

$$\begin{aligned}
& 1. \int \frac{dx}{2 - 3x}; \quad 2. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx; \quad 3. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx; \quad 4. \int \frac{5x - 6}{\sqrt{1 - 3x}} dx; \\
& 5. \int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{\sqrt{x + 1} - 1}} dx; \quad 6. \int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx; \quad 7. \int \frac{\cos 3x}{3 + \sin 3x} dx; \\
& 8. \int \cos^3 x \sin x dx; \quad 9. \int \sin^2 x \cos x dx; \quad 10. \int e^{\cos x} \sin x dx; \\
& 11. \int e^{-x^3} x^2 dx; \quad 12. \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad 13. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad 14. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx; \\
& 15. \int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx; \quad 16. \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx; \quad 17. \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx; \quad 18. \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}; \\
& 19. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx; \quad 20. \int x^2 \sqrt[5]{x^3 - 8} dx; \quad 21. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}; \quad 22. \int \frac{3^{\frac{1}{x}} dx}{x^2};
\end{aligned}$$

$$23. \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx; \quad 24. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}; \quad 25. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

- 2.1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
- 2.2. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
- 2.3. Формула Ньютона-Лейбница.
- 2.4. Основные свойства определенного интеграла.
- 2.5. Вычисления определенного интеграла.
 - 2.5.1. Формула Ньютона-Лейбница.
 - 2.5.2. Интегрирование подстановкой.
 - 2.5.3. Интегрирование по частям.
 - 2.5.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.
- 2.6. Несобственные интегралы.
 - 2.6.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода).
 - 2.6.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода).
- 2.7. Приложения определенного интеграла
 - 2.7.1. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
 - 2.7.1.1. Схемы применения определенного интеграла.
 - 2.7.1.2. Вычисление площадей плоских фигур.
 - 2.7.1.3. Вычисление дуги плоской кривой.
 - 2.7.1.4. Вычисление объемов тел.
 - 2.7.1.5. Вычисление площади поверхности вращения.
 - 2.7.1.6. Механические приложения определенного интеграла.
 - 2.7.2. Приближенное вычисление определенного интеграла.
 - 2.7.2.1. Формула прямоугольников.
 - 2.7.2.2. Формула трапеций.
 - 2.7.2.3. Формула парабол (Симпсона).

Задание 2.1. Вычислить интегралы

$$1. \int_0^2 (3x^2 - 1) dx; \quad 2. \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx; \quad 3. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 4. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

$$6. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx; \quad 7. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx; \quad 8. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad 9. \int_0^2 x(3-x) dx; \quad 10. \int_0^{\pi} \sin 2x dx;$$

$$11. \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx; \quad 12. \int_0^e \ln x dx; \quad 13. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad 14. \int_1^0 \ln^2 x dx; \quad 15. \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx;$$

$$16. \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx; \quad 17. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad 18. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}; \quad 19. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; \quad 20. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$21. \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx; \quad 22. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}; \quad 23. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx; \quad 24. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx; \quad 25. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

Задание 2.2. Исследовать на сходимость

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; \quad 2. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \quad 3. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}; \quad 4. \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx; \quad 5. \int_1^{+\infty} \frac{1 + \ln x}{x} dx;$$

$$6. \int_0^{+\infty} \sin x dx; \quad 7. \int_{-\infty}^0 x e^x dx; \quad 8. \int_0^1 \frac{dx}{x^a}; \quad 9. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad 10. \int_0^1 \ln x dx; \quad 11. \int_0^1 \ln^2 x dx;$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx; \quad 13. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}; \quad 14. \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}; \quad 15. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}; \quad 16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x};$$

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a}; \quad 18. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx; \quad 19. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx; \quad 20. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}; \quad 21. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2};$$

$$22. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}; \quad 23. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}; \quad 24. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}; \quad 25. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

Задание 2.3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

1. $y=4-x^2$, $y=0$; 2. $y^2=2\rho x$, $x=h$; 3. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$;

4. $y=x^2$, $y=2-x^2$; 5. $y=x^2$, $y=1$; 6. $y=\cos^2 x - \sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$;

8. $y=\arcsin 2x$, $x=0$, $y=-\frac{\pi}{2}$; 9. $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

10. $y=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ и отрезком $[-1,2]$ оси ox ;

Задание 2.4. Вычислить длину дуги кривой

1. $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=4$;

2. $y=x^2-1$, отсеченной осью Ox ;

3. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от $x=0$ до $x=a$;

4. $y=\ln \cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;

5. $y=\ln \sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$;

6. $y=x^2$ от $x=0$ до $x=2$;

7. $y=\left(\frac{2}{5}\right)x^4\sqrt{x}-\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox .

8. $y=\frac{x^2}{2}$ от $x=0$ до $x=1$;

9. $y=1-\ln \cos x$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{6}$;

10. $x=\frac{t^3}{3}-t$, $y=t^2+2$ от $t=0$ до $t=3$;

Задание 2.5. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой

1. $y^2=2\rho x$, $x=h$ вокруг оси Ox ;

2. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x \geq 0$ вокруг оси Ox и Oy ;

4. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ вокруг оси Ox ;

5. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг оси Ox и Oy ;

6. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг оси Ox и Oy ;

7. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $y=0$;

8. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $x=0$;

9. $y=x-x^2$, $y=0$ вокруг прямой $x=2$;

10. $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ вокруг прямой $y=0$;

11. $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ вокруг прямой $x = 0$;

19.3.3 Тестовые задания

Тест «Введение в анализ»

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 + 1}$:

- A) $(-\infty; +\infty)$ B) $[-1; +\infty)$
C) $(-\infty; 1]$ D) $[1; +\infty)$
E) $[-1; 1]$

2. Найти область определения функции $y = \frac{1}{4 - x^2}$:

- A) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ B) $x \neq 2$
C) $x \neq -2$ D) $(-2; 2)$
E) $(-\infty; -2]$

3. Функция $y = f(x)$ называется четной, если:

- A) $f(-x) = f(x)$ B) $f(-x) = -f(-x)$
C) $f(-x) = -f(x)$ D) $f(-x) = x^2 f(x)$
E) $f(x) = xf(-x)$

4. Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если:

- A) $f(-x) = -f(x)$ B) $f(-x) = f(x)$
C) $f(-x) = -f(-x)$ D) $f(-x) = x^2 f(x)$
E) $f(x) = xf(-x)$

5. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$:

- A) e^2 B) e^{-2}
C) 2 D) -2
E) 0

6. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x - 1}$:

- A) ∞ B) 0
C) 3 D) -3
E) $\frac{3}{2}$

7. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$:

- A) 3 B) 8
C) 2 D) $\frac{2}{3}$
E) 0

8. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x}$:

- A) 2 B) 4
C) 1 D) -2
E) 0

9. Найти точки разрыва функции $y = \frac{9 - x^2}{x^2 - 8x}$:

- A) $x_1 = 8; x_2 = 0$ B) $x_1 = 2; x_2 = 0$
C) $x_1 = 3; x_2 = 4$ D) $x = 0$
E) $x_1 = 9; x_2 = 5$

10. Найдите производную функции $y = 5 \ln x - x^2$:

- A) $\frac{5}{x} - 2x$ B) $\frac{x}{5} - x$
C) $-\frac{5}{x} + 2x$ D) $\frac{5}{x} + 2x$
E) $\frac{5}{x} - x$

11. Найти производную y' функции $y = x^3 + \cos 5x$:

- A) $3x^2 - 5 \sin 5x$ B) $3x^2 + 5 \sin 5x$
C) $3x^2 + \sin 5x$ D) $\frac{x^4}{4} + 5 \sin 5x$
E) $4 + 3x^2 + \sin 5x$

12. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $M(-2; -8)$ к кривой $y = x^3$:

- A) 12 B) 11
C) 10 D) -10
E) 0

13. Найти дифференциал dy функции $y = \sin 2x$:

- A) $dy = 2 \cos 2x dx$ B) $dy = 2 \cos 2x$
C) $dy = -2 \sin 2x dx$ D) $dy = \sin 2x dx$
E) $dy = 2 \sin 2x dx$

14. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме $x = t^2 + 1$, $y = 2t^3 - 5$ найти производную y'_x :

- A) $y'_x = 3t$ B) $y'_x = \frac{1}{3t^2}$
C) $y'_x = 2t$ D) $y'_x = 6t^2$
E) $y'_x = -\frac{1}{3t^2}$

15. Для функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$, применяя теорему Лагранжа, найти значение c :

- A) $c = \frac{1}{4}$ B) $c = \frac{1}{2}$
C) $c = \frac{3}{4}$ D) $c = \frac{2}{3}$

E) $c = \frac{1}{3}$

16. Для функции $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ на отрезке $[-1; 1]$ найти c , применяя теорему Ролля:

A) $c = -\frac{1}{3}$

B) $c = \frac{1}{2}$

C) $c = \frac{4}{5}$

D) $c = \frac{3}{4}$

E) $c = 0$

17. Пользуясь правилом Лопиталя, вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{\ln x}$:

A) 3

B) 7

C) -3

D) 0

E) -1

18. Найти производную второго порядка функции $y = x^3 - 3x^2 + 6$:

A) $3x^2 - 6x$

B) $3x + 2$

C) $6x - 3$

D) $6x - 6$

E) $6x + 6$

19. Найти интервалы возрастания функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$:

A) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

B) $(-3, 1)$

C) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

D) $(1, 3)$

E) $(-1, 3)$

20. Найти интервал выпуклости (вверх) функции $y = x^3 - 3x$:

A) $(-\infty, 0)$

B) $(-\infty, \infty)$

C) $(6, \infty)$

D) $(-1, 1)$

E) $(0, +\infty)$

21. Найти вертикальную асимптоту функции $y = \frac{x^2 + 6x}{x + 2}$:

A) $x = -2$

B) $x = 2$

C) $x = 6$

D) $x = -6$

E) $x = 0$

22. Найти точку перегиба $M(x_M, y_M)$ функции $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$:

A) $(1; 4)$

B) $(1; 24)$

C) $(1; -8)$

D) $(1; -1)$

E) Точек перегиба нет

23. Найти экстремумы функций: $y = 2x^3 - 3x^2$

A) $y_{\max}(0) = 0, y_{\min}(1) = -1.$

B) $y_{\max}(1) = -1, y_{\min}(0) = 0.$

C) $y_{\max}(1) = 1, y_{\min}(0) = -1.$

D) $y_{\max}(0) = 1, y_{\min}(1) = -2.$

E) $y_{\max}(-1) = 0, y_{\min}(0) = -2.$

Тест «Первообразная. Неопределенный интеграл»

1. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется:

- A) Неопределенным интегралом от функции $f(x)$
- B) Определенным интегралом от функции $f(x)$
- C) Несобственным интегралом от функции $f(x)$
- D) Криволинейным интегралом от функции $f(x)$
- E) Двойным интегралом от функции $f(x)$

2. Укажите свойство неопределенного интеграла:

- A) $\int df(x) = f(x) + C$
- B) $\int df(x) = f(x)$
- C) $\int df(x) = F(x) + C$
- D) $\int df(x) = F(x)$
- E) $\int df(x) = C$

3. Укажите формулу интегрирования заменой переменной в неопределенном интеграле:

- A) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
- B) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))tdt$
- C) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))dt(\varphi(t))$
- D) $\int f(x)dx = \int f(t)d\varphi(t)$
- E) $\int f(x)dx = \int f(t)\varphi(t)dt$

4. Найдите интеграл $\int \frac{5}{(x+3)^3} dx$:

- A) $-\frac{5}{2(x+3)^2} + C$
- B) $-\frac{5}{(x+3)^2} + C$
- C) $-\frac{2}{5(x+3)^2} + C$
- D) $5\ln|x+3|^2 + C$
- E) $5\ln|x+3| + C$

5. Найдите интеграл $\int \left(x + \sin \frac{x}{2}\right) dx$:

- A) $\frac{x^2}{2} - 2\cos \frac{x}{2} + C$
- B) $\frac{x^2}{2} - \cos \frac{x}{2} + C$
- C) $x^2 + \cos \frac{x}{2} + C$
- D) $\frac{x^2}{2} + 2\cos \frac{x}{2} + C$
- E) $2x + \cos x$

6. Найдите интеграл $\int \cos^3 x \sin x dx$:

- A) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$
- B) $\sin x + C$
- C) $-3\cos^2 x + C$
- D) $\frac{\cos^4 x}{4} + C$
- E) $3\cos^2 x + C$

7. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$:

- A) $\arcsin \frac{x}{4} + C$
- B) $\frac{1}{4} \arcsin \frac{x}{4} + C$
- C) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C$
- D) $\ln|x + \sqrt{16-x^2}| + C$
- E) $\arcsin \frac{x}{4}$

8. Какой метод применяется при нахождении интеграла $\int \arcsin x dx$:

- A) Интегрирование по частям
- B) Метод замены переменной
- C) С помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
- D) Непосредственное интегрирование
- E) Метод подведения под знак дифференциала

9. Найдите интеграл $\int x \cos x dx$:

- A) $x \sin x + \cos x + C$
- B) $x \sin x - \cos x + C$
- C) $\sin x + C$
- D) $\cos x + C$
- E) $x \cos x + \sin x + C$

10. Найдите интеграл $\int \frac{x+1}{x} dx$:

- A) $x + \ln|x| + C$
- B) $\ln|x| + C$
- C) $(x+1)^2 + C$
- D) $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$
- E) $x + C$

11. Найдите интеграл $\int \sin^2 x dx$:

- A) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
- B) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x + C$
- C) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$
- D) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x + C$
- E) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin x + C$

12. Найдите интеграл $\int \sin 3x \sin x dx$:

- A) $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$
- B) $\frac{1}{4} \sin 3x - \sin 4x + C$
- C) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$
- D) $4 \sin 2x - 8 \sin 4x + C$
- E) $4 \sin 3x - \sin x + C$

13. С помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$:

- A) $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
- B) $\ln |\sin x| + C$
- C) $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
- D) $-\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| + C$
- E) $\ln |t| + C$

14. Укажите простейшую дробь 3-го типа $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5} dx$, $\int \frac{3x+2}{x^2+4x-1} dx$, $\int \frac{dx}{(3x+7)^3}$, $\int \frac{x+4}{2x^2+3x-2} dx$:

A) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5} dx$ B) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x-1} dx, \int \frac{x+4}{2x^2+3x-2} dx$

C) $\int \frac{dx}{(3x+7)^3}$ D) $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5} dx, \int \frac{3x+2}{x^2+4x-1} dx$

E) простейшей дроби 3-го типа нет

15. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)}$:

A) $\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$ B) $\ln|(x+1)(x+1)| + C$

C) $\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$ D) $\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + C$

E) $\ln|x+1| - \ln|x+2|$

Тест «Определенный интеграл»

1. Укажите формулу Ньютона-Лейбница, если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$:

A) $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

B) $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = f(b) - f(a)$

C) $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(a) - F(b)$

D) $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(a) + F(b)$

E) $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(a) + F(b) + C$

2. Вычислите интеграл $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$:

A) 2 B) -2 C) 4 D) -4 E) 0

3. Вычислите интеграл $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$:

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{13}{3}$ D) 7 E) 0

4. Какое отношение верно:

A) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

B) $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$

C) $\int_a^b f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

D) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

E) $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(a) + F(b)$

5. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Вычислите интеграл $\int_0^1 xe^x dx$:

A) 1 B) -1 C) 0 D) $2e$ E) e

7. Укажите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле :

A) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

B) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b$

C) $\int_a^b u dv = uv + \int_a^b v du$

D) $\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$

E) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b + \int_a^b v du$

8. Укажите формулу нахождения площади плоской фигуры:

A) $S = \int_a^b f(x) dx$

B) $S = \int_a^b f^2(x) dx$

C) $S = \int_a^b f'(x) dx$

D) $S = \int_a^b \sqrt{f(x)} dx$

E) $S = \int_a^b f'(x) dx + C$

9. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 2$, $y = x^2$ равна:

A) $S = \frac{8}{3}$

B) $S = \frac{2}{3}$

C) $S = 4$

D) $S = 8$

E) $S = 0$

10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$:

A) $S = e - 1$

B) $S = e + 1$

C) $S = e$

D) $S = 1 - e$

E) $S = 2e + 1$

11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Oy и прямыми $y = 0$, $y = 1$

A) $V_y = \frac{\pi}{2}$

B) $V_y = \frac{1}{2}$

C) $V_y = \pi$

D) $V_y = \frac{\pi}{5}$

E) $V_y = \frac{1}{5}$

12. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле:

A) $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

B) $V_x = \pi \int_b^a f(x) dx$

C) $V_x = \pi \int_a^b f(x) dx$

D) $V_x = \pi \int_b^a f^2(x) dx$

E) $V_x = \int_a^b f^2(x) dx$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ (примеры)

Введение в анализ

Вариант 1

1. Найти дифференциал dy

$$y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^x.$$

2. Найти производную $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

3. Найти производную $y = \operatorname{Intg}(x/2) - x/\sin x$.

4. Вычислить пределы функций

а). $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$ б). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$.

Неопределенный интеграл

Вариант 1

1) Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы

а) $\int \frac{dx}{16 - x^4}$; б) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$

2) Применяя метод подстановки, вычислить интегралы

а) $\int \cos^3 x \sin x dx$ б) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$

3) С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы

а) $\int x e^{5x} dx$ б) $\int x \sin x dx$

Определенный интеграл

Вариант 1

1. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$ б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x - 2} dx$

в) $\int_0^1 x e^x dx$ г) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + x}$

2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_3^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^2 + 4}$ б) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3$, $y = x^2$, $x = -2$, $x = 1$.

б) $\rho = 3 - 2\cos \varphi$, $\beta = \frac{1}{2}$

4. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln \sin x$, от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.5 Темы курсовых работ

Не предусмотрены

19.3.6 Темы рефератов и докладов

Геометрические приложения определенного интеграла:

1. Вычисление площади плоской фигуры
2. Вычисление длины дуги плоской кривой
3. Вычисление площади криволинейного сектора
4. Вычисление объемов
5. Вычисление площади поверхности вращения

Физические приложения определенного интеграла:

6. Вычисление пройденного пути
7. Вычисление работы с помощью определённого интеграла
8. Координаты центра тяжести
9. Статические моменты относительно координатных осей материальной кривой

Численное интегрирование:

10. Метод прямоугольников
11. Метод трапеций
12. Метод Симпсона
13. Метод Гаусса

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется за самостоятельно написанный реферат по теме; умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы;

- **оценка «хорошо»** ставится, если: реферат удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков: в изложении: допущены небольшие пробелы, не исказившие содержание реферата; допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя. В реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация;

- **оценка «удовлетворительно»** ставится, если: неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя; студент не может применить теорию в новой ситуации;

- **оценка «неудовлетворительно»** ставится, если: не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя; нарушена логика в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов; недостаточно сформированы навыки письменной речи; реферат является плагиатом других рефератов более чем на 90%.

19.3.7 Комплект индивидуальных заданий (примеры)

Раздел Неопределенные интегралы (Часть 1)

Вариант 1

1) Найти неопределенные интегралы (результаты интегрирования проверить дифференцированием)

$$а) \int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx, б) \int \frac{dx}{3-x}, в) \int \sin(2-3x) dx,$$

$$г) \int e^{2x-7} dx, д) \int \frac{x-1}{7x^2+4} dx.$$

2) Вычислить неопределенные интегралы, используя метод замены переменной

$$\text{а) } \int \frac{2x}{\sqrt{5-4x^2}} dx, \text{ б) } \int \sin^4 2x \cos 2x dx, \text{ в) } \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx,$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{e^{3x^2+4}} dx, \text{ д) } \int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx.$$

3) Вычислить неопределенные интегралы, использовать метод интегрирования по частям

$$\text{а) } \int (x+1)e^{2x} dx, \text{ б) } \int (x-9)\sin \frac{x}{2} dx, \text{ в) } \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx.$$

Вариант 2

1) Найти неопределенные интегралы (результаты интегрирования проверить дифференцированием)

$$\text{а) } \int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx, \text{ б) } \int \frac{dx}{3x+9}, \text{ в) } \int \sin(3-2x) dx,$$

$$\text{г) } \int e^{3+5x} dx, \text{ д) } \int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx.$$

2) Вычислить неопределенные интегралы, используя метод замены переменной

$$\text{а) } \int \frac{x}{\sqrt{5-3x^2}} dx, \text{ б) } \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx, \text{ в) } \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}},$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{e^{x^2+3}} dx, \text{ д) } \int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x} dx.$$

3) Вычислить неопределенные интегралы, использовать метод интегрирования по частям

$$\text{а) } \int (x+1)e^{2x} dx, \text{ б) } \int x \cos(x+7) dx, \text{ в) } \int \cos(\ln x) dx.$$

Раздел Неопределенные интегралы (Часть 2)

Вариант 1

1. Найти неопределенные интегралы, используя приемы интегрирования дробно - рациональных функций

$$\text{а) } \int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$$

$$\text{в) } \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$$

2. Найти неопределенные интегралы, используя приемы интегрирования тригонометрических выражений

$$\text{а) } \int \sin^2(1-x) dx$$

$$\text{б) } \int \sin 3x \cdot \cos x dx$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$$

$$\text{г) } \int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x dx$$

3. Найти неопределенные интегралы, используя приемы интегрирования выражений, содержащих иррациональности

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$$

$$\text{в) } \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx$$

Вариант 2

1. Найти неопределенные интегралы, используя приемы интегрирования дробно - рациональных функций

$$а) \int \frac{7 - x^2}{1 - x} dx \qquad б) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}$$

$$в) \int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx \qquad г) \int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$$

2. Найти неопределенные интегралы, используя приемы интегрирования тригонометрических выражений

$$а) \int \sin^3(1 - x) dx \qquad б) \int \sin^5 2x \cdot \cos 2x dx$$

$$в) \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 2 \cos x} \qquad г) \int \sqrt[5]{\sin^4 x \cdot \cos^3 x} dx$$

3. Найти неопределенные интегралы, используя приемы интегрирования выражений, содержащих иррациональности

$$а) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}} \qquad б) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

$$в) \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$$

Раздел Определенные интегралы

Вариант 1

3. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой

$$а) \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx \qquad б) \int_2^3 x \ln(x - 1) dx \qquad в) \int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$г) \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx \qquad д) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx \qquad е) \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

4. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

$$а) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1} \qquad б) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 4x}} dx$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

4. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой: $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг оси Ox .

Вариант 2

1. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой

$$а) \int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6 + 1}} dx \qquad б) \int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx \qquad в) \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$$

$$г) \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx \qquad д) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \cos x} dx \qquad е) \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

2. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

$$а) \int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4 - 1} \qquad б) \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} dx$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

4. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг указанной прямой: $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг оси Oy .

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.8 Составление аннотированного каталога

Составить аннотированный каталог материалов информационно-образовательных ресурсов по одной из тем: «Введение в анализ», «Неопределенные интегралы», «Определенные интегралы» (аннотация должна содержать не менее 3 предложений). Количество материалов – не менее 10.

Информационно-образовательные ресурсы:

- Научная электронная библиотека – <http://www.scholar.ru/>;
- Федеральный портал Российское образование – <http://www.edu.ru/>;
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>;
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>;
- Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – <https://www.lektorium.tv/>;
- Электронно-библиотечная система «Издательства Лань» – <http://e.lanbook.com/>;
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>.

№	Наименование материала	Информационно-образовательные ресурсы	Ссылка	Аннотация
1.				
2.				

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах: фронтальных опросов, контрольных работ, индивидуальных заданий, тестирование, рефератов, докладов. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.