МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Элементарная математика

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Это позволит обучающимся получить четкое представление о:

- перечне и содержании компетенций, на формирование которых направлена дисциплина;
- основных целях и задачах дисциплины;
- планируемых результатах, представленных в виде знаний, умений и навыков, которые должны быть сформированы в процессе изучения дисциплины;
- количестве часов, предусмотренных учебным планом на изучение дисциплины, форму промежуточной аттестации;
- количестве часов, отведенных на аудиторные занятия и на самостоятельную работу;
- формах аудиторных занятий и самостоятельной работы;
- структуре дисциплины, основных разделах и темах;
- системе оценивания учебных достижений;
- учебно-методическом и информационном обеспечении дисциплины.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами аудиторных занятий по дисциплине являются лекции и практические занятия.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, изучить образцы решения задач.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на зачет. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Методические материалы для обучающихся по освоению дисциплины

Тема 1. Натуральные и целые числа

План

1. Понятие натурального числа. Множество целых чисел.
2. Делимость натуральных и целых чисел.
3. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики.
4. Свойства и признаки делимости натуральных чисел.

В современной математике натуральное число является понятием аксиоматическим, первичным. В школьных учебниках обычно пишут, что *натуральные числа* – это числа, используемые в повседневной практике для счёта, т.е. $1,2,3,4,5,\ldots,n,\ldots$ Натуральные числа образуют множество, называемое *множеством натуральных чисел* и обозначаемое заглавной латинской буквой

$$N=\{1;2;3;4;5;\ldots;n;\ldots\}$$

(от французского слова «le nombre» – число). Запись $n\in N$ означает, что число n принадлежит множеству натуральных чисел, т.е. является натуральным.

Более строгое описание понятия натуральных чисел, выходящее, впрочем, за пределы курса элементарной математики, опирается на аксиомы, сформулированные итальянским математиком *Джузеппе Пеано* (1858–1932).

Аксиомы Пеано

1. Единица есть натуральное число. Единица не следует ни за каким натуральным числом.

2. Число, следующее за натуральным числом, есть натуральное число.

3. Если натуральное число a следует за натуральным числом b и одновременно за натуральным числом c, то b и c тождественно равны.

4 (*Аксиома математической индукции*). Если какое-либо предложение доказано для 1, и если из допущения, что оно верно для натурального числа a, вытекает, что оно верно для следующего за a натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Свойства натуральных и целых чисел

1. Множество натуральных чисел *бесконечно*.

2. Множество натуральных чисел является *упорядоченным*, т.е. между любыми двумя натуральными числами a и b всегда можно поставить один и только один из трёх знаков сравнения: «=» (равно), «<» (меньше), «>» (больше).

3. На множестве натуральных чисел вводятся *четыре основные арифметические операции:* сложения, вычитания, умножения, деления. При этом сумма и произведение существуют для любой пары натуральных чисел, разность и частное – только для некоторых. Так, разность $a-b$ не является натуральным числом, если $a\le b$.

4. Согласно аксиоматике Пеано 0 не является натуральным числом. Однако существуют другие системы аксиом натуральных чисел, согласно которым 0 есть натуральное число. Таким образом, в отличие от категоричности школьных учебников математики, считать 0 натуральным числом или нет зависит от выбора аксиоматики натуральных чисел.

5. Будем в дальнейшем считать, что натуральные числа определены аксиомами Пеано. Если к множеству натуральных чисел добавить число нуль, то получим *расширенное множество натуральных чисел*:

$$N_0=\{0;1;2;3;\ldots;n-1;n;n+1;\ldots\}=Z_+ .$$

Множество *отрицательных целых чисел* вводится как множество, состоящее из чисел, равных по абсолютной величине (модулю) и противоположных по знаку натуральным числам.

Например, натуральное число a, взятое со знаком «минус» $(-a)$, называют числом, *противоположным* натуральному числу a. Только для числа 0 справедливо $+0=-0=0$.

Множество отрицательных целых чисел обозначается

$$Z_-=\{-1;-2;-3;\ldots;-n;\ldots\},\text{ где } n\in N .$$

Таким образом, каждое целое число имеет две характеристики – *модуль* и *знак.* Модуль целого числа есть число натуральное и указывает *расстояние*, на которое число удалено от начала отсчёта на числовой прямой. Знак целого числа указывает, в какую сторону от начала отсчёта удалено данное число: знак «минус» означает удаление влево и соответствует отрицательным числам, знак «плюс» – вправо и соответствует положительным числам.

Множество, содержащее все натуральные числа, числа, противоположные натуральным, а также число нуль, называется множеством *целых чисел* и обозначается заглавной латинской буквой Z:

$$Z = \{0;\pm 1;\pm 2;\pm 3;\ldots;\pm n;\ldots\},\text{ где } n \in N.$$

Очевидно, что множество N является *подмножеством* множества Z, что обозначается $N \subset Z$. Заметим, что натуральные числа можно называть также положительными целыми числами.

6. Модулем целого числа a называют неотрицательное целое число, определяемое условием:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0. \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

7. Введём операции *сравнения* на множестве, состоящем из целых отрицательных чисел, что позволит упорядочить элементы этого множества между собой.

Пусть a и b – натуральные числа. Будем говорить, что два целых отрицательных числа $(-a)$ и $(-b)$ *равны*, если равны a и b. Будем считать, далее, что число $(-a)$ *меньше* числа $(-b)$, если a больше b. Соответственно число $(-a)$ *больше* числа $(-b)$, если a меньше b.

8. Операции сложения и умножения целых чисел (а, следовательно, и вводимые посредством них операции вычитания и деления) подчиняются *основным законам арифметики*. Пусть a, b, c – произвольные целые числа. Тогда справедливы следующие равенства:

1. $a+b=b+a$ (*коммутативность* сложения, или переместительный закон сложения);
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность* сложения, или сочетательный закон сложения);
3. $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность* умножения, или переместительный закон умножения);
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*ассоциативность* умножения, или сочетательный закон умножения);
5. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b \cdot c$ (*дистрибутивность* умножения относительно сложения, или распределительный закон умножения относительно сложения).

Делимость натуральных и целых чисел. Свойства делимости

Определение. Говорят, что натуральное (целое) число a делится на натуральное (целое число c, $c \neq 0$), если существует такое натуральное (целое) число b, что

$$a = b \cdot c$$

Свойство 1. Любое целое число делится само на себя, на число, себе противоположное, на 1 и на −1.

Свойство 2. Нуль делится на любое целое число.

Свойство 3. Если целое число a делится на целое число b и $|a| < |b|$, то $a = 0$.

Свойство 4. Делителями единицы являются только целые числа 1 и −1.

Свойство 5. Если целое число a делится на целое число b, то a делится на целое число $-b$, и целое число $-a$ делится на b.

Свойство 6. Если целое число a делится на целое число b, а целое число b в свою очередь делится на целое число c, то a делится на c (*свойство транзитивности делимости целых чисел*).

Свойство 7. Если целое число a делится на целое число b и одновременно b делится на целое число a, то либо $a=b$, либо $a=-b$ (*свойство антисимметричности*).

Свойство 8. Если каждое из двух (трех, четырех и более) слагаемых делится на целое число c, то любая линейная комбинация этих чисел также делится на c.

Свойство 9. Если известно, что в равенстве вида $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_m$ все члены, кроме какого-то одного слагаемого делятся на некоторое целое число b, то и это слагаемое делится на b.

Свойство 10. Если целое число a делится на целое число b, то произведение $k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_n$, где $k_1,k_2,\ldots,k_n$ – некоторые целые числа, делится на b.

Признаки делимости натуральных чисел

Пусть $n=\overline{a_k a_{k-1}...a_2 a_1 a_0}$ – произвольное натуральное число, записанное цифрами десятичной системы счисления: $0\le a_k, a_{k-1},...a_2,a_1,a_0\le 9$.

Критерий делимости на 2. Натуральное число n кратно двум тогда и только тогда, когда его последняя цифра a_0 кратна двум, т.е. $a_0=0;2;4;6;8$):

$$n \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2.$$

Критерий делимости на 3. Натуральное число n делится нацело на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3:

$$n \vdots 3 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i \vdots 3\cdot$$

Критерий делимости на 4. Натуральное число n делится нацело на 4 тогда и только тогда, когда число, состоящее из двух последних цифр числа n, делится на 4:

$$n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4.$$

Критерий делимости на 5. Натуральное число n делится нацело на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра числа n равна 0 или 5:

$$n \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5.$$

Критерий делимости на 8. Натуральное число n делится нацело на 5 тогда и только тогда, когда число, составленное из трёх последних цифр, делится на 8:

$$n \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8.$$

Критерий делимости на 9. Натуральное число n делится нацело на 5 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9:

$$n \vdots 9 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i \vdots 9\cdot$$

Критерий делимости на 10. Натуральное число n делится нацело на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0:

$$n \vdots 10 \Leftrightarrow a_0=0.$$

Критерий делимости на 11. Натуральное число n делится нацело на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих в чётных разрядах, либо равна сумме цифр, стоящих в нечётных разрядах, либо отличается от неё на число, кратное 11.

Критерий делимости на 25. Натуральное число n делится нацело на 25 тогда и только тогда, когда число, состоящее из двух последних цифр числа n, делится на 25:

$$n \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 25 .$$

Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

Определение. Натуральное число, большее 1, называется *простым*, если оно делится только на единицу и само себя и других натуральных делителей не имеет. Натуральные числа, большие единицы и не являющиеся простыми, называются *составными*.

Основные свойства простых чисел:

1. Всякое составное число a имеет хотя бы один простой делитель p, не превосходящий $\sqrt{a} : p \le \sqrt{a}$.

2. Если произведение двух целых чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p .

3. Если p и q – простые числа и $p \vdots q$, то $p = q$.

Теорема (основная теорема арифметики). Каждое составное число разлагается в произведение нескольких простых чисел, не обязательно различных, причём такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l} ,$$

где n – составное число, о котором идёт речь в теореме, $p_1 , p_2 ,\ldots,p_l$ – различные простые числа, $k_1 ,k_2 ,\ldots,k_l$ – натуральные показатели степеней. Это разложение часто называют *каноническим разложением* числа на простые множители.

Практическое занятие 1
Решение задач в натуральных числах

План занятия

1. Задачи на признаки и свойства делимости
2. Задачи на простые и составные числа

Необходимо отметить, что деление задач в натуральных числах на виды весьма условно. Многие задачи на свойства и признаки делимости могли быть с таким же правом размещены в пунктах «Задачи на простые и составные числа» или «Решение задач на НОД и НОК» и наоборот. Причисляя задачу в натуральных числах к тому или иному виду, авторы руководствовались теми понятиями и свойствами, которые преимущественно использовались при решении данной конкретной задачи.

Задачи на признаки и свойства делимости

Пример 1. Приведите пример пятизначного числа кратного 12, произведение цифр которого равно 40. В ответе укажите ровно одно такое число.

Решение. Разложим число 40 на простые множители: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Множителей всего четыре, то есть этих цифр недостаточно для пятизначного числа.

Учтём, что в цифры искомого числа всегда можно добавить единицу, так как произведение цифр числа при этом не изменится: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1$.

Таким образом, искомое число можно составить только из цифр: $1,2,2,2,5$.

Чтобы число было кратным 12, оно должно удовлетворять признакам делимости на 3 и на 4, так как $12 = 3 \cdot 4$. Сумма цифр $1+2+2+2+5=12$ – делится на 3, поэтому число будет делиться на 3 при любых перестановках цифр $1,2,2,2,5$.

Чтобы число делилось на 4, последние две его цифры должны образовывать число, делящееся на 4. Очевидно, что последней цифрой должна быть 2, так как цифры $1,5$ – нечетные. Проверим варианты $12, 22, 52$:

$$12:4=3;\ ,22:4=5{,}5;\ ,52:4=13.$$

Вывод: Поскольку 22 не делится на 4 нацело, то последние две цифры искомого числа должны быть 12 или 52, а первыми тремя цифрами могут быть любые перестановки из оставшихся трёх цифр. Возможные ответы:

$12252, 21252, 22152, 22512, 25212, 52212$ В ответ пишем один из них.

Ответ: 21252.

Пример 2. Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение. Раскладываем делитель – число 12 на простые множители:

$$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Следовательно, заданное число после вычеркивания трёх цифр должно делиться на 3 и 4 или на 2, еще раз на 2 и, наконец, на 3.

На 2 могут делиться только чётные числа, поэтому 1 в конце вычеркиваем. Останется число 18161512. Но нам нужно, чтобы число делилось на 2 дважды, т.е. чтобы оно делилось на 4.

Признак делимости на 4 утверждает, что на 4 должно делиться двузначное число, образованное последними двумя цифрами. Так как $12:4=3$, то две последние цифры числа 18161512 вычеркивать нельзя – они гарантируют делимость числа на 4.

Чтобы число делилось на 3, нужно чтобы на 3 делилась сумма его цифр. Сумма цифр числа 18161512 равна $1+8+1+6+1+5+1+2=25$.

Так как $25=3\cdot 8+1$, то для делимости числа на 3 нужно вычеркнуть одну из единиц. Однако по условию задачи нужно вычеркнуть две цифры.

$25=3\cdot 7+4$ – в числе 18161512 нет двух цифр для вычеркивания, сумма которых равнялась бы 4, т.к. последние цифры 1 и 2 вычёркивать нельзя.

$25=3\cdot 6+7$ – сумма двух вычеркнутых цифр будет равна 7, если вычеркнуть цифры 6 и любую из единиц, кроме последней.

Итак, возможные ответы: 811512 или 181512. Выбираем один из них.

Ответ: 181512.

Пример 3. Найдите все трёхзначные натуральные числа, большие 800, которые делятся на каждую свою цифру и все цифры которых различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение. Пусть $n=\overline{xyz}$ – искомое число. Тогда по условию:

$$8\le x\le 9,\ 1\le y,z\le 9,\ x\ne y\ne z$$

$$n\,\vdots\, x,\ n\,\vdots\, y,\ n\,\vdots\, z.$$

Пусть $x=8\Rightarrow n=\overline{8yz}=800+10y+z$. По условию искомое число должно делиться на 8, поэтому:

$$(800+10y+z):8,\ 800:8\Rightarrow(10y+z):8.$$

То есть число, записанное последними двумя цифрами числа n, должно делиться на 8. Так как все цифры числа n должны быть различны, то на роль искомых могут претендовать числа $816, 824, 832, 836, 852, 856, 864, 872, 876$. Осталось теперь отобрать из этих чисел те, которые делятся на каждую свою цифру. Это числа $816, 824, 864$.

Пусть теперь $x=9\Rightarrow n=\overline{9yz}=900+10y+z$. По условию искомое число должно делиться на 9, поэтому на роль искомых могут претендовать числа, все цифры которых различны и сумма цифр которых делится на 9: $918, 927, 936, 945, 954, 963, 972, 981$.

Отберём из этих чисел те, которые делятся на каждую свою цифру. Это число 963.

Ответ: 824.

Пример 4. Фома и Ерема нашли на дороге по пачке 11-рублевок. Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерема выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Ерема.

Решение. Пусть x руб. стоит стакан чая, y руб. – калач и z руб. – бублик. Тогда Фома потратил на всё $3x+4y+5z$ (руб.), по условию эта сумма делится на 11. Ерёма потратил $9x+y+4z$ (руб.). Покажем, что эта сумма также делится на 11:

$$9x+y+4z=3\underbrace{(3x+4y+5z)}_{\substack{\text{делится на } 11\\ \text{по условию}}}-\underbrace{(11y+11z)}_{\text{делится на } 11}.$$

Очевидно, что $9x+y+4z$ делится на 11 как сумма выражений, делящихся на 11.

Пример 5. Десятичное число на 1 больше квадрата натурального числа. доказать, что в нём есть одинаковые цифры.

Решение. Допустим обратное: все 10 цифр в искомом числе n различны. Тогда в записи числа n используются все 10 цифр от 0 до 9. Сумма этих цифр равна 45, следовательно, n делится на 9. Тогда точный квадрат, который на 1 меньше n, при делении на 9 дает остаток 8.

Однако, квадрат ни одного натурального числа не может оканчиваться цифрой 8. Получили противоречие. Значит, в десятичной записи числа n есть одинаковые цифры.

Задачи на простые и составные числа

Пример 1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

Решение. Пусть $n \cdot m = 1000$. Разложим 1000 на простые множители: $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Так как по условию числа n и m не делятся на 10 нацело, то в эти числа не могут входить простые множители 2 и 5 одновременно. Тогда $n = 2^3 = 8,\ m = 5^3 = 125$ (или наоборот). Сумма этих чисел равна: $n + m = 8 + 125 = 133$.

Ответ: 133.

Пример 2. Сколькими нулями заканчивается число $100!$?

Решение. Число заканчивается нулём, если в его разложении на простые множители содержатся одновременно множители 2 и 5. Очевидно, что «двоек» в разложении $100!$ будет больше, чем «пятёрок», то есть множитель 2 входит в каноническое представление числа $100!$ в большеё степени, чем множитель 5. Поэтому и нулей будет столько, чему равна степень 5 в каноническом представлении числа $100!$.

$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$, следовательно, чисел, кратных 5, в этом произведении ровно двадцать: $\underbrace{5, 10, 15, \ldots, 95, 100}_{20}$. Четыре числа из этих двадцати делятся на 5^2. Это числа $25, 50, 75, 100$. Итак, в каноническое разложение $100!$ на простые множители множитель 5 будет содержаться в двадцать четвёртой степени (чисел, делящихся на $5^3 = 125$ в разложении нет, так как $125 > 100$). Столько же будет и нулей.

Ответ: Число $100!$ заканчивается 24 нулями.

Пример 3. Является ли простым число $43^{111} + 8^{37}$?

Решение. Заметим, что данное число есть сумма кубов двух чисел, и разложим его на множители по соответствующей формуле:

$$43^{111} + 8^{37} = \left(43^{37}\right)^3 + \left(2^{37}\right)^3 = (43^{37} + 2^{37})((43^{37})^2 - 43^{37} \cdot 2^{37} + (2^{37})^2).$$

Поскольку число удалось разложить на произведение двух натуральных сомножителей, каждый из которых, очевидно, отличен от единицы, то это означает, по определению составного числа, что исходное число было составным.

Ответ: Число $43^{111} + 8^{37}$ является составным.

Пример 4. При каких натуральных n число $n^2 - 1$ является простым?

Решение. Разложим разность $n^2 - 1$ по формуле:

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \qquad (1).$$

Так как $n^2 - 1$ должно быть простым числом, то оно должно делиться только на себя и на единицу. Из равенства (1) следует, что $n^2 - 1$ делится на

$n-1$ и на $n+1$. Тогда один из множителей в этом равенстве равен единице, а второй – n^2-1. Очевидно, что единице равен меньший множитель:

$$n-1=1 \Rightarrow n=2 \Rightarrow n+1=3.$$

Ответ: Число n^2-1 будет простым при $n=2$.

Пример 5. Установить, является ли число $n^4+64 \quad (n \in Z)$ простым или составным.

Решение. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением случая натуральных n (при целых отрицательных n результат будет аналогичен, а при $n=0$ число будет составным). Чтобы дать ответ на этот вопрос, попробуем разложить данное число на множители:

$$n^4+64=(n^4+16n^2+64)-16n^2=(n^2+8)^2-(4n)^2=(n^2+4n+8)(n^2-4n+8).$$

Заметим, что $\forall n \in N$ каждый из двух сомножителей строго больше единицы. Это означает, что исходное число – составное.

Ответ: Число $n^4+64 \quad (n \in Z)$ является составным.

Пример 6. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1?

Найдите все возможные значения этого произведения.

Решение. Произведение нескольких различных простых чисел может делиться только на эти же самые простые числа и на единицу. Это значит, что каждое из этих простых чисел, уменьшенное на единицу, является либо другим простым числом из набора, либо произведением нескольких из них, либо единицей. Единственное простое число, при уменьшении которого на единицу получается также простое число – это число 3.

Единственное простое число, при уменьшении которого на единицу получается единица, – это число 2. Получаем первый вариант – $2 \cdot 3=6$.

Следующий вариант может получиться, если предыдущее число, увеличенное на единицу, также является простым числом: $6+1=7$ – это простое число, поэтому второй вариант – $2 \cdot 3 \cdot 7=42$.

Следующим членом произведения может стать либо $2 \cdot 7+1=15$, либо $3 \cdot 7+1=22$, либо $2 \cdot 3 \cdot 7+1=43$. Числа 15 и 22 не являются простыми числами, число 43 – простое.

Значит, третий вариант – $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43=1806$.

Чтобы доказать, что больше таких чисел нет, надо убедиться, что числа $2 \cdot 43+1=87$, $3 \cdot 43+1=130$, $7 \cdot 43+1=302$, $2 \cdot 3 \cdot 43+1=259$, $2 \cdot 3 \cdot 43+1=259$, $3 \cdot 7 \cdot 43+1=904$ и $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43+1=1807$ не являются простыми числами.

Ответ: 6, 42, 1806.

Задания для самостоятельной работы к практическому занятию 1

Задачи на признаки и свойства делимости

1. Найдите чётное пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

2. Найдите четырёхзначное число, кратное 15, произведение цифр которого больше 0, но меньше 25. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

3. Найдите трёхзначное число A, обладающее всеми следующими свойствами:

– сумма цифр числа A делится на 5;
– сумма цифр числа $A+3$ делится на 5;
– число A больше 700 и меньше 900.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

4. Найдите трёхзначное число A, обладающее всеми следующими свойствами:

– сумма цифр числа A делится на 8;
– сумма цифр числа $A+2$ делится на 8;
– число A меньше 3000.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

5. Найдите трёхзначное число A, обладающее всеми следующими свойствами:

– сумма цифр числа A делится на 8;
– сумма цифр числа $A+1$ делится на 8;
– в числе A сумма крайних цифр кратна средней цифре.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

6.Докажите, что дробь $\frac{2n+1}{3n+2}$ несократима при любых натуральных n.

7. Доказать, что при любом натуральном n выражение n^3-n делится нацело на 6.

8. Доказать, что число $10^{1999}-1999$ делится нацело на 9.

9.Приведите пример трёхзначного числа кратного 15, произведение цифр которого равно 30. В ответе укажите ровно одно такое число.

10. Доказать, что если сумма двух трёхзначных чисел делится на 37, то и шестизначное число, полученное приписыванием одного из данных чисел к другому, также делится на 37.

11. Приведите пример трёхзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9.

Найдите трёхзначное число, кратное 25, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

12. Цифры четырёхзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырёхзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 4536. Приведите ровно один пример такого числа.

13. Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

14. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки, и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

15. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами $1\ и\ 0$ и делится на 24.

16. Сумма цифр трёхзначного натурального числа A делится на 12. Сумма цифр числа $A+6$ также делится на 12. Найдите наименьшее возможное число A.

17. Сумма цифр трёхзначного натурального числа A делится на 13. Сумма цифр числа $A+5$ также делится на 13. Найдите такое число A.

18. Вычеркните в числе 123456 три цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 27. В ответе укажите получившееся число.

19. Вычеркните в числе 141565041 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 30. В ответе укажите ровно одно получившееся число.

20. Найдите четырёхзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и чётны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

21. Найдите четырёхзначное натуральное число, меньшее 1360, которое делится на каждую свою цифру и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

22. Найдите натуральное число, большее 1340, но меньшее 1640, которое делится на каждую свою цифру и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

22. Найти четырехзначное число, кратное 44, любые две соседние цифры которого отличаются на 1. В ответе укажите любое такое число.

23. Найдите пятизначное натуральное число, кратное 5, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

24. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 2 золотых монеты получить 3 серебряных и одну медную;
- за 5 серебряных монет получить 3 золотых и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

25. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m-n}{5n+2m}$, если

известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.

26. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень.

27. Известно, что a^2+b^2 делится на $ab,\ a,b\in N$. Доказать, что $a=b$.

28. Докажите, что $(a^3+b^3+c^3)\vdots 6 \Leftrightarrow (a+b+c)\vdots 6$.

Задачи на простые и составные числа

1. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

2.Доказать, что число $8n^2+10n+3$ является составным.

3. Найти все p, при которых p, $p+10$, $p+14$ – простые числа.

4. Корни уравнения $x^2+ax+b+1=0$ являются натуральными числами. Может ли число a^2+b^2 быть простым?

5. Является ли простым число $50^{20}-49^{11}$?

6. Является ли число $100007\cdot 100013\cdot 10001+55$ простым? Ответ обосновать.

7. Установить, является простым или составным число $n^3-6n^2+12n+117\quad (n\in N)$.

8. Доказать, что простое число $p\geq 5$ при делении на 6 даёт остаток 1 или 5.

9. Доказать, что квадрат простого числа $p\geq 5$ при делении на 24 даёт остаток1.

10. Найти натуральные значения n, такие, чтобы числа $n, n+10, n+14$ все были простыми.

11. Найти такое простое число p, чтобы число $2p^2+1$ было также простым.

12. Найти такое простое число p, чтобы числа $4p^2+1$ и $6p^2+1$ были также простыми.

13. При каких натуральных n число x^n-1 является простым?

14. Существует ли такое натуральное число n, при котором число x^n+4 является простым?

15. Решить в натуральных числах уравнение $x^2-y^2=p$, где p – простое число.

16. Доказать, что существует бесконечное множество простых чисел вида $3n+1,\ n\in N$.

17. Зная, что существует бесконечное множество простых чисел вида $3n+1$, доказать существование бесконечного множества простых чисел вида $6k+1$.

18. Доказать, что каждое натуральное число вида $4k+3$ имеет по крайней мере один простой делитель того же вида.

19. Найти все натуральные n, при которых число $n^2-10n+21$ простое.

20. Пусть p и q р – простые числа, большие 3. Доказать, что p^2-q^2 делится на 24.

21. Доказать, что для любого натурального $n>2$, одно из чисел 2^n+1 или 2^n-1 составным.

22. Доказать, что всякое число вида $19\cdot 8^n+17$, $n\in N$ – составное.

23. Целые числа a и b таковы, что $56a=65b$. Докажите, что $a+b$ – составное число.

Практическое занятие 2
Методы решения задач с целочисленными переменными

План занятия

1. Десятичная запись натурального числа
2. Метод анализа остатков
3. Метод анализа последних цифр числа

Десятичная запись натурального числа

В следующих примерах показано применение равенства:

$$n=\overline{a_k a_{k-1}...a_2 a_1 a_0}=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+a_1\cdot 10^1+a_0=\sum_{i=0}^{k}a_i 10^i \qquad (1),$$

где k – натуральное число или 0, $a_k,a_{k-1},...,a_2,a_1,a_0$ – цифры от 0 до 9, причём $a_k\neq 0$

а также обобщения этого равенства на случай систем счисления с произвольным основанием.

Пример 1. Доказать, что разность двузначных чисел $\overline{ab}-\overline{ba}$ всегда делится на 9.

Решение. Поскольку $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$, то $\overline{ab}-\overline{ba}=(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)\vdots 9$.

Пример 2. Шестизначное число начинается с цифры 2. Если эту цифру перенести на последнее место, то полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

Решение. Обозначим первоначальное число $\overline{2abcde}$. Тогда в результате перестановки первой цифры в конец числа получится новое число $\overline{abcde2}$. По условию задачи имеем уравнение $3\cdot(\overline{2abcde})=\overline{abcde2}$. Преобразуем числа к виду $\overline{2abcde}=200000+\overline{abcde}$, $\overline{abcde2}=\overline{abcde}\cdot 10+2$, и введём новую неизвестную $n=\overline{abcde}$. Тогда уравнение примет вид $3\cdot(200000+n)=10n+2$. Решив уравнение, найдём $n=85714$.

Ответ: Искомое число – 285714.

Пример 3. Известно, что натуральное трёхзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Могут ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться нацело на 37?

Решение. По условию $\exists k \in N: p = 100a + 10b + c = 37k$. Тогда

$q = 100b + 10c + a = 10(100a + 10b + c) - 999a = 37(10k - 27a) \vdots 37$,

$r = 100c + 10a + b = 100(100a + 10b + c) - 9990a - 999b =$

$= 37(100k - 270a - 27b) \vdots 37$.

Ответ: Числа q и r всегда делятся на 37.

Пример 4. Если неизвестное двузначное число разделить на число, изображённое теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 7. Найти это число.

Решение. Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ – неизвестное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ – число, изображённое теми же цифрами, но в обратном порядке. По условию задачи получаем два соотношения:

$$\overline{xy} \vdots \overline{yx} = 4(ост.3)$$
$$\overline{xy} \vdots (x + y) = 8(ост.7).$$

Запишем эти соотношения в виде уравнений, получим систему:

$$\begin{cases} 10x + y = 4(10y + x) + 3, \\ 10x + y = 8(x + y) + 7. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, выразим одну переменную через другую:

$$-\begin{cases} 10x + y = 4(10y + x) + 3, \\ 10x + y = 8(x + y) + 7. \end{cases}$$
$$0 = 32y - 4x - 4 \quad \Rightarrow$$
$$x = 8y - 1.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы и решим его:

$$10(8y - 1) + y = 8(8y - 1 + y) + 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 7.$$

Ответ: Искомое число 71.

Пример 5. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

Решение. По условию, двузначное число, на которое нужно было умножить число 136, равно $\overline{xy} = 10x + y,\ y = 2x \Rightarrow \overline{xy} = 10x + 2x = 12x$. Тогда число, на которое ученик умножил 136, имеет вид

$\overline{yx} = 10y + x = 10 \cdot 2x + x = 21x$. Разность между этими произведениями по условию составила 1224:

$$136 \cdot 21x - 136 \cdot 12x = 1224,$$
$$136 \cdot 9x = 1224,$$
$$1224x = 1224,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \overline{xy} = 12.$$

Искомое истинное произведение равно $136 \cdot 12 = 1632$.

Ответ: Истинное произведение 71.

Метод анализа остатков

Суть метода состоит в рассмотрении случаев различных остатков от деления на заданное число, что позволяет в конечном итоге решить поставленную задачу. В примерах этого пункта использовались следующие свойства остатков: остатки, полученные при делении двух натуральных чисел на некоторое натуральное число q, можно складывать (вычитать), перемножать при выполнении соответствующих действий над самими числами. Если при выполнении этих операций получится число, превышающее делитель q, то оно опять-таки заменяется остатком от деления на q.

Эти свойства остатков более наглядно формулируются на языке теории сравнений, основные положения которой будут рассмотрены позже.

Пример 1. Докажите, что квадраты натуральных чисел не дают остатка 2 при делении на 3.

Решение. Число n может давать при делении на 3 остатки $0,1,2$. Составим таблицу:

Остаток числа n при делении на 3	Остаток числа n^2 при делении на 3
0	0
1	1
2	1

Поясним заполнение третьей строки таблицы:

$$n = 3q + 2 \Rightarrow n^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1.$$

Пример 2. Существует ли такая степень двойки, из которой перестановкой можно получить другую степень двойки?

Решение. Пусть число $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = 2^m$ есть некоторая степень двойки. Вопрос заключается в следующем: если мы переставим цифры этого числа в произвольном порядке, можем ли при этом снова получить некоторую степень числа 2? (Например, $n = 128 = 2^7$, но ни одна перестановка цифр числа 128 не является степенью двойки).

Воспользуемся следствием из признака делимости на 9: любые два числа, отличающиеся лишь порядком следования цифр, дают при делении на 9 одинаковые остатки, и рассмотрим, какие остатки при делении на 9 могут давать числа вида 2^m:

Степень числа 2	Остаток степени при делении на 9
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	7
2^5	5
2^6	1
2^7	2
2^8	4
…	…

Докажем, что последовательность остатков при делении на 9 степеней двойки $2,4,8,7,5,1$ периодична с периодом 6. Для этого рассмотрим разность $2^{m+6} - 2^m = 2^m \cdot 63$ – очевидно, она делится на 9, следовательно, через 6 шагов остатки будут повторяться.

Предположение. Допустим теперь, что две степени двойки отличаются только порядком следования цифр (количество цифр одинаково!). Тогда они дают при делении на 9 одинаковые остатки, что возможно лишь через 6 шагов (т.е. 6 раз умножаем число на 2). Тогда одна из степеней двойки будет больше другой по величине не менее чем в $2^6 = 64$ раза, и, следовательно, в ней должно быть большее количество цифр. Получили противоречие с предположением.

Ответ: Не существует такая степень двойки, из которой перестановкой можно получить другую степень двойки.

Пример 3. Пусть остаток от деления натурального числа m на 7 равен 3. Найти остаток от деления на 7 числа $3m^2 + 5m + 1$.

Решение. Из условия следует, что число m имеет вид: $m = 7k + 3$.

Тогда $3m^2 + 5m + 1 = 3(7k+3)^2 + 5(7k+3) + 1 = 7(21k^2 + 23k + 6) + 1$.

Ответ: остаток от деления числа $3m^2 + 5m + 1$ на 7 равен 1.

Пример 4. Доказать, что при любых целых x число $x(x^2 + 5)$ делится нацело на 6.

Решение. Разобьём множество всех целых x на 6 групп в зависимости от остатка при делении на 6, т.е. рассмотрим 6 случаев: $x = 6n + q$, где $q \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

1) Пусть целое число делится на 6 нацело, то есть $x = 6n$, тогда $x(x^2+5) = 6n \cdot (36n^2+5) \vdots 6$.

2) Пусть целое число при делении на 6 даёт остаток 1, то есть $x = 6n+1$, тогда $x(x^2+5) = (6n+1)\cdot((6n+1)^2+5) =$

$$= (6n+1)(36n^2+12n+6) = (6n+1)\cdot 6 \cdot (6n^2+2n+1) \vdots 6.$$

3) Пусть целое число при делении на 6 даёт остаток 2, то есть $x = 6n+2$, тогда $x(x^2+5) = (6n+2)\cdot((6n+2)^2+5) =$

$$= (6n+2)(36n^2+24n+9) = 2\cdot(3n+1)\cdot 3\cdot(12n^2+8n+3) \vdots 6.$$

4) Пусть целое число при делении на 6 даёт остаток 3, то есть $x = 6n+3$, тогда $x(x^2+5) = (6n+3)\cdot((6n+3)^2+5) = (6n+3)(36n^2+36n+14) =$ $= 3\cdot(2n+1)\cdot 2\cdot(18n^2+18n+7) \vdots 6.$

5) Пусть целое число при делении на 6 даёт остаток 4, то есть $x = 6n+4$, тогда $x(x^2+5) = (6n+4)\cdot((6n+4)^2+5) =$

$$= (6n+4)(36n^2+48n+21) = 2\cdot(3n+2)\cdot 3\cdot(12n^2+16n+7) \vdots 6.$$

6) Пусть целое число при делении на 6 даёт остаток 5, то есть $x = 6n+5$, тогда $x(x^2+5) = (6n+5)\cdot((6n+5)^2+5) =$

$$= (6n+5)(36n^2+60n+30) = (6n+5)\cdot 6\cdot(6n^2+10n+5) \vdots 6.$$

Так как других вариантов делимости на 6 целых чисел нет, то мы рассмотрели все целые числа x и доказали, что в каждом из шести случаев выражение $x(x^2+5)$ кратно 6.

Пример 5. Учительница принесла в класс счётные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счётных палочек?

Решение. Пусть всего было n счётных палочек. Тогда условия задачи приводят к системе

$$\begin{cases} n = 2l+1 & (l = 0,1,2,\ldots), \\ n = 13k+7 & (k = 0,1,2,\ldots), \\ n = 9m & (m \in N), \\ n_{\min} = ? \end{cases}$$

Таким образом, требуется найти наименьшее натуральное нечётное число n, делящееся на 9 и дающее при делении на 13 остаток 7. Заметим, что в силу нечётности $n = 13k+7$ число k должно быть чётным, то есть

$k = 2p$ $(p = 0,1,2,...)$, причём меньшему n соответствует меньшее p, но тогда имеем $n = 26p + 7 = 27p + 9 - (p + 2)$.

Поскольку числа n и $27p+9$ делятся нацело на 9, то, следовательно, число $p + 2$ также должно быть кратно 9 (и при этом быть минимальным). Наименьшее целое неотрицательное p, для которого выполняются эти условия, равно 7, откуда находим $n = 26p + 7 = 26 \cdot 7 + 7 = 189$.

Ответ: Самое меньшее – 189 счётных палочек.

Пример 6. Сумма неполного частного и остатка, полученных при делении некоторого натурального числа на 100, равна сумме неполного частного и остатка, полученных при делении того же числа на 1995. Чему могут быть равны неполные частные?

Решение. Пусть n – натуральное число из условия задачи. Тогда:

$$n = 100q + r$$
$$n = 1995t + k,$$

где q,t – неполные частные, r,k – остатки при делении на 100 и 1995 соответственно. Тогда $100q + r = 1995t + k$ и по условию $q + r = t + k$. Из этих двух равенств получаем:

$$99q + (q + r) = 1994t + (t + k) \Rightarrow 99q = 1994t.$$

Разложив числа 99 и 1994 на простые множители, получим: $3^2 \cdot 11 \cdot q = 2 \cdot 997 \cdot t$. Так как числа 99 и 1994 взаимно простые, то из последнего равенства следует, что q должно быть кратно 1994, t – кратно 99.

Ответ: $q = 1994m,\ t = 99m,\ m \in N$.

Метод анализа последних цифр числа

Пример 1. Доказать, что число 19981999200020012002 не является квадратом целого числа.

Доказательство. Натуральное число n может оканчиваться на любую из десяти цифр от 0 до 9. Выясним, на какую цифру при этом может оканчиваться квадрат этого числа:

Последняя цифра числа n	Последняя цифра числа n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

Среди цифр, на которые оканчивается n^2, отсутствует цифра 2. Поэтому данное число не может являться квадратом целого числа.

Пример 2. Найти последнюю цифру числа 5432^{1998}.

Решение. Решим сначала более простую задачу, а именно найдём последнюю цифру числа 2^{1998}. Выясним, на какие цифры может оканчиваться натуральная степень числа 2:

Степень n числа 2	Последняя цифра числа 2^n
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2
2^6	4
…	…

Очевидно, что при дальнейшем увеличении показателя степени последовательность последних цифр $2,4,6,8$ будет циклически повторяться.

Представим число 1998 в виде: $1998 = 4 \cdot 499 + 2$. Имеем: $2^{1998} = 2^{4 \cdot 499 + 2} = \left(2^4\right)^{499} \cdot 4$. Заметим, что число $2^4 = 16$ в скобках оканчивается цифрой 6, и поэтому любая его натуральная степень также будет оканчиваться этой цифрой. Итак, число $\left(2^4\right)^{499}$ оканчивается цифрой 6, и это число умножается на 4. Поэтому последней цифрой их произведения будет 4. Если теперь повторить проведённые рассуждения для числа 5432^{1998}, то окажется, что добавление одной или нескольких цифр перед 2 не оказывает влияния на полученный результат.

Ответ: число оканчивается цифрой 4.

Пример 3. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + 2n + 3$ делится нацело на 2005?

Решение. Последней цифрой у натурального числа n может быть любая из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Последней цифрой у числа n^2 может быть соответственно 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Тогда последняя цифра у числа $n^2 + 2n + 3$, как несложно посчитать, может соответственно принимать значения 3, 6, 1, 8, 7, 8, 1, 6, 3, 2. Но тогда это число не делится даже на 5, а значит, не может делиться и на 2005.

Ответ: Не существует.

Задания для самостоятельной работы к практическому занятию 2

Десятичная запись натурального числа

1. Шестизначное число, оканчивается цифрой 7. Если эту цифру перенести в начало числа, то оно увеличится в 5 раз. Что это за число?

2. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке равно 2430. Найти эти числа.

3. Трёхзначное число при делении на 10 даёт в остатке 3. Если последнюю цифру числа перенести в начало его записи, то полученное число будет на 72 больше первоначального. Найдите исходное число.

4. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы число $454{*}{*}$ делилось на 2, 7 и 9?

5. Пусть a,b,c,d – различные цифры. Доказать, что число $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на число $\overline{aabb}$.

6. Число при некоторой перестановке своих цифр удваивается. Доказать, что оно делится на 9.

7. Найдите такую цифру x, чтобы: $a)\,\overline{573x2}\,\vdots\,6;\ b)\,\overline{890x52}\,\vdots\,72;\ c)\,\overline{367x5}\,\vdots\,75$.

8. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

9. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

10. Даны два двузначных числа, из которых второе записано теми же цифрами, что и первое, но в обратном порядке. Частное от деления первого числа на второе равно $1{,}75$. Произведение первого числа на цифру его десятков в $3{,}5$ раза больше второго числа. Найдите эти числа.

11. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найдите исходное число.

12. Определить целое положительное число по следующим данным: если его записать цифрами и присоединить справа цифру 4, то получится число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получится число, меньшее делителя на 27.

13. Было задано целое число. Требовалось увеличить его на $200\,000$ и поученное число утроить. Вместо этого приписали к цифровой записи данного числа справа цифру 2 и получили правильный результат. Найдите исходное число.

14. В рукописи задачника по арифметике был помещён пример, в котором данное число нужно было умножить на 3 и от полученного результата отнять 4. В типографии допустили опечатку: вместо знака умножения поставили знак деления, а вместо минуса – плюс. Тем не менее,

конечный результат от этого не изменился. Какой пример предполагалось разместить в задачнике?

15. Искомое число больше 400, но меньше 500. Найти его, если сумма его цифр равна 9, и оно равно $\frac{47}{36}$ числа, изображённого теми же цифрами, но в обратном порядке.

16. Найти трёхзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из исходного, то разность будет равна 297.

Метод анализа остатков

1. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

2. Найдите наименьшее трёхзначное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 5 даёт остаток 3 и которое записано тремя различными нечётными цифрами.

3. Найдите наименьшее трёхзначное натуральное число, которое при делении на 6 и на 11 даёт равные ненулевые остатки и у которого средняя цифра является средним арифметическим двух крайних цифр.

4. Найдите трехзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

5. Найдите трехзначное натуральное число, большее 600, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 3, и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

6. Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 8 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите ровно одно такое число.

7. Приведите пример трёхзначного натурального числа, большего 500, которое при делении на 3, 4 и на 5 даёт в остатке 2 и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите ровно одно такое число.

8. Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 3, на 5 и на 7 даёт в остатке 1, и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите ровно одно такое число.

9. Приведите пример трёхзначного натурального числа, которое при делении на 3, на 5 и на 7 даёт в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите ровно одно такое число.

10. Сумма неполного частного и остатка, полученных при делении натурального числа на 100, равна сумме неполного частного и остатка,

полученных при делении того же натурального числа на 2007. Чему могут быть равны неполное частное и остаток?

11. Найдите такие цифры x и y, чтобы: $a)\overline{2x39y}\vdots 88;$ $b)\overline{2x3y}\vdots 45;$ $c)\overline{7x37y}$ давало от деления на 4 остаток 3, а от деления на 11 остаток 7.

12. Натуральное число при делении на 2001 и на 2002 даёт остаток 315. Каков остаток от деления этого числа на 58?

13. В арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, разность прогрессии взаимно проста с натуральным числом k. Докажите, что любые k последовательных членов этой прогрессии дают все возможные остатки от деления на k, причём по одному разу.

14. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 6 даёт остаток 5, при делении на 7 – остаток 6, а при делении на 11 – остаток 10.

Метод анализа последних цифр числа

1. Найти последнюю цифру числа 2013^{2013}.
2. На какую цифру оканчивается число:
а) 9^{9999};
б) 3^{999};
в) 7^{1000};
г) $33^{77}+77^{33}$?
3. Найти две последние цифры числа 237^{401}.
4. Сколькими нулями оканчивается число $110!$?
5. Найти две последние цифры числа 243^{802}.
6. Найти последнюю цифру числа:
а) 2^{92012};
б) 3^{2010};
в) $5^{239}+9^{57}-7^{366}$.

Тема 2. НОД и НОК целых чисел. Элементы теории сравнений

План
1. Определение и свойства НОД и НОК двух целых чисел.
2. Алгоритм Евклида, расширенный алгоритм Евклида.
3. Конечные цепные дроби.
4. Элементы теории сравнений.
5. Диофантовы уравнения первой степени.

НОД и НОК двух целых чисел

Говорят, что *целое число* a *делится с остатком на целое число* $b\neq 0$, если существуют такие целые числа q и r, что $a=b\cdot q+r,\ 0\le r<|b|$ $\quad(*)$.

Число q называется *неполным частным*, а число r – *остатком* от деления a на b

Теорема (о делении целых чисел с остатком). Для всяких целых чисел a и $b, b \neq 0$ деление с остатком всегда выполнимо и однозначно определено.

Определение. Целое число $d \neq 0$ называется общим делителем целых чисел a и b, если каждое из этих чисел делится на число $d \neq 0$. Общий делитель чисел a и b называется их *наибольшим общим делителем*, если он делится на любой их общий делитель.

Обозначение: $d = НОД(a,b)$ или $d = (a,b)$.

Свойства НОД целых чисел, которые будут важны в дальнейшем.

1. Если $d = НОД(a,b)$ и $d_1 = НОД(a,b)$, то $d_1 = \pm d$.

2. Если число a делится на число $b \neq 0$ нацело, то $НОД(a,b) = b$.

3. Пусть $d_1 = НОД(a,b)$, $d = НОД(d_1,c)$, тогда $d = НОД(a,b,c)$.

4. Если $a = b \cdot q + r,\ 0 \leq r < |b|$, то $НОД(a,b) = НОД(b,r)$.

Определение. Целое число h называется *общим кратным* ненулевых целых чисел a и b, если h делится на каждое из этих чисел. Общее кратное целых чисел a и b называется их *наименьшим общим кратным*, если на него делится любое общее кратное.

Обозначение: $h = НОК(a,b)$ или $h = [a,b]$.

Свойства НОК целых чисел, которые схожи со свойствами наибольшего общего делителя.

1. Если $h = НОК(a,b)$ и $h_1 = НОК(a,b)$, то $h_1 = \pm h$.

2. Если число a делится на число $b \neq 0$ нацело, то $НОК(a,b) = a$.

3. Пусть $h_1 = НОК(a,b)$, $h = НОК(h_1,c)$, тогда $h = НОК(a,b,c)$.

Алгоритм и расширенный алгоритм Евклида

Пусть a и $b \neq 0$ – целые числа. Построим для них *последовательность Евклида*, выполняя последовательно деление с остатком.

$$\left.\begin{array}{l} a = bq_1 + r_1, \\ b = r_1q_2 + r_2, \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1}, \end{array}\right\} (1)$$

Последовательность натуральных чисел, полученная в ходе этих операций:

$$a \geq b > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > r_{n+1} = 0 \qquad (**)$$

и будет последовательностью Евклида.

Алгоритм построения последовательности Евклида называется *алгоритмом Евклида*, который используется при доказательстве существования НОД двух целых чисел.

Теорема (о существовании НОД целых чисел). Пусть a и $b \neq 0$ – целые числа. НОД этих чисел равен последнему не равному нулю остатку в последовательности Евклида: $НОД(a,b) = r_n$.

Теорема (о существовании НОК целых чисел). Пусть $a, b \neq 0$ – не равные нулю целые числа. Тогда $НОК(a,b) = \dfrac{ab}{НОД(a,b)}$.

Теорема (расширенный алгоритм Евклида). Пусть $d = НОД(a,b)$. Тогда существуют такие целые числа u и v, что: $d = a \cdot u + b \cdot v$.

Расширенный алгоритма Евклида заключается в следующем.

Из каждого равенства, которые получаются при построении последовательности Евклида, выразим остаток и подставим его в следующее равенство, пока не дойдем до наибольшего общего делителя чисел a и b. В последнем равенстве приведем подобные слагаемые при этих числах. Полученные коэффициенты и будут численными значениями u и v.

Конечные цепные дроби

Алгоритм Евклида связан с очень важным представлением чисел с помощью так называемых цепных или непрерывных дробей.

Пусть a и $b \neq 0$ – целые числа. Применяя к ним алгоритм Евклида, получаем конечную систему равенств (1).

Систему равенств (1) можно преобразовать к равносильной системе:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = q_1 + \dfrac{r_1}{b} = q_1 + \dfrac{1}{b/r_1}, \\ \dfrac{b}{r_1} = q_2 + \dfrac{r_2}{r_1} = q_2 + \dfrac{1}{r_1/r_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n + \dfrac{r_n}{r_{n-1}} = q_n + \dfrac{1}{r_{n-1}/r_n}, \\ \dfrac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1}, \end{array}\right\}(2),$$

из которой последовательной заменой каждой из дробей $\dfrac{b}{r_2}, \dfrac{r_2}{r_3}$ и т.д. ее соответствующим выражением из следующей строки получается представление дроби $\dfrac{a}{b}$ в виде:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots \; \dots\dots\dots \ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}} \qquad (3)$$

Выражение (3) называется *конечной цепной дробью* и записывается также в виде $\frac{a}{b}=[\, q_1,q_2,...,q_n\,]$. При этом $q_1 \in Z,\, q_2,\ldots,q_{n+1} \in N$, эти числа называются *элементами* цепной дроби

Определение. Дроби вида: $\delta_1 = q_1, \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \delta_3 = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}},\ldots,$ полученные из цепной дроби (3) на 1- м, 2- м,…, k-м шаге называются *подходящими дробями* данной непрерывной дроби.

Теорема (свойства подходящих дробей).

1. $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}},\ k \in \{1,2,\ldots,n\}.$

2. $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k,\ k \in \{1,2,\ldots,n\}.$

Элементы теории сравнений

Возьмем произвольное фиксированное натуральное число $m>1$ и будем рассматривать остатки при делении на m различных целых чисел. При рассмотрении свойств этих остатков и произведении операций над ними удобно ввести понятие так называемого сравнения по модулю.

Определение. Целые числа a *и* b называются сравнимыми по модулю m, если разность $a-b$ делится на m.

Обозначение: $a \equiv b(\bmod m)$

Основные свойства сравнений

1 (Признак сравнимости двух чисел). Два целых числа a *и* b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда a *и* b имеют одинаковые остатки при делении на m.

2. Отношение сравнимости рефлексивно, симметрично и транзитивно:

$$a \equiv a(\bmod m); a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow b \equiv a(\bmod m); a \equiv b(\bmod m) \wedge b \equiv c(\bmod m) \Rightarrow a \equiv c(\bmod m).$$

3. Обе части сравнения можно умножать на любое натуральное число; обе части сравнения и модуль можно умножать на любое натуральное число.

4. Обе части сравнения можно делить на их общий делитель, если он взаимно прост с модулем.

5. Обе части сравнения и модуль можно делить на любой их общий делитель.

6. Сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать и перемножать.

7. Обе части сравнения можно возводить в одну и ту же степень с натуральным показателем.

8. Любое слагаемое левой или правой части сравнения можно перенести с противоположным знаком в другую часть.

9. К любой части сравнении можно прибавить или отнять слагаемое, кратное модулю.

10. Если $a \equiv b(\bmod m)$, то $НОД(a,m) = НОД(b,m)$.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ – это мультипликативная функция, которая ставит в соответствие любому натуральному числу n количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Общая формула для вычисления значения функции Эйлера от произвольного аргумента: если $n = p^k$, где p – простое число, $k \in N$, то:

$$\varphi(n) = \varphi\left(p^k\right) = p^{k-1}(p-1) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Если p – простое число, то $\varphi(p) = p - 1$.

Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$ – каноническое разложение натурального числа n, то

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)...\left(p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1}\right).$$

Теорема Эйлера. Если $(a,m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$.

Теорема Ферма. Если p – простое число и $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$.

Теория сравнений дает следующий способ проверки арифметических действий. Обычно в качестве модуля т выбирают $m = 9$ или $m = 11$. Каждое число, записанное в десятичной системе счисления, сравнимо с суммой его цифр по модулю 9, так что мы можем сформулировать следующий способ «проверки с помощью девятки».

Для каждого числа вычисляется остаток от деления на 9 суммы цифр. Производя действия над числами, производят такие же действия над этими остатками. Результат рассматриваемых действий над этими остатками должен отличаться от суммы цифр искомого результата на число, кратное девяти.

Конечно, если ошибка такова, что разность между найденной и истинной величинами кратна 9, то она при этом способе проверки не будет замечена.

По модулю $m = 11$ каждое число, записанное в десятичной системе счисления, будет сравнимо с суммой цифр, взятых справа налево попеременно со знаками «плюс» и «минус».

Поэтому можно сформулировать следующий способ «проверки с помощью одиннадцати». Для каждого числа вычисляется остаток от деления на 11 суммы цифр, взятых попеременно справа налево со знаками «плюс» и «минус». Результат рассматриваемых действий над этими остатками должен отличаться от суммы взятых попеременно со знаками «плюс» и «минус» справа налево цифр искомого результата на число, кратное 11. Если ошибка будет кратна 11, она не будет замечена при этом способе.

При сложных вычислениях имеет смысл проводить две проверки: одну с помощью модуля 9, а другую с помощью модуля 11. В этом случае ошибка не будет замечена только, если она кратна 99, что, конечно, бывает очень редко.

Диофантовы уравнения первой степени от двух переменных

Решение в целых числах уравнений с целыми коэффициентами более чем с одним переменным представляет собой одну из трудных проблем теории чисел. Некоторые виды таких уравнений были рассмотрены знаменитым математиком древности Диофантом (3в.н.э.). В память о последнем уравнения с целыми коэффициентами более чем с одним переменным называют *диофантовыми*. Диофантовы уравнения первой степени называют *линейными диофантовыми уравнениями.*

Общий вид линейного диофантового уравнения: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d, a_i, d \in Z$

Линейное диофантово уравнение с двумя переменными имеет вид:

$$ax + by = c, a, b, c \in Z.$$

Сложность проблемы решения в целых числах уравнений с целыми коэффициентами заключается в том, она алгоритмически неразрешима. Советский математик Ю.В. Матиясевич доказал этот факт в 1970 году, то есть, что не существует общего алгоритма (способа) решения диофантоывых уравнений.

Однородным линейным диофантовым уравнением называется уравнение вида:

$$ax + by = 0, a, b \in Z \qquad (1).$$

Теорема 1. Если числа a и b взаимно простые, то уравнение (1) имеет бесконечно много целочисленных решений вида: $x_n = bn,\ y_n = -an,\ n \in Z.$

Диофантовы линейные уравнения общего вида называют *общими линейными уравнениями,* и в случае двух переменных имеют вид

$$ax + by = c, a, b, c \in Z \qquad (2).$$

Теорема 2. Если свободный член уравнения (2) не делится на наибольший общий делитель коэффициентов a и b, то уравнение (2) не имеет решений в целых числах.

Теорема 3. Любое уравнение $ax + by = c, a, b, c \in Z,\ НОД(a,b) = 1$, имеет хотя бы одно решение в целых числах.

Теорема 4. Множество всех целочисленных решений уравнения $ax + by = c, a, b, c \in Z,\ НОД(a,b) = d > 1, c \vdots d$ совпадает с множеством всех кратных $НОД(a,b) = d$.

Теорема 5. Если числа a и b взаимно простые, то уравнение (2) имеет бесконечно много целочисленных решений вида: $x_n = x_0 + bn,\ y_n = y_0 - an,\ n \in Z$, где (x_0, y_0) – частное решение уравнения (2).

Практическое занятие 3
Решение задач на НОК и НОД. Сравнение по модулю.

План занятия

1. Задачи на НОД и НОК
2. Задачи на свойства сравнений по модулю

Задачи на НОД и НОК

Пример 1. Найти такие натуральные числа a и b, что $НОД(a,b)=3$, $НОК(a,b)=630$, и при этом сумма $a+b$ минимальна.

Решение. Так как $НОД(a,b)=3$, то существуют такие взаимно простые натуральные числа m,n, что $a=3m$, $b=3n$. Тогда задачу можно сформулировать в виде: «Найти такие натуральные m,n, что $НОД(m,n)=1$, $НОК(m,n)=210$, и при этом сумма $m+n$ минимальна».

Задача решается перебором. Заметим, что условия симметричны относительно m и n. Пусть, ради определённости, $m \le n$. Так как $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, то возможны следующие случаи:

m	n	$m+n$
2	$3\cdot 5\cdot 7$	>70
3	$2\cdot 5\cdot 7$	>70
5	$2\cdot 3\cdot 7$	>40
7	$2\cdot 3\cdot 5$	37
$2\cdot 3$	$5\cdot 7$	41
$2\cdot 5$	$3\cdot 7$	31
$2\cdot 7$	$3\cdot 5$	29

Итак, сумма $m+n$ минимальна (и равна 29), если $m=14$, $n=15$. Им соответствуют $a=42$, $b=45$. С учётом симметрии получаем ответ.

Ответ: $(a;b)\in\{(42;45);(45;42)\}$.

Пример 2. Найти все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

Решение. Пусть a и b – искомые числа. По условию $НОД(a,b)=13$, значит, по определению наибольшего общего делителя, $a=13a_1, b=13b_1$, где числа a_1 и b_1 взаимно простые. Так как $НОК(a,b)=78$ и $НОК(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{НОД(a,b)}$, то

$$78=\frac{a\cdot b}{13}\Rightarrow a\cdot b=78\cdot 13=6\cdot 13^2 .$$

С другой стороны, $a\cdot b=13a_1\cdot 13b_1=13^2\cdot a_1\cdot b_1\Rightarrow 6\cdot 13^2=13^2\cdot a_1\cdot b_1\Rightarrow a_1\cdot b_1=6$. Осталось подобрать пары взаимно простых чисел, произведение которых равно 6 и вычислить для них a и b:

$$\begin{aligned}&a_1=1, b_1=6 \Rightarrow a=13, b=78\\&a_1=6, b_1=1 \Rightarrow a=78, b=13\\&a_1=2, b_1=3 \Rightarrow a=26, b=39\\&a_1=3, b_1=2 \Rightarrow a=39, b=26\end{aligned}.$$

С учётом того, что условия симметричны относительно a и b, получаем ответ.

Ответ: $(a;b)\in\{(13;78);(26;39)\}$.

Пример 3. Докажите, что дробь $\frac{6n+7}{10n+12}$ несократима при любых натуральных n.

Решение. Допустим, дробь сократима, тогда числитель и знаменатель должны иметь наибольший общий делитель – некоторое натуральное число d:

$$(6n+7)\vdots d,\ (10n+12)\vdots d.$$

Воспользуемся свойствами делимости натуральных чисел. Если два числа (выражения) делятся на некоторое натуральное число, то и любая линейная комбинация этих выражений делится на данное натуральное число:

$$[\alpha(6n+7)+\beta(10n+12)]\vdots d.$$

Подберём коэффициенты α и β так, чтобы слагаемые с n взаимно уничтожились: например, $\alpha=-5,\ \beta=3$. Тогда

$$\begin{aligned}&\alpha(6n+7)+\beta(10n+12)=-5(6n+7)+3(10n+12)=\\&=-30n-35+30n+36=-35+36=1.\end{aligned}$$

Получили, что $-1\vdots d$. По свойствам делимости натуральных чисел $d=1$, следовательно, НОД числителя и знаменателя исходной дроби равен единице. Следовательно, они взаимно просты и дробь несократима.

Пример 4. Интервалы движения городских автобусов по трём маршрутам, проходящим через общую остановку, составляют 15, 20 и 24 минуты соответственно. Сколько раз с 7.55 до 17.05 того же дня на этой остановке одновременно встречаются автобусы всех трёх маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 12.35?

Решение. Предположим, в некоторый момент времени все три автобуса встретились на остановке. Найдём, через сколько минут они вновь повстречаются на этой остановке. Это количество минут должно быть наименьшим общим кратным чисел 15, 20 и 24. Так как $15=3\cdot5$, $20=2^2\cdot5$, $24=2^3\cdot3$, то $НОК(15,20,24)=120$.

Отсчитывая этот отрезок времени от 12.35, находим все моменты встреч, попадающие в заданный временной интервал с 7.55 до 17.05 – $8.35, 10.35, 12.35, 14.35, 16.35$ – всего 5 раз.

Ответ: 5 раз.

Пример 5. Доказать, что $НОД(bc,ac,ab)$ делится на $НОД^2(a,b,c)$.

Решение. Пусть $d = НОД(bc, ac, ab)$, $d_1 = НОД(a, b, c)$.

Тогда $a = d_1 \cdot a_1, b = d_1 \cdot b_1, c = d_1 \cdot c_1$. Отсюда получаем:

$$bc = d_1 \cdot b_1 \cdot d_1 \cdot c_1 = d_1^2 \cdot b_1 \cdot c_1, ac = d_1 \cdot a_1 \cdot d_1 \cdot c_1 = d_1^2 \cdot a_1 \cdot c_1, bc = d_1 \cdot b_1 \cdot d_1 \cdot c_1 = d_1^2 \cdot b_1 \cdot c_1.$$

Таким образом, d_1^2 есть общий делитель чисел bc, ac, ab, поэтому d делится на d_1^2.

Пример 6. Доказать, что $НОД(a, b) = НОД(5a + 3b, 13a + 8b)$.

Решение. Пусть $d = НОД(a, b)$. По определению наибольшего общего делителя, a *и* b делятся на d, причём d делится на любой общий делитель этих чисел. Пусть $d_1 = НОД(5a + 3b, 13a + 8b)$, то есть $5a + 3b$ *и* $13a + 8b$ делятся на d_1, причём d_1 делится на любой общий делитель этих чисел.

По свойствам делимости, $5a + 3b$ делится на d, $13a + 8b$ делится на d, следовательно, d есть общий делитель этих чисел и, по вышесказанному, $d_1 \vdots d$ (1).

С другой стороны, по свойствам делимости $\alpha(5a + 3b) + \beta(13a + 8b)$ делится на d_1 при любых целых α *и* β. Возьмём сначала $\alpha = -13, \beta = 5$:

$$-13(5a + 3b) + 5(13a + 8b) \vdots d_1 \Leftrightarrow -65a - 39b + 65a + 40b = b \vdots d_1.$$

Возьмём теперь $\alpha = 8, \beta = -3$:

$$8(5a + 3b) - 3(13a + 8b) \vdots d_1 \Leftrightarrow 40a + 24b - 39a - 24b = a \vdots d_1.$$

Получили, что d_1 – общий делитель чисел a *и* b. Так как $d = НОД(a, b)$, то $d \vdots d_1$ (2). Из делимостей (1) и (2) следует, что $d_1 = d$ (считаем d *и* d_1 натуральными числами).

Задачи на свойства сравнений по модулю

С помощью свойств сравнений можно решить все те задачи, которые были рассмотрены в предыдущем пункте. Используем свойства сравнений для решения примера 3 из этого пункта: *Пусть остаток от деления натурального числа* m *на* 7 *равен* 3. *Найти остаток от деления на* 7 *числа* $3m^2 + 5m + 1$.

Решение. Из условия следует, что число $m \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Тогда

$$\begin{aligned} &m^2 \equiv 3^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 3m^2 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7); 5m \equiv 5 \cdot 3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow \\ &3m^2 + 5m + 1 \equiv -1 + 1 + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7) \end{aligned}.$$

Ответ: остаток от деления числа $3m^2 + 5m + 1$ на 7 равен 1.

Пример 1. Доказать, что число делится без остатка на 19 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, кратно 19.

Решение. Любое натуральное число n можно представить в виде $n = a + 10b$, где a – число единиц, b – число десятков числа n. Обозначим через m число десятков числа n, сложенное с удвоенным числом единиц: $m = b + 2a$.

$$10m-n=10(b+2a)-(a+10b)=10b+20a-a-10b=19a\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10m-n\equiv 0(\mathrm{mod}\,19).$$

Из последнего сравнения получаем, что $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)\Leftrightarrow 10m\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)$. Так как числа 10 *и* 19 взаимно простые, то $10m\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)\Leftrightarrow m\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)$.

Доказали, что $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)\Leftrightarrow m\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)$.

Пример 2. Запишите состоящее из одних девяток натуральное число, которое делится на 17 без остатка.

Решение. Воспользуемся малой теоремой Ферма: *если* p *– простое число,* a *– натуральное число, не делящееся на* p*, то* $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

Возьмём $a=10, p-17$, получим $10^{16}\equiv 1(\mathrm{mod}\,17)\Leftrightarrow 10^{16}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,17)$. То есть число $10^{16}-1$ делится на 17 без остатка и состоит из 16 девяток.

Ответ: 9999999999999999.

Пример 3. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

Решение. Пусть x – натуральное число (возможное количество солдат), удовлетворяющее условиям задачи. Тогда при делении на 4, 5 или 6 оно даёт остаток 1, а на 7 делится нацело. Запишем это на языке сравнений и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} x\equiv 1(\mathrm{mod}\,4), \\ x\equiv 1(\mathrm{mod}\,5), \\ x\equiv 1(\mathrm{mod}\,6), \\ x\equiv 0(\mathrm{mod}\,7). \end{cases}$$

Первые три сравнения системы равносильны сравнению $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,60)$, так как $60=HOK(4,5,6)$. Тогда вместо исходной системы решим равносильную ей систему:

$$\begin{cases} x\equiv 1(\mathrm{mod}\,60), \\ x\equiv 0(\mathrm{mod}\,7). \end{cases}$$

Запишем первое сравнение этой системы в виде равенства $x=60y+1,\ y\in Z$ и подставим во второе сравнение:

$$60y+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow 60y\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow 4y\equiv 6(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow 2y\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y\equiv 3+7(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow 2y\equiv 10(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow y\equiv 5(\mathrm{mod}\,7)\Leftrightarrow y=7t+5, t\in Z.$$

Подставим полученное значение y в выражение для x:

$$x=60(7t+5)+1,\ t\in Z$$
$$x=420t+301, t\in Z.$$

Итак, возможное число солдат у генерала – это натуральное число, которое при делении на 420 даёт остаток 301. Наименьшее из таких чисел есть число 301.

Ответ: 301.

Обобщением этой задачи может служить следующая: *Найти натуральные числа, дающие при делении на* 2, 3, 4, 5 *и* 6 *остаток* 1 *и, кроме того, делящиеся на* 7. *(Решить самостоятельно).*

Пример 4. Найти остаток от деления $3^{81}+7^{164}$ на 25.

Решение. Используем свойства сравнений и теорему Эйлера. Так как числа 3 и 25 и числа 7 и 25 взаимно простые, то по теореме Эйлера $3^{\varphi(25)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$ и $7^{\varphi(25)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$. Так как $\varphi(25)=\varphi(5^2)=5^1\cdot(5-1)=20$, то $3^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$ и $7^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\,25)$.

Разделим степени тройки и с остатком семёрки на 20: $81=20\cdot 4+1; 164=20\cdot 8+4$, тогда

$$3^{81}\equiv (3^{20})^4\cdot 3(\mathrm{mod}\,25)\equiv 3(\mathrm{mod}\,25);$$
$$7^{164}\equiv (7^{20})^8\cdot 7^4(\mathrm{mod}\,25)\equiv (7^2)^2(\mathrm{mod}\,25)\equiv 49^2\equiv(-1)^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,25).$$

По свойствам сравнений, $3^{81}+7^{164}\equiv 3+1\equiv 4(\mathrm{mod}\,25)$. Следовательно, при делении на 25 исходная сумма даёт остаток 4.

Ответ: 4.

Пример 5. Проверить правильность выполнения действий, используя свойства сравнений $8740297-561245=8179052$.

Решение. Проверку выполним по модулю 9 и 11:

$$8740297\equiv 8+7+4+0+2+9+7=37\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$$
$$561245\equiv 5+6+1+2+4+5=23\equiv 2(\mathrm{mod}\,9)$$
$$8179052\equiv 8+1+7+9+0+5+2=32\equiv 5(\mathrm{mod}\,9).$$

Так как $1-5=-4\equiv 5(\mathrm{mod}\,9)$, то сравнение подтверждает правильность выполнения действий, но не гарантирует (возможна ошибка на число, кратное 9).

Проверяем по модулю 11:

$$8740297\equiv 7+2+4+8-(9+0+7)=21-16\equiv 5(\mathrm{mod}\,11)$$
$$561245\equiv 5+2+6-(4+1+5)=13-10\equiv 3(\mathrm{mod}\,11)$$
$$8179052\equiv 2+0+7+8-(5+9+1)=17-15\equiv 2(\mathrm{mod}\,11).$$

Так как $5-3=2\equiv 2(\mathrm{mod}\,11)$, то сравнение подтверждает правильность выполнения действий. (На самом деле, и в этом случае возможна ошибка на число, кратное $9\cdot 11=99$, но вероятность такой ошибки уже ничтожно мала).

Задания для самостоятельной работы к практическому занятию 3

Задачи на НОД и НОК

1. Решить в натуральных числах системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=150, \\ НОД(x,y)=30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} НОД(x,y)=45, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{7}; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=8400, \\ НОД(x,y)=20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9}, \\ НОД(x,y)=28; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=20, \\ НОК(x,y)=10. \end{cases}$

2. Пусть $a,m,n\in N, a>1$. Доказать, что:

$$НОД\left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)=НОД(m,a-1).$$

3. Доказать, что если $НОД(a,a+5)=НОД(b,b+5)$, $a,b\in N$, то $a=b$.

4. Пусть $a,b,c\in N$. Возможно ли, чтобы $НОК(a,b)=НОК(a+c,b+c)$?

5. Существуют ли такие числа $a,b\in N$, чтобы дроби $\dfrac{a}{b},\dfrac{a+1}{b},\dfrac{a+1}{b+1}$ все были несократимы?

6. Найдите все пары взаимно простых чисел a и b, для которых выполнено равенство:

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{3}{13}.$$

7. Пусть $a,k\in N$, причём a – чётное число. Докажите, что:

$$НОД\left(a+1,a^{2k}+1\right)=1.$$

8. Доказать, что при всех целых k выполняется равенство $НОД(2k+1,9k+4)=1$.

9. Найти наибольший общий делитель чисел 11111111 и $\underbrace{11\ldots111}_{100\,раз}$.

10. Доказать, что при всех натуральных k выполняется равенство:

$$НОК\left(k^2+6k+9,k+4\right)=k^3+10k^2+33k+36.$$

11. Пусть A – совокупность различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратов никакого целого числа. Найдите числа, из которых состоит A.

12. Найти:

а) $НОД(2n+3,n+7)$;

б) хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел $n,n+1,n+2,\ldots n+20$ имеет с числом 30030 общий делитель, больший единицы.

Задачи на свойства сравнений по модулю

1. Доказать, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

2. Найти остаток от деления числа $10^{10}+10^{10^2}+\ldots+10^{10^{10}}$ на 7.

3. Можно ли число 2006 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?

4. Найти все натуральные числа $n>1$, для которых n^3-3 делится на $n-1$.

5. Доказать, что для любого натурального n число n^3+2n делится на 3.

6. Доказать, что для любого натурального n число n^5+4n делится на 5.

7. Доказать, что для любого натурального n число n^2+1 не делится на 3.

8. Доказать, что для любого четного натурального n число n^3-4n делится на 48.

9. Доказать, что для любого нечетного натурального n число $n^6-n^4-n^2+1$ делится на 128.

10. Доказать, что при любых целых a и b число $a^2+9ab+b^2$ делится на 11.

11. Доказать, что число $3^{1974}+5^{21974}$ делится на 13.

12. Доказать, что число $21^{10}-1$ делится на 2200.

13. Натуральные числа a,b,c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a,b,c, если известно, что при указанных условиях сумма $a+b+c$ максимальна.

14. Доказать, что нет такого числа в последовательности $11, 111, 1111, 11111, \ldots$, которое являлось бы квадратом целого числа.

15. Доказать, что числа $16, 1156, 111556, 11115556, \ldots$, являются полными квадратами.

16. Доказать, что разность между трехзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, либо равна нулю, либо не может быть квадратом целого числа.

17. На доске написано число x. За каждый ход его можно заменить либо на число $2x+4$, либо на число $3x+8$, либо на число x^2+5x. Можно ли за несколько таких ходов из числа 3 получить число 2002?

18. Доказать, что следующие сравнения являются неверными:

$5^{1812} \equiv 1964 \pmod{125}$, $11^{207} \equiv 6 \pmod{21}$, $(2m+1)(2m+1) \equiv 2k \pmod 6$, $n,m,k \in Z$.

19. Найти остаток от деления $3^{81}+7^{164}$ на 25.

20. Найти остаток от деления $125^{79}+2^{143}$ на 34.

21. Показать, что натуральное число, записанное в десятичной системе счисления, сравнимо по $\bmod 9$ и по $\bmod 3$ с суммой своих цифр.

22. Найти остаток от деления на число 37 числа $A=13^{16}-2^{25}\cdot 5^{15}$.

23. Найти остаток от деления числа 48^{5n+3}, $n \in Z^+$ на 11.

24. Найти остаток от деления числа 20^{6n+5}, $n \in Z^+$ на 9.

25. Доказать, что число вида $\frac{18a+5b}{19} \in Z$, если известно, что число $\frac{11a+2b}{19} \in Z$, $a,b \in Z$.

26. Проверить правильность выполнения действий (с помощью 9 и 11):

$2504+91382=116423$

$4371 \cdot 1243 = 5433153$

$4237 \cdot 27925 = 118275855$

$421767 : 3429 = 123$

$5839131309 : 67377 = 85847$

$1965^2 = 3761225$

$1989^2 + 20315 = 10364211$

27. Найти все числа вида $\overline{13xy45z}$, делящиеся на 729.

28. Найти способ проверки «с помощью девятки» при извлечении корня любой степени. Найденным способом показать ошибочность записи $\sqrt[5]{371293} = 23$.

Практическое занятие 4
Методы решения линейных диофантовых уравнений с двумя переменными
(линейных уравнений в целых числах)

План занятия

1. Линейные однородные уравнения
2. Общие линейные уравнения

Линейные однородные уравнения

Пример 1. Решить однородное линейное уравнение $80x + 126y = 0.$

Решение. Разложим коэффициенты $a = 80$ *и* $b = 126$ на простые множители:

$$a = 80 = 2^4 \cdot 5, \ b = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Так как $НОД(80{,}126) = 2,$ то разделим обе части исходного уравнения на 2:

$$40x + 63y = 0.$$

Перепишем последнее уравнение в виде $40x = -63y$ и используем разложение коэффициентов на простые множители: $2^3 \cdot 5 \cdot x = -3^2 \cdot 7 \cdot y.$

По свойствам делимости правая часть уравнения должна делиться на $2^3 \cdot 5 = 40$, причём 40 и $3^2 \cdot 7 = 63$ – взаимно простые числа, поэтому y должна делиться на 40, то есть $y = 40k, \ k \in Z$.

Аналогичные рассуждения применимы и к правой части уравнения, поэтому $x = 63t, \ t \in Z$.

Ответ: $x = 63t, \ t \in Z$, $y = 40k, \ k \in Z$.

Общие линейные уравнения

Можно выделить следующие методы решения общих линейных уравнений.

Метод подбора частного решения соответствующего однородного уравнения

Этот метод основан на использовании теоремы 5.

Пример 2. Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

Решение. По условию, существуют такие целые числа x *и* y, что:

$$n = 6x + 4 \text{ и } n = 15y + 7.$$

Исключим из этих равенств число n: $6x + 4 = 15y + 7 \Leftrightarrow 2x - 5y = 1 \quad (3).$

Чтобы решить это уравнение, прежде всего, найдем какое-нибудь его частное решение в целых числах. Это можно сделать, например, методом подбора: пусть $x_0 = -2, y_0 = -1$. Тогда $2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) = 1$.

Вычтем из уравнения (3) последнее равенство:

$$-\begin{array}{l} 2 \cdot x - 5 \cdot y = 1 \\ 2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) = 1 \\ \hline 2 \cdot (x+2) - 5(y+1) = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow 2 \cdot (x+2) = 5(y+1) \qquad (4).$$

Общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид:

$$x + 2 = 5k,\ y + = 2k,\ k \in Z.$$

Тогда для числа n имеем: $n = 6x + 4 = 6(5k - 2) + 4 = 30k - 8.$ Так как остаток при делении на 30 должен быть положительным числом, то перепишем последнее равенство в виде: $n = 30k - 8 = 30(k-1) + 22$, отсюда остаток от деления n на 30 равен 22.

Вместо выполнения преобразования (4) можно сразу использовать теорему 5: частное решение уравнения $2x - 5y = 1$ имеет вид $x_0 = -2, y_0 = -1,$ тогда общее его решение можно записать как $x = -2 - 5k,\ y = -1 + 2k,\ k \in Z$. Отсюда снова получаем:

$$n = 6(-2 - 5k) + 4 = -30k - 8 = 30 \cdot (-k) - 8 = 30(-1 - k) + 22.$$

Ответ: 22.

Пример 3. Фирма продавала чай в центре города по 7 руб., а кофе по 10 руб. за стакан; на вокзале — по 4 руб. и 9 руб. соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

Пусть x *и* y – соответственно количество стаканов чая и кофе, проданных в центре города. Тогда количество стаканов чая и кофе, проданных на вокзале, будет равно $20 - x$ и $20 - y$. По смыслу задачи переменные x *и* y – неотрицательные целые числа, не превосходящие 20.

Общая выручка в центре равна $7x + 10y$ (руб.), а на вокзале – $4(20 - x) + 9(20 - y)$ (руб.) По условию задачи эти величины равны:

$$7x + 10y = 4(20 - x) + 9(20 - y) \Leftrightarrow 7x + 10y + 4x + 9y = 80 + 180 \Leftrightarrow 11x + 19y = 260.$$

Найдем частное решение уравнения $11x+19y=260$, например, $x_0=15,\ y_0=5$.

Так как числа 11 и 19 взаимно простые, то по теореме 5, общее решение уравнения $11x+19y=260$ запишется в виде: $x=15+19n,\ y=5-11n,\ n\in Z$. По условию числа x *и* y – неотрицательные целые числа, не превосходящие 20, откуда очевидно, что n может быть равно только нулю, следовательно, $y=5$.

Ответ: В центре города было продано 5 стаканов кофе.

Метод решения относительно одной переменной

Пример 4. Решить в целых числах уравнение $5x+19y=111$. Найти одно частное решение этого уравнения.

Решение. Будем решать исходное уравнение относительно той переменной, которая имеет меньший по модулю коэффициент:

$$5x+19y=111 \Leftrightarrow x=\frac{111-19y}{5}.$$

Подставим в полученное выражение для переменной x вместо переменной y поочерёдно значения, которые может принимать остаток от деления целого числа на 5, то есть, числа $0,1,2,3$ *и* 4:

$$x=\frac{111-19\cdot 0}{5}=\frac{111}{5}\notin Z;$$
$$x=\frac{111-19\cdot 1}{5}=\frac{92}{5}\notin Z;$$
$$x=\frac{111-19\cdot 2}{5}=\frac{73}{5}\notin Z;$$
$$x=\frac{111-19\cdot 3}{5}=\frac{54}{5}\notin Z;$$
$$x=\frac{111-19\cdot 4}{5}=\frac{35}{5}=7\in Z.$$

Таким образом, $x_0=7,\ y_0=4$ – частное решение исходного уравнения. Тогда общее решение примет вид: $x=7+19n,\ y=4-5n,\ n\in Z.$

Универсальный метод (использование алгоритма Евклида)

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $89x-137y=1520$.

Решение. Очевидно, что первые два метода в данном случае использовать затруднительно из-за больших коэффициентов. Поэтому используем расширенный алгоритм Евклида и выразим $НОД(89,137)=1$ через сами коэффициенты $a=89$ *и* $b=137$, то есть найдём такие целые числа u *и* v, чтобы $89u+137v=au+bv=1$:

$$\begin{aligned}
&137=89\cdot 1+48 \Rightarrow 48=137-89=b-a,\\
&89=48\cdot 1+41 \Rightarrow 41=89-48=a-48,\\
&48=41\cdot 1+7 \Rightarrow 7=48-41,\\
&41=7\cdot 5+6 \Rightarrow 6=41-7\cdot 5,\\
&7=6\cdot 1+1 \Rightarrow 1=7-6,\\
&6=6\cdot 1+0
\end{aligned}$$

Тогда для последовательности остатков получим:

$$41 = a - 48 = a - (b - a) = 2a - b,$$
$$7 = 48 - 41 = (b - a) - (2a - b) = -3a + 2b,$$
$$6 = 41 - 7 \cdot 5 = (2a - b) - (-3a + 2b) \cdot 5 = 17a - 11b,$$
$$1 = 7 - 6 = (-3a + 2b) - (17a - 11b) = -20a + 13b \qquad \Rightarrow u = -20,\ v = 13.$$

Итак, получили, что $89 \cdot (-20) + 137 \cdot 13 = 1 \Leftrightarrow 89 \cdot (-20) - 137 \cdot (-13) = 1$, умножим обе части этого равенства на 1520:

$$89 \cdot (-20) \cdot 1520 - 137 \cdot (-13) \cdot 1520 = 1520 \Leftrightarrow 89 \cdot (-30400) - 137 \cdot (-19760) = 1520.$$

Следовательно, $x_0 = -30400,\ y_0 = -19760$ – частное решение исходного уравнения. Тогда его общее решение примет вид: $x = -30400 - 137n,\ y = -19750 + 89n,\ n \in Z.$

Пример 6. Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе 100 рублей. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тема обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Темы?

Решение. Пусть правильная сдача равна x руб. и y коп., то есть $100x + y$ (коп.). Реально кассир выплатила сумму y руб. и x коп., то есть $100y + x$ (коп.). После покупки пипеток у Темы осталось $100y + x - 140$ (коп). По условию эта сумма в три раза больше, чем $100x + y$. Это дает следующее уравнение для неизвестных x и y:

$$100y + x - 140 = 3(100x + y) \Leftrightarrow -299x + 97y = 140 \qquad (5).$$

Поскольку число копеек не может быть больше, чем 99, то $1 \le x, y \le 99$.

Используем для решения уравнения (5) универсальный метод решения (расширенный алгоритм Евклида). Выразим $НОД(299,97) = 1$ через коэффициенты $a = 299$ и $b = 97$, то есть найдём такие целые числа u и v, чтобы $299u + 97v = au + bv = 1$:

$$299 = 97 \cdot 3 + 8 \Rightarrow 8 = 299 - 97 \cdot 3 = a - 3b,$$
$$97 = 8 \cdot 12 + 1 \ \Rightarrow\ 1 = 97 - 8 \cdot 12 = b - (a - 3b) \cdot 12 = 37b - 12a,$$
$$8 = 8 \cdot 1 + 0$$

Тогда получим: $-12a + 37b = 1 \Leftrightarrow -12 \cdot 299 + 37 \cdot 97 = 1 \Leftrightarrow 12 \cdot (-299) + 37 \cdot 97 = 1$, умножим обе части этого равенства на 140:

$$-299 \cdot 12 \cdot 140 + 97 \cdot 37 \cdot 140 = 140 \Leftrightarrow -299 \cdot 1680 + 97 \cdot 5180 = 140.$$

Следовательно, $x_0 = 1680,\ y_0 = 5180$ – частное решение исходного уравнения. Тогда его общее решение примет вид: $x = 1680 + 97n,\ y = 5180 + 299n,\ n \in Z.$

Условия $1 \le x, y \le 99,\ n \in Z$ позволяют найти значение параметра n:

$$\begin{cases}1 \le 1680 + 97n \le 99, \\ 1 \le 5180 + 299n \le 99\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1679 \le 97n \le -1581, \\ -5179 \le 299n \le -5081\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1679}{97} \le n \le -\dfrac{1581}{97}, \\ -\dfrac{5179}{299} \le n \le -\dfrac{5081}{299}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-17\dfrac{30}{97} \le n \le -16\dfrac{29}{97}, \\ -17\dfrac{96}{299} \le n \le -16\dfrac{297}{299}\end{cases} \Leftrightarrow n = -17.$$

Тогда $x = 1680 + 97 \cdot (-17) = 31,\ y = 5180 + 299 \cdot (-17) = 97$.

То есть правильная сдача должна составить 31 руб. 97 коп., а стоимость всех покупок Тёмы, соответственно равна $100 - 31{,}97 = 69{,}43$ (руб.).

Ответ: 69 руб. 43 коп.

Метод разложения в конечную цепную дробь

Пример 7. Решить в целых числах уравнение $142x + 82y = 6$.

Решение. $НОД(142{,}82) = 2,\ 6 \vdots 2$, следовательно, уравнение имеет решение. Разделим обе части уравнения на их общий делитель, получим равносильное уравнение $71x + 41y = 3$. Разложим $\dfrac{71}{41}$ в цепную дробь: $\dfrac{71}{41} = [1;1,2,1,2,1,2]$ и вычислим все подходящие дроби:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}; \frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}; \frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{3}; \frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{4}; \frac{P_4}{Q_4} = \frac{19}{11}; \frac{P_5}{Q_5} = \frac{26}{15}; \frac{P_6}{Q_6} = \frac{71}{41}.$$

На основании свойств подходящих дробей

$$P_{k-1} \cdot Q_k - P_k \cdot Q_{k-1} = (-1)^k;\quad k = 6, P_6 = 71, P_5 = 26, Q_6 = 41, Q_5 = 15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 26 \cdot 41 - 71 \cdot 15 = (-1)^6 \Leftrightarrow 71 \cdot (-15) + 41 \cdot 26 = 1.$$

Умножим обе части последнего равенства на 3:

$71 \cdot (-45) + 41 \cdot 78 = 3 \Rightarrow x_0 = -45, y_0 = 78$ –частное решение уравнения $71x + 41y = 3$.

Тогда все решения этого уравнения имеют вид:

$$x = -45 + 41t, y = 78 - 71t, t \in Z \text{ или}$$
$$x = -4 + 41t, y = 7 - 71t, t \in Z.$$

Ответ: $x = -4 + 41t, y = 7 - 71t, t \in Z$.

Пример 8. Транспортной компании, имеющей грузовые машины грузоподъёмностью 3,5 и 4,5 т, предложено перевезти 53 т груза. Сколько машин того и другого типа должен выделить диспетчер компании для перевозки указанного груза одним рейсом при условии полного использования грузоподъёмности всех выделенных машин?

Решение. Пусть x – число выделенных машин грузоподъёмностью 3,5 т, y – число выделенных машин грузоподъёмностью 4,5 т. Чтобы выполнить условие задачи, нужно решить уравнение $3{,}5x + 4{,}5y = 53,\ x, y \ge 0$.

Заменим данное уравнение равносильным уравнением с целыми коэффициентами:

$$35x + 45y = 530,\ НОД(35{,}45) = 5,\ 530 : 5 = 106.$$

Разделим обе части уравнения на их общий делитель 5, получим равносильное уравнение $7x+9y=106$. Разложим $\frac{7}{9}$ в цепную дробь: $\frac{7}{9}=[0;1,3,2]$ и вычислим все подходящие дроби:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{0}{1};\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{1};\frac{P_2}{Q_2}=\frac{3}{4};\frac{P_3}{Q_3}=\frac{7}{9}.$$

На основании свойств подходящих дробей

$$P_{k-1}\cdot Q_k-P_k\cdot Q_{k-1}=(-1)^k;\quad k=3,P_3=7,P_2=3,Q_3=9,Q_2=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\cdot 9-4\cdot 7=(-1)^3\Leftrightarrow 7\cdot 4-9\cdot 3=1.$$

Умножим обе части последнего равенства на 106:

$7\cdot(4\cdot 106)+9\cdot(-3\cdot 106)=106\Rightarrow x_0=424, y_0=318$ –частное решение уравнения

$$7x+9y=106.$$

Тогда все решения этого уравнения имеют вид:

$$x=424+9t,\ y=-318-7t, t\in Z.$$

Учтём, что $x,y\geq 0$: $\begin{cases}424+9t\geq 0,\\ -318-7t\geq 0,\\ t\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -47\frac{1}{9},\\ t\leq -45\frac{3}{7},\\ t\in Z\end{cases}.$

Целыми решениями системы будут $t_1=-46, t_2=-47$. Если $t_1=-46$, то $x_1=10, y_1=4$; если $t_2=-47$, то $x_2=1, y_2=11$.

Ответ: Машины можно выделить двумя способами: 10 машин грузоподъёмностью 3,5 т, 4 машины грузоподъёмностью 4,5 т или 1 машина грузоподъёмностью 3,5 т, 11 машин грузоподъёмностью 4,5 т.

Задания для самостоятельной работы к практическому занятию 4

1. Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить из 48 конфет «Ласточка» и 36 конфет «Белочка», если надо использовать все конфеты? Сколько конфет каждого сорта будет в одном подарке?

2. Для поездки за город работникам завода было выделено несколько автобусов, с одинаковым числом мест в каждом автобусе; 424 человека поехали в лес, 477 человек — на озеро. Все места в автобусах были заняты, и ни одного человека не осталось без места. Сколько автобусов было выделено и сколько пассажиров было в каждом автобусе?

3. Шаг Володи 75 см, а шаг Кати – 60 см. На каком наименьшем расстоянии они оба сделают по целому числу шагов?

4. В велосипеде ведущая шестерня имеет 44 зубца, а ведомая шестерня имеет 20 зубцов. Определите наименьшее число оборотов, которое сделает ведущая шестерня, чтобы шестерни заняли первоначальное положение. Сколько оборотов за это время сделает ведомая шестерня?

5. На соревнованиях по настольному теннису участвовали равные по составу команды, всего 145 мальчиков и 87 девочек. Во всех командах было

одинаковое число мальчиков и одинаковое число девочек. Сколько команд участвовало в соревнованиях? Сколько мальчиков и сколько девочек было в каждой команде?

6. На юбилей 57 школы Московский Монетный Двор выпустил юбилейные монеты достоинством в 57 копеек. А на юбилей 239 школы монеты достоинством в 239 копеек выпустил Санкт-Петербургский Монетный Двор. Чтобы никому не было обидно, количество денег, выпущенных оба раза, было одинаково. Смогут ли Олег и 36 его друзей разделить все выпущенные монеты так, чтобы каждому досталось одинаковое количество монет?

7. Имеются контейнеры двух видов: по 130 и 160 кг. Сколько нужно контейнеров первого и второго видов, если они вместе весят 3 тонны? Укажите все решения

8. Решить в целых числах следующие уравнения:

1) $143x+169y=5;$	2) $237x+44y=1;$
3) $275x+145y=10;$	4) $439x+118y=3;$
5) $1256x+847y=119;$	6) $3x+8y=5;$
7) $2x+5y=7;$	8) $42x+31y=67;$
9) $23x+49y=53;$	10) $5x+28y=59;$
11) $12x+7y=41;$	12) $9x+17y=105;$
13) $35x-37y=12;$	14) $4x-14y=7;$
15) $7x-12y=15;$	16) $12x-7y=29;$
17) $8x-13y=63;$	18) $7x-19y=23;$
19) $39x-22y=10;$	20) $43x+37y=21;$
21) $122x+129y=2;$	22) $258x-172y=56;$
23) $3x+4y=13;$	24) $26x+34y=13;$
25) $45x-37y=25;$	26) $17x-25y=117;$
27) $81x-48y=33;$	28) $53x+47y=11;$
29) $70x+33y=1;$	30) $60x-91y=2.$

9. Для перевозки зерна имеются мешки по 60 и 80 кг. Сколько нужно тех и других мешков для перевозки 44 кг зерна?

10. Требуется найти два натуральных числа, каждое из которых не превышает 200, причём таких, что разность между ними равна 11, уменьшаемое кратно 9, а вычитаемое кратно 17.

11. Сколько потребуется сосудов по $0{,}5$ и $0{,}8$ л для разлива 12 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?

12. Для проведения эстафеты по бегу требуется разделить дистанцию в $6{,}7$ км на участки длиной по 175 м для женщин и по 300 м для мужчин. Из скольких спортсменов, как мужчин, так и женщин, должны состоять команды, участвующие в эстафете?

13. Найти все целые числа, такие, что дробь $\frac{7-11x}{10}$ была равна целому положительному числу, дающему при делении на 4 остаток 3.

14. Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе – 17.

15. Найти общий вид чисел, кратных 8, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

Тема 3. Рациональные, иррациональные, действительные числа

План

1. Понятие арифметической дроби. Классификация дробей.
2. Правило перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.
3. Иррациональные и действительные числа.

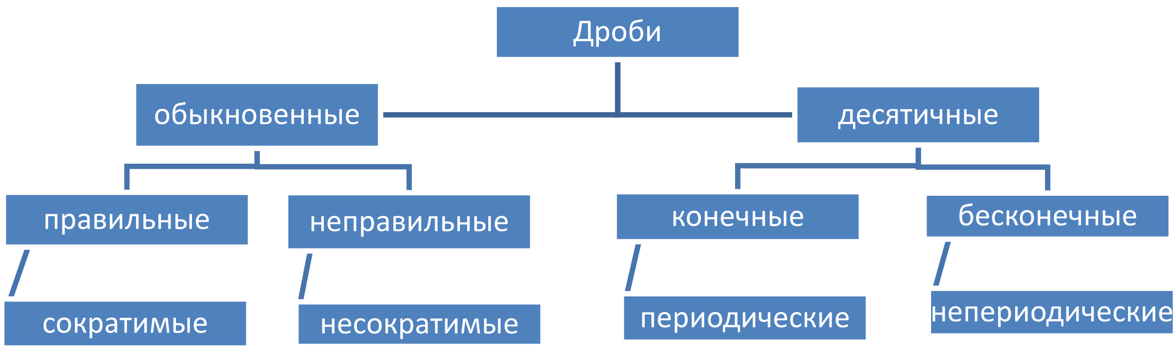
Понятие арифметической дроби. Классификация дробей

Арифметическая (обыкновенная) дробь – это число, составленное из целого числа долей единицы. Дробь изображается символом p/q, где p – *числитель* дроби, он показывает число взятых долей единицы и делится на столько долей, сколько показывает (знаменует) *знаменатель* q. Дробь можно рассматривать как частное от деления одного (целого) числа p на другое (натуральное) q.

Обыкновенная дробь p/q называется *правильной*, если её числитель по модулю меньше знаменателя, или $p/q<1$, и *неправильной* в противном случае. Неправильная дробь может быть представлена в виде суммы целого числа и правильной дроби (*смешанная* дробь).

Обыкновенную дробь называют *сократимой,* если существует такое отличное от единицы натуральное число n, что $\frac{p}{q}=\frac{nm}{nk},(m\in Z,k\in N)$, и *несократимой*, если $|p|$ и q – взаимно простые числа.

Две дроби называют *равными*, если их несократимые представления совпадают. Следствие: при умножении числителя и знаменателя дроби одновременно на одно и то же число получается дробь, равная данной.



Дробь p/q называется *десятичной*, если её знаменатель q является натуральной степенью числа 10. Для десятичной дроби используется запись $a_0,a_1a_2..a_k...$, где a_0 – целое число, а $a_1,a_2,...$ – цифры, принимающие значения 0, 1, 2, …, 9. Десятичные дроби, имеющие после запятой конечное число ненулевых цифр, называются *конечными*. В противном случае дробь считается *бесконечной*.

Бесконечные десятичные дроби разбиваются на два класса: *периодические*, когда, начиная с некоторого момента, одна и та же группа цифр неограниченно повторяется, и *непериодические*, если не существует такой бесконечно повторяющейся группы цифр после запятой. Повторяющуюся группу цифр после запятой называют *периодом* и заключают в круглые скобки. Если среди $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ нет чисел, отличных от нуля, то такое число называют нулевой бесконечной периодической дробью и обозначают 0,(0).

Определение 1. Рациональным называется число, представимое в виде обыкновенной дроби p/q, где $p \in Z, q \in N$. Так как любую обыкновенную дробь путём сокращения можно привести к несократимому виду, то, как правило, в определение рационального числа сразу добавляют условие несократимости дроби, что не влияет на суть определения.

Определение 2. Рациональным называется число, представимое в виде десятичной бесконечной периодической дроби.

Правило перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

Теорема 1. Чтобы перевести периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Два рациональных числа p_1/q_1 и p_2/q_2 ($p_1, p_2 \in Z, q_1, q_2 \in N$) считают, по определению, равными, если $p_1 q_2 = p_2 q_1$. Число p_1/q_1 считается большим числа p_2/q_2, если $p_1 q_2 > p_2 q_1$, и меньшим этого числа, если $p_1 q_2 < p_2 q_1$.

Иррациональные и действительные числа

Иррациональным называется число, представимое в виде бесконечной десятинной непериодической дроби.

Если объединить непересекающиеся множества рациональных и иррациональных чисел, то полученное бесконечное множество называется множеством действительных (вещественных) чисел. То есть действительные числа – это числа, представимые бесконечными десятичными дробями. Строгая теория действительных чисел была построена математиками лишь в XIX веке (Больцано, Вейерштрасс, Кантор, Дедекинд и др.). Из определения множества действительных чисел следует, что $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Два действительных числа $a_0, a_1 a_2 .. a_n \dots$ и $b_0, b_1 b_2 .. b_n \dots$, где a_0 и b_0 - целые числа, а a_i, b_i $(i = 1,2,\dots,n,\dots)$ – десятичные цифры, называются равными, если $a_k = b_k$ сразу при всех $k = 0,1,2,\dots$ Равными также являются числа

$$a_0, a_1 a_2 .. a_n 00 \dots (a_n \neq 0) \text{ и } a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 99 \dots$$

(это две эквивалентные формы представления одного и того же действительного числа $a_0,a_1a_2..a_n$).

Говорят, что из двух чисел $a_0,a_1a_2..a_n...$ и $b_0,b_1b_2..b_n...$ первое больше второго, если либо $a_0 > b_0$, либо если $a_0 = b_0$, но $a_1 > b_1$, либо если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ (для некоторого натурального n), но $a_{n+1} > b_{n+1}$. Два действительных числа $a_0,a_1a_2..a_n...$ и $-a_0,a_1a_2..a_n...$ называются противоположными числами. Два отрицательных действительных числа равны, если равны противоположные им числа. Из двух отрицательных чисел больше то, у которого противоположное число меньше.

Практическое занятие 5
Методы решения задач с рациональными и действительными числами

План занятия

1. Перевод рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно.
2. Сравнение рациональных чисел.
3. Доказательство рациональности или иррациональности числа.
4. Сравнение действительных чисел.

Перевод рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно.

Пример 1. Перевести периодическую дробь $3{,}1(20)$ в обыкновенную.

Решение. Воспользовавшись правилом перевода десятичной дроби в обыкновенную дробь, получаем

$$3{,}1(20)=\frac{3120-31}{990}=\frac{3089}{990}.$$

Если же повторить весь процесс вывода формулы для данного примера, то это будет выглядеть следующим образом. Обозначим переводимое число через x, затем умножим равенство $x=3{,}1(20)$ на 10:

$$10x=31,(20).$$

После этого ещё раз умножим равенство $x=3{,}1(20)$, но уже на 1000 и получим

$$1000x=3120,(20).$$

Если теперь вычесть из равенства $1000x=3120,(20)$ равенство $10x=31,(20)$, то одинаковые периоды у чисел в правых частях равенств взаимно уничтожатся, и получим $900x=3089$, откуда и находим искомое представление числа x в виде обыкновенной дроби.

Ответ: $3{,}1(20)=\dfrac{3089}{990}$.

Сравнение рациональных чисел

Пример 2. Что больше: $\dfrac{222221}{333332}$ или $\dfrac{444443}{666665}$?

Решение. Обозначим число 111111 через a. Тогда первая дробь равна $\dfrac{2a-1}{3a-1}$, а вторая $\dfrac{4a-1}{6a-1}$. Для ответа на поставленный вопрос составим разность этих дробей и определим её знак:

$$\frac{2a-1}{3a-1}-\frac{4a-1}{6a-1}=-\frac{a}{(3a-1)(6a-1)}<0,$$

значит, вторая дробь больше.

Пример 2. Сравнить числа: $\sqrt[5]{2}+7$ и $8\cdot\sqrt[10]{2}$.

Решение. Обозначим $t=\sqrt[10]{2}$. Тогда $\sqrt[5]{2}+7\vee 8\cdot\sqrt[10]{2}\Leftrightarrow t^2+7\vee 8t\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t-1)(t-7)\vee 0$. Заметим, что $1<\sqrt[10]{2}<7$ и поэтому $(t-1)(t-7)<0$.

Ответ: первое число меньше.

Доказательство рациональности или иррациональности числа

Пример. Доказать иррациональность числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что это рациональное число, тогда его можно представить в виде обыкновенной дроби:

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}=\frac{p}{q},\text{ где } p\in Z, q\in N.$$

Перепишем равенство в виде $\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{2}$ и возведём его в куб:

$$2=\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)^3\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\frac{3p^2}{q^2}+2\right)=\frac{p^3}{q^3}+\frac{6p}{q}-2\Leftrightarrow\sqrt{2}=\frac{p_1}{q_1},$$

где $p_1=\frac{p^3}{q^3}+\frac{6p}{q}-2$ и $q_1=\frac{3p^2}{q^2}+2$ - рациональные числа и поэтому их отношение $\frac{p_1}{q_1}$ также рационально. Получили противоречие, так как $\sqrt{2}$ - иррациональное число. Значит, предположение о рациональности числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ было неверно и данное число иррационально, что и требовалось доказать.

Сравнение действительных чисел

Пример. Сравнить числа $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ и 1.

Решение. Обозначим первое из чисел за x, и возведём равенство

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

в куб, используя формулу сокращённого умножения

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),\text{ где } a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ b=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Тогда получим

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}),$$

$$\Leftrightarrow x^3=4-3x\Leftrightarrow x^3+3x-4=0.$$

Заметим, что $x=1$ является корнем последнего уравнения. Делением многочлена x^3+3x-4 на $x=1$ убеждаемся в том, что полученный в результате деления трёхчлен x^2+x+4 не имеет действительных корней. Таким образом, $x=1$ – единственный корень кубического уравнения. Следовательно, первое из сравниваемых равно 1.

Ответ: числа равны.

Задания для самостоятельной работы к практическому занятию 5

1. Перевод рационального числа из обыкновенной дроби в периодическую и обратно.

а) Представить число $0,(25)$ в виде обыкновенной дроби.

б) Представить число $0{,}2(13)$ в виде обыкновенной дроби.

в) Упростить рациональное число $\dfrac{0{,}449291997}{2{,}1394857}$

г) Записать дроби $\dfrac{1234}{40}, \dfrac{6969}{45}, \dfrac{37}{7}$ в виде десятичных.

д) Записать числа $7{,}11; 0{,}45; 13{,}745$ в виде несократимых обыкновенных дробей.

е) Какие из следующих чисел можно записать в виде конечных десятичных дробей: $\dfrac{7}{352}, \dfrac{12}{56}, \dfrac{21}{75}, \dfrac{12}{96}$.

2. Сравнение рациональных чисел.

а) Сравнить числа $\dfrac{7}{33}$ и $\dfrac{21212121}{99999999}$.

б) Что больше: $0{,}7(621)$ или $141/185$?

в) Сравнить числа $\dfrac{7}{33}$ и $\dfrac{141}{999}$.

г) Сравнить числа $0{,}2(1):4+0,(2)$ и $0{,}275$.

д) Что больше: $0{,}7(621)$ или $\dfrac{25}{33}$

е) Сравнить два числа: $4,(9)^{5,(0)}$ и $5,(0)^{4,(9)}$.

3. Доказательство рациональности или иррациональности числа.

а) Является ли число $\sqrt{7}$ рациональным?

б) Является ли число $\sqrt{5}$ рациональным?

в) Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным.

г) Доказать, что $\sqrt[4]{5}$ не является рациональным.

д) Доказать, что $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ не является рациональным.

е) Доказать, что число $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$ является иррациональным

4. Сравнение действительных чисел.

а) Сравнить числа $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$.

б) Что меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$

в) Сравнить числа $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$.

г) Сравнить числа $(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2$ и $14+\sqrt{200}$

д) Сравнить два числа: $\sqrt{2001}+\sqrt{2003}$ и $2\cdot\sqrt{2002}$.

е) Какое из чисел больше: $2\cdot\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

5. Разные задачи

А) Среди обыкновенных дробей с положительным знаменателем, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

Примерные темы курсовых работ по дисциплине Элементарная математика

1. Основная теорема арифметики
2. Алгебраические уравнения и неравенства с параметрами
3. Алгебраические уравнения высших степеней
4. Системы линейных алгебраических уравнений
5. Метод математической индукции
6. Числа Фибоначчи
7. Числовые последовательности
8. Методы решения задач на построение
9. Методы решения диофантовых уравнений
10. Бином Ньютона
11. Алгебраические уравнения и неравенства, содержащие знак абсолютной величины
12. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами
13. Компьютерное моделирование в электронных таблицах как метод решения сюжетных задач
14. Головоломка Эрне Рубика
15. Золотое сечение.

Критерии оценки за курсовую работу

Курсовая работа оценивается **«отлично»**, если

1. Работа выполнена в срок, оформление, структура и стиль работы образцовые.

2. Работа выполнена самостоятельно, присутствуют собственные обобщения, заключения и выводы.

3. Использовано оптимальное количество литературы и источников по теме работы, их изучение проведено на высоком уровне. Автор работы владеет методикой исследования.

4. Тема работы четко сформулирована, тема раскрыта полностью, дано обоснование ее актуальности

Курсовая работа оценивается **«хорошо»**, если:

1. Работа выполнена в срок, в оформлении, структуре и стиле работы нет грубых ошибок.

2. Работа выполнена самостоятельно, присутствуют собственные обобщения, заключения и выводы.

3. Использованы основная литература и источники по теме работы, однако работа имеет недостатки в проведенном исследовании, прежде всего в изучении источников.

4. Тема работы в целом раскрыта.

Курсовая работа оценивается **«удовлетворительно»**, если:

1. Работа выполнена с нарушениями графика, в оформлении, структуре и стиле работы есть недостатки.

2. Работа выполнена самостоятельно, присутствуют собственные

обобщения, заключения и выводы.

3. При этом литература и источники по теме работы использованы в недостаточном объеме, их анализ слабый или вовсе отсутствует.

4. Тема работы раскрыта не полностью

Курсовая работа **не может быть оценена положительно**, если:

1. Какая-либо ее часть, не говоря уже о всем тексте работы, является плагиатом, скомпилирована из фрагментов работ других авторов и носит несамостоятельный характер. Проще говоря, если студент выдает чужую работу за свою. Использование текстов, взятых на специальных сайтах сети Интернет, в качестве якобы «своей» работы также является плагиатом.

2. Содержание курсовой работы не соответствует ее теме.

3. При написании работы не были использованы источники и литература.

4. Оформление работы совершенно не соответствует требованиям.