МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
Математическая логика и теория алгоритмов

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, прежде всего обучающиеся должны ознакомиться с программой дисциплины. Электронный вариант рабочей программы размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего педагога, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов.

В ходе лекционных занятий необходимо критически осмысливать предлагаемый материал, задавать вопросы как уточняющего характера, помогающие уяснить отдельные излагаемые положения, так и вопросы продуктивного типа, направленные на расширение и углубление сведений по изучаемой теме, на выявление недостаточно освещенных вопросов, слабых мест в аргументации и т.п.

На практических занятиях необходимо активно участвовать в решении предлагаемых задач, начиная уже с этапа анализа условия и поиска путей решения. Студенту, вызванному для решения задачи к доске, следует подробно комментировать ход решения задачи, а стальным студентам — выполнять основные этапы решения предложенной задачи самостоятельно, но при этом контролируя ход решения на доске.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с программой дисциплины, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем. Необходимо обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных по разным причинам. При необходимости можно обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Методические материалы для обучающихся по освоению теоретических вопросов дисциплины

№	Темы	Рассматриваемые вопросы
1	Алгебра высказываний	Высказывания, логические операции над ними. Совершенные нормальные формы. Логическое следствие. Прямая и обратная теоремы, противоположная и обратная теоремы; закон контрапозиции. Методы математических доказательств. Применение алгебры высказываний к описанию релейно-контактных схем. Исчисление высказываний. Формулы исчисления высказываний. Свойства формализованного исчисления высказываний.
2	Логика предикатов	Предикат. Логические операции над предикатами. Кванторные операции. Формулы логики предикатов, их классификация. Интерпретация формул логики предикатов. Выполнимость и общезначимость формул логики предикатов. Исчисление предикатов.
3	Булевы функции	Булевы функции от одной и двух переменных. Булевы функции от n переменных. Системы булевых функций. Классы Поста. Применение булевых функций к описанию релейно-контактных схем.

4	Машины Тьюринга и поста как модели алгоритма. Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ) и частично рекурсивные функции (ЧРФ) как модели алгоритма. Равносильность различных определений алгоритма.	Интуитивное понятие алгоритма. Необходимость уточнения понятия алгоритма. Различные подходы к определению алгоритма. Устройство и принципы работы машины Тьюринга (МТ). Решение задач синтеза и анализа на МТ. Операции с МТ. Функции, вычислимые по Тьюрингу. Тезис Черча-Тьюринга. Устройство и принципы работы машины Поста. Марковские подстановки. НАМы и их применение к словам. Нормально вычислимые функции и принцип нормализации Маркова. Операторы подстановки, примитивной рекурсии, минимизации. Классы ЧРФ, общерекурсивных и примитивно рекурсивных функций и их взаимосвязь. Тезис Черча для ЧРФ. Понятие вычислимой функции. Разрешимые и перечислимые множества. Характеристические функции. Понятие об эффективной нумерации. Нумерация машин Тьюринга.
5	Алгоритмически неразрешимые проблемы Классы сложности P и NP.	Теорема Клини. Недетерминированная машина Тьюринга (НДТ). Основные алгоритмически неразрешимые проблемы. Алгоритмическая сводимость. Характеристики сложности вычислений. Полиномиально и экспоненциально решаемые задачи. Полиномиальная сводимость. Теорема Кука. Основные NP-полные задачи
6	Оптимизационные задачи теории алгоритмов.	Общая характеристика «жадных» алгоритмов. Условия оптимальности «жадных» алгоритмов.

Методические материалы для обучающихся по подготовке к практическим занятиям

Содержание дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» представлено следующими разделами:

– алгебра высказываний;
– логика предикатов;
– булевы функции;
– машины Тьюринга и поста как модели алгоритма. Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ) и частично рекурсивные функции (ЧРФ) как модели алгоритма. Равносильность различных определений алгоритма;
– алгоритмически неразрешимые проблемы. Классы сложности P и NP;
– оптимизационные задачи теории алгоритмов.

1. Алгебра высказываний

1.1. Высказывания и операции над ними

Под *высказыванием* понимают повествовательное предложение, про которое можно однозначно утверждать, истинно оно или ложно. Высказывание относится к основным неопределяемым понятиям математической логики.

Высказывания обозначают заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$

С точки зрения математической логики не важны структура и конкретное содержание высказывания, а важен лишь тот факт, истинно оно или ложно. Значения «истина» и «ложь» называются *истинностными значениями.* В литературе имеются следующие обозначения для истинных высказываний: 1, И, t (от англ. true – истинный), и для ложных высказываний: 0, Л, f (от англ. false – ложный). Из этих обозначений будем использовать 1 и 0.

Считается, что есть непустое первоначально заданное множество высказываний, которые называются элементарными. Из элементарных высказываний можно строить более сложные с помощью *логических операций* или *логических связок.*

Отрицанием высказывания A называется новое высказывание, обозначаемое $\neg A$ или $\overline{A}$ (читается *«не А»* или *«неверно, что А»*), которое истинно тогда и только тогда, когда само A ложно.

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, или $A \& B$, или $A \cdot B$ (читается *«А и В»*), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B одновременно.

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \vee B$ или $A + B$ (читается *«А или В»*), которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания A и B одновременно.

Импликацией двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \to B$ (читается *«если А, то В»*, *«из А следует В»*), которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а B – ложно.

Эквивалентностью двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$ (читается *«А эквивалентно В»*, *«А тогда и только тогда, когда В»*), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A и B принимают одинаковые значения истинности.

Логические операции удобно задавать с помощью *таблиц истинности.*

Таблица истинности операции отрицания

A	$\neg A$
0	1
1	0

Таблица истинности операции конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности операции дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица истинности операции импликации

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности операции эквивалентности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

1	1	1

С помощью логических операций из элементарных высказываний можно строить более сложные. При этом если отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующем порядке: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Пусть из элементарных высказываний A, B, C построено сложное высказывание, например, $(A \to B) \wedge (\neg C)$. Если использовать это выражение как *схему* построения других сложных высказываний, то вместо элементарных высказываний A, B, C в него можно подставить *переменные* X, Y, Z:

$(X \to Y) \wedge (\neg Z)$ (1)

Отличие нового выражения от первоначального в том, что переменные можно заменять как на другие буквы, так и на сложные высказывания, например, если X заменить на $U \vee V$, Y – на $\neg R$, Z – на $Q \to P$, то получим новое высказывание $((U \vee V) \to (\neg R)) \wedge (\neg(Q \to P))$. Таким образом, выражение (1) следует понимать как формулу – схему конструирования новых высказываний.

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, называют *пропозициональными переменными.*

Дадим строгое определение формулы исчисления высказываний.

1. Всякая пропозициональная переменная есть формула.
2. Если F и H – формулы, то $(\neg F)$, $(F \wedge H)$, $(F \vee H)$, $(F \to H)$, $(F \leftrightarrow H)$ – также формулы.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме полученных согласно пунктам 1-2 этого определения, нет.

Истинностные значения формул исчисления высказываний можно определять с помощью таблиц истинности.

Если формула содержит n пропозициональных переменных, каждая из которых может независимо остальных принимать одно из значений «истина» или «ложь», то таблица истинности такой формулы будет содержать 2^n строк.

Формула исчисления высказываний $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *выполнимой (опровержимой),* если она принимает значение «истина» («ложь») на некотором наборе истинностных значений входящих в нее пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$.

Формула исчисления высказываний $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *тавтологией* или *тождественно истинной (противоречием* или *тождественно ложной),* если она принимает значение «истина» («ложь») на любом наборе истинностных значений входящих в нее пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$.

Очевидно, что по последнему столбцу в таблице истинности формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ можно определить, какого рода формулой она является. Если формула является тавтологией, то в последнем столбце будут стоять только значения «1», если противоречием, то, соответственно, только значения «0», если выполнима или опровержима, то будут встречаться как одни, так и другие значения.

Пример. Построить таблицу истинности для формулы

$F = ((X \to Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X)) \to (Y \vee Z)$

и определить, является она тавтологией, противоречием, выполнимой или опровержимой.

Таблица истинности формулы F содержит $2^3 = 8$ строк.

В первых трех столбцах таблицы выпишем всевозможные тройки значений переменных X, Y и Z. В последующих столбцах выпишем логические значения формул $X \to Y = P$, $\neg Z$, $\neg X$, $\neg Z \vee \neg X = Q$, $\left(X \to Y\right) \wedge (\neg Z \vee \neg X) = P \wedge Q = S$, $Y \vee Z = R$, $F = S \to R$, руководствуясь определениями соответствующих логических операций. Обозначения P, Q, R, S введены для удобства записи, чтобы таблица не была очень громоздкой.

X	**Y**	**Z**	$X \to Y = P$	$\neg Z$	$\neg X$	$\neg Z \vee \neg X = Q$	$P \wedge Q = S$	$Y \vee Z = R$	**F**
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Так как в последнем столбце формулы *F* стоят все значения «1» и «0», то эта формула является выполнимой и опровержимой.

1.2. Тавтологии. Основные тавтологии. Равносильность формул. Теорема о замене

Две формулы исчисления высказываний $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ называются *логически равносильными,* если они принимают одинаковые истинностные значения на любых одинаковых наборах истинностных значений входящих в них пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$.

Обозначение: $F \cong H$ или $F \equiv H$.

Существует тесная связь между понятиями равносильности и тавтологии:

Формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $H(X_1, X_2, ..., X_n)$ *являются логически равносильными тогда и только тогда, когда формула F↔H является тавтологией.*

В алгебре высказываний справедливы следующие основные равносильности, выражающие свойства логических операций.

1. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$; $P \vee Q \equiv Q \vee P$ – законы коммутативности конъюнкции и дизъюнкции.

2. $P \wedge \left(Q \wedge R\right) \equiv \left(P \wedge Q\right) \wedge R$; $P \vee \left(Q \vee R\right) \equiv \left(P \vee Q\right) \vee R$ – законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции.

3. $P \wedge \left(Q \vee R\right) \equiv \left(P \wedge Q\right) \vee \left(P \wedge R\right)$; $P \vee \left(Q \wedge R\right) \equiv \left(P \vee Q\right) \wedge \left(P \vee R\right)$ – законы дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции друг относительно друга.

4. $P \wedge \left(Q \vee P\right) \equiv P$; $P \vee \left(Q \wedge P\right) \equiv P$ – законы поглощения.

5. $\neg\left(P \wedge Q\right) \equiv \neg P \vee \neg Q$; $\neg\left(P \vee Q\right) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ – законы де Моргана.

6. $\neg(P\wedge Q)\equiv\neg P\vee\neg Q$; $P\wedge P\equiv P$ – законы идемпотентности.

7. $\neg\neg P\equiv P$ – закон двойного отрицания.

8. $P\vee\neg P\equiv 1$ – закон исключенного третьего.

9. $P\wedge\neg P\equiv 0$ – закон отрицания противоречия.

10. $P\wedge 1\equiv P$; $P\wedge 0\equiv 0$; $P\vee 1\equiv 1$; $P\vee 0\equiv P$.

11. $P\to Q\equiv\neg P\vee Q$ – закон исключения импликации.

12. $P\leftrightarrow Q\equiv(P\to Q)\wedge(Q\to P)\equiv(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$ – закон исключения эквивалентности.

Учитывая связь между понятиями равносильности и тавтологии, каждый из перечисленных законов можно было бы сформулировать следующим образом.

Эквивалентность формул, записанных в левой и правой частях каждого закона есть тавтология исчисления высказываний.

Например, формулы $(\neg(P\wedge Q))\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ и $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$ есть тавтологии.

Каждую из рассмотренных выше тавтологий можно воспринимать не как одну отдельную формулу, а как своего рода схему получения формул, если допустить, что одинаковые переменные можно заменять на новые переменные или целые формулы. Это допущение основано на так называемой теореме о замене.

Теорема о замене. Если формула *F*, содержащая пропозициональную переменную *X*, является тавтологией, то замена в формуле *F* переменной *X* на любую формулу *H* снова приводит к тавтологии.

С помощью приведенных выше свойств логических операций над формулами исчисления высказываний можно выполнять *равносильные преобразования,* переходя от левой части соответствующего свойства к правой, или наоборот.

Пример. Используя основные законы логических операций, упростить формулу F исчисления высказываний:

$F=((X\to Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X))\to(Y\vee Z)$

1. $F=((\neg X\vee Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X))\to(Y\vee Z)$ [*по закону исключения импликации, примененному к формуле* $X\to Y$].

2. $F\equiv\neg\big(((\neg X\vee Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X))\big)\vee(Y\vee Z)$ [*по закону исключения импликации, примененному к формуле* $((\neg X\vee Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X))\to(Y\vee Z)$. *Здесь роль условия импликации играет формула* $(\neg X\vee Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X)$, *роль заключения импликации – формула* $Y\vee Z$].

3. $F\equiv(\neg(\neg X\vee Y)\vee\neg(\neg Z\vee\neg X))\vee(Y\vee Z)$ [*по закону де Моргана, примененному к формуле* $\neg\big(((\neg X\vee Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X))\big)$].

4. $F\equiv(\neg\neg X\wedge\neg Y)\vee(\neg\neg Z\wedge\neg\neg X)\vee(Y\vee Z)$ [*по закону де Моргана, примененному к формулам* $\neg(\neg X\vee Y)$ и $\neg(\neg Z\vee\neg X)$].

5. $F\equiv\big((X\wedge\neg Y)\vee(Z\wedge X)\big)\vee(Y\vee Z)$ [*по закону двойного отрицания, примененному к формулам* $\neg\neg X$ и $\neg\neg Z$].

6. $F \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (Z \wedge X) \vee Y \vee Z$ [*по закону ассоциативности*].

7. $F \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Z) \vee Z \vee Y$ [*по закону коммутативности*].

8. $F \equiv (X \wedge \neg Y) \vee \big((X \wedge Z) \vee Z\big) \vee Y$ [*по закону ассоциативности*].

9. $F \equiv (X \wedge \neg Y) \vee Z \vee Y$ [*по закону поглощения, примененному к формуле* $\big(X \wedge Z\big) \vee Z$.

10. $F \equiv \big((X \wedge \neg Y) \vee Y\big) \vee Z$ [*по законам коммутативности и ассоциативности*].

11. $F \equiv \big((X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Y)\big) \vee Z$ [*по закону дистрибутивности*].

12. $F \equiv \big((X \vee Y) \wedge 1\big) \vee Z$ [*по закону исключенного третьего*].

13. $F \equiv X \vee Y \vee Z$ [*по* 10 *закону и закону ассоциативности*].

Так как все преобразования были равносильными, то получаем:

$F = ((X \to Y) \wedge (\neg Z \vee \neg X)) \to (Y \vee Z) \equiv X \vee Y \vee Z$.

1.3. Понятие логического следования

Формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *логическим следствием* формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ F_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ обращается в истинное высказывание на всяком наборе значений пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, на котором в истинные высказывания обращается и каждая из формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ F_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

<u>Обозначение:</u> $F_1, F_2, \ldots, F_k \models H$.

Формулы, которые стоят до знака следования называют *условиями* или *посылками* или *гипотезами* логического следствия.

Определить, является ли формула H логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, можно, например, по таблице истинности. Нужно построить таблицу, которая содержала бы все формулы, и выбрать из нее только те строки, в которых все формулы-посылки одновременно принимают значение «ИСТИНА». Если в каждой из выбранных строк формула H также принимает значение «ИСТИНА», то, согласно определению, она будет логически следовать из формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$.

Однако, если формулы зависят от большого числа переменных, построение таблицы истинности нерационально. Поэтому в ряде случаев для проверки того, является ли некоторая формула логическим следствием данных формул, можно воспользоваться признаком логического следствия.

Теорема (признак логического следствия). Формула H будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \to H$ является тавтологией:

$$F \models H \Leftrightarrow \quad \models F \to H.$$

Доказательство

1. <u>Необходимость.</u> Пусть формула $H(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ есть логическое следствие формулы $F(X_1, X_2,\ldots,X_n)$. Тогда по определению, формула H принимает значение «ИСТИНА» на тех наборах значений переменных $X_1, X_2,\ldots,X_n$, на которых формула F принимает значение «ИСТИНА». Тогда по определению операции импликация, формула $F \to H$ всегда будет принимать значение «ИСТИНА», и, следовательно, являться тавтологией.

2. <u>Достаточность.</u> Пусть по условию формула $F \to H$ является тавтологией, то есть принимает истинное значение при любых наборах значений входящих в нее переменных. Из таблицы истинности для импликации следует, что если формула H истинна, то формула F может быть либо истинной, либо ложной. А значит, всякий раз, когда формула F истинна, H – тоже истинна, поэтому H – логическое следствие F.

1.4. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Для каждой формулы алгебры высказываний можно построить равносильную ей формулу, содержащую только логические операции конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Для этого нужно, используя соответствующие тавтологии (равносильности), раскрыть все имеющиеся в формуле импликации и эквивалентности. Однако таких выражений одной и той же формулы через эти три операции можно построить множество. Среди них некоторые формулы играют в алгебре высказываний особую роль.

Конъюнктивным (дизъюнктивным) одночленом от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется конъюнкция (дизъюнкция) этих переменных или их отрицаний.

Союз «или» в этом определении употребляется в неисключающем смысле, то есть в такой одночлен может входить одновременно и переменная, и ее отрицание, например:

$\neg X \wedge Y \wedge Z$ и $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z \wedge X$ - конъюнктивные одночлены.

$X \vee \neg Y \vee Z$ и $X \vee \neg Y \vee Z \vee Y \vee \neg Z$ - дизъюнктивные одночлены.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктивных многочленов.

Аналогично, *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* называется конъюнкция дизъюнктивных многочленов. Например:

$(\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z \wedge X)$ – ДНФ,

$(X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z \vee Y \vee \neg Z)$ – КНФ.

Среди множества нормальных форм, которые можно построить для каждой формулы исчисления высказываний, существует такая, которая для данной формулы единственна. Такие формы называют *совершенными*.

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется *совершенным*, если от каждой пары переменных $X_i \quad и \quad \neg X_i, \quad i \in \{1,\ldots,n\}$ входит одна и только одна из букв.

Нормальная форма (конъюнктивная или дизъюнктивная) называется *совершенной*, если в нее входят лишь совершенные одночлены от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$.

Например:

$(\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$ – совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ),

$(X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$ – совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Теорема. Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от *n* переменных имеет единственную (с точностью до порядка следования дизъюнктивных членов) совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Теорема. Каждая не тождественно истинная формула алгебры высказываний от *n* переменных имеет единственную (с точностью до порядка следования конъюнктивных членов) совершенную конъюнктивную нормальную форму.

Данные теоремы дают алгоритм представления формул алгебры высказываний в СДНФ И СКНФ с помощью построения таблицы истинности.

Правило 1.

Чтобы привести не тождественно ложную формулу к СДНФ, нужно:

–выбрать из таблицы истинности этой формулы все те наборы значений, входящих в нее переменных, на которых формула принимает значение «ИСТИНА»;

–для каждого такого набора построить совершенный конъюнктивный одночлен (СКО), принимающий значение «ИСТИНА» на этом наборе и только на нем;

–полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаками дизъюнкции.

Правило 2.

Чтобы привести не тождественно истинную формулу к СКНФ, нужно:

–выбрать из таблицы истинности этой формулы все те наборы значений, входящих в нее переменных, на которых формула принимает значение «ЛОЖЬ»;

–для каждого такого набора построить совершенный дизъюнктивный одночлен (СДО), принимающий значение «ЛОЖЬ» на этом наборе и только на нем;

–полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить знаками конъюнкции.

Пример. Привести формулу $F = (X \rightarrow Y) \wedge \neg Z$ к СДНФ и СКНФ

X	Y	Z	$X \rightarrow Y$	$\neg Z$	F
0	**0**	**0**	1	1	1
0	*0*	*1*	1	0	0
0	**1**	**0**	1	1	1
0	*1*	*1*	1	0	0
1	*0*	*0*	0	1	0
1	*0*	*1*	0	0	0
1	**1**	**0**	1	1	1
1	*1*	*1*	1	0	0

1. Строим для формулы $F = (X \rightarrow Y) \wedge \neg Z$ совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Выберем из таблицы истинности те наборы значений переменных *X, Y, Z*, на которых формула принимает значение «ИСТИНА» (они выделены в таблице жирным шрифтом).

Строим СКО для каждого из трех выбранных наборов значений переменных. Так как на наборе *X = 1, Y = 1, Z = 0*, то конъюнктивный одночлен на этом наборе примет значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда переменные *X* и *Y* войдут в него без отрицания, а переменная *Z* – с отрицанием: $X \wedge Y \wedge \neg Z$ (2).

На наборе *X = 0, Y = 1, Z = 0* совершенный конъюнктивный одночлен будет выглядеть следующим образом: $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$ (3), на наборе *X =0, Y = 1, Z = 0* – $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ (4).

Чтобы получить СДНФ для формулы *F*, соединим три полученных СКО дизъюнкцией:

$(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$ – СДНФ.

2. Строим для формулы $F = \left(X \to Y\right) \wedge \neg Z$ совершенную КНФ.

Выберем из таблицы истинности те наборы значений переменных *X, Y, Z,* на которых формула принимает значение «ЛОЖЬ» (они выделены в таблице курсивом).

Строим СДО для каждого из трех выбранных наборов значений переменных. Так как на наборе *X = 1, Y = 1, Z = 1*, то дизъюнктивный одночлен на этом наборе примет значение «ЛОЖЬ» тогда и только тогда, когда все три переменные войдут в него с отрицанием: $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$ (5).

На наборе *X = 1, Y = 0, Z = 1,* совершенный дизъюнктивный одночлен будет выглядеть следующим образом: $\neg X \vee Y \vee \neg Z$ (6), на наборе *X = 1, Y = 0, Z = 0*: $\neg X \vee Y \vee Z$ (7), на наборе *X = 0, Y = 1, Z = 1:* $X \vee \neg Y \vee \neg Z$ (8), и, наконец, на наборе X = 0, Y = 0, Z = 1: $X \vee Y \vee \neg Z$ (9).

Чтобы получить СКНФ для формулы *F*, соединим пять полученных СДО конъюнкцией:

$$(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$$

Есть и еще один способ приведения формулы алгебры высказываний к СДНФ и СКНФ, который заключается в использовании равносильных преобразований.

Для приведения формулы к совершенной нормальной форме нужно сначала привести ее к дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме.

Получим СДНФ

1. $F = \left(X \to Y\right) \wedge \neg Z \equiv \left(\neg X \vee Y\right) \wedge \neg Z$ [*по закону исключения импликации*].

2. $F \equiv \left(\neg X \wedge \neg Z\right) \vee \left(Y \wedge \neg Z\right)$ [*по закону дистрибутивности получили ДНФ*].

3. $F \equiv \left(\neg X \wedge \neg Z \wedge 1\right) \vee \left(Y \wedge \neg Z \wedge 1\right)$ [*не нарушая равносильности формул добавили в каждую скобку единицу, чтобы ввести недостающие переменные*].

4. $F \equiv \left(\neg X \wedge \neg Z \wedge \left(Y \vee \neg Y\right)\right) \vee \left(Y \wedge \neg Z \wedge \left(X \vee \neg X\right)\right)$ [*расписали единицу по закону исключенного третьего*].

5. $F \equiv \left(\neg X \wedge \neg Z \wedge Y\right) \vee \left(\neg X \wedge \neg Z \wedge \neg Y\right) \vee \left(Y \wedge \neg Z \wedge X\right) \vee$

$\vee \left(Y \wedge \neg Z \wedge \neg X\right)$ [*по закону дистрибутивности*].

6. $F \equiv \left(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z\right) \vee \left(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z\right) \vee \left(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z\right)$ – СДНФ [*по закону идемпотентности и по коммутативному закону*].

Получим СКНФ

1. $F=(X\to Y)\wedge\neg Z\equiv(\neg X\vee Y)\wedge\neg Z$ [*по закону исключения импликации получили КНФ*].

2. $F\equiv(\neg X\vee Y\vee 0)\wedge(\neg Z\vee 0\vee 0)$ [*не нарушая равносильности формул добавили в каждую скобку нули, чтобы ввести недостающие переменные*].

3. $F\equiv(\neg X\vee Y\vee(Z\wedge\neg Z))\wedge(\neg Z\vee(X\wedge\neg X)\vee(Y\wedge\neg Y))$ [*по закону отрицания противоречия*].

4. $F\equiv(\neg X\vee Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee\neg Z)\wedge(\neg Z\vee X\vee Y)\wedge$

$\wedge(\neg Z\vee X\vee\neg Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X\vee Y)\wedge(\neg Z\vee\neg X\vee\neg Y)$ [*по закону дистрибутивности*].

5. $F\equiv(\neg X\vee Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee\neg Z)\wedge(X\vee Y\vee\neg Z)\wedge$

$\wedge(X\vee\neg Y\vee\neg Z)\wedge(\neg X\vee\neg Y\vee\neg Z)$ – СКНФ [*по закону идемпотентности и по коммутативному закону*].

Пример. Получить аналитическое выражение для формулы $F(X,Y,Z)$ алгебры высказываний, которая задана своей таблицей значений.

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Данная формула от трех переменных принимает значение 1 тогда и только тогда, когда все ее аргументы принимают одинаковое значение, а в остальных случаях формула принимает значение 0.

Запишем для данной формулы СДНФ, и получим аналитическое выражение для формулы $F(X,Y,Z)=(X\wedge Y\wedge Z)\vee(\neg X\wedge\neg Y\wedge\neg Z)$.

Одним из приложений СДНФ и СКНФ является получение аналитического выражения для формулы алгебры высказываний, которая задана своей таблицей значений.

2. Логика предикатов

2.1. Основные понятия логики предикатов

Предикатом является предложение, о котором нельзя судить, истинно оно или ложно.

n-местным предикатом, заданным на множествах $M_1,M_2,...,M_n$, называется предложение с *n* переменными $x_1,x_2,...,x_n$, которое при подстановке вместо этих переменных конкретных элементов из множеств $M_1,M_2,...,M_n$ соответственно, обращается в высказывание, истинное или ложное. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *предметными переменными.*

Обозначение: $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – предикат от n переменных.

С каждым предикатом $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ связаны три множества:

1. Область определения $D = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ (множества $M_1, M_2, ..., M_n$ не обязательно все различны между собой), из которой предметные переменные принимают свои значения.

2. Множество значений – двухэлементное множество E = {1, 0}.

3. Область истинности *I* = $\{<a_1, a_2, ..., a_n> | \ P(a_1, a_2, ..., a_n)$ – истинное высказывание} – часть области определения, состоящая из тех и только тех наборов значений переменных, на которых предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ обращается в истинное высказывание.

Над предикатами можно выполнять все те же пять логических операций, что и над высказываниями. Ограничимся определением операций над одноместными предикатами.

Отрицанием одноместного предиката *P(x),* заданного на множестве *D*, называется новый одноместный предикат *P(x)*, заданный на том же множестве, обозначаемый $\neg P(x)$ или $\overline{P(x)}$ (читается *«не P(x) »* или *«неверно, что P(x)»*), который обращается в истинное высказывание тогда и только тогда, когда *P(x)* обращается в ложное высказывание.

Конъюнкцией двух одноместных предикатов *P(x)* и *Q(x*), заданных на множествах D_1 и D_2 соответственно, называется новый двухместный предикат, заданный на множестве $D_1 \times D_2$, обозначаемый $P(x) \wedge Q(x)$ (читается *«P(x) и Q(x)»*), который обращается в истинное высказывание тогда и только тогда, когда *P(x)* и *Q(x)* одновременно обращаются в истинные высказывания.

Дизъюнкцией двух одноместных предикатов *P(x)* и *Q(x),* заданных на множествах D_1 и D_2 соответственно, называется новый двухместный предикат, заданный на множестве $D_1 \times D_2$, обозначаемый $P(x) \vee Q(x)$ (читается *«P(x) или Q(x)»*), который обращается в ложное высказывание тогда и только тогда, когда *P(x)* и *Q(x)* одновременно обращаются в ложные высказывания.

Импликацией двух одноместных предикатов *P(x)* и *Q(x),* заданных на множествах D_1 и D_2 соответственно, называется новый двухместный предикат, заданный на множестве $D_1 \times D_2$, обозначаемый $P(x) \to Q(x)$ (читается *«если P(x), то Q(x)»*), такой, что $(\forall a \in D_1)(\forall b \in D_2)$ высказывание $P(a) \to Q(b)$ является импликацией высказываний *P(a)* и *Q(b).*

Эквивалентностью двух одноместных предикатов *P(x)* и *Q(x),* заданных на множествах D_1 и D_2 соответственно, называется новый двухместный предикат, заданный на множестве $D_1 \times D_2$, обозначаемый $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ (читается *«P(x) равносильно Q(x)»*), такой, что $(\forall a \in D_1)(\forall b \in D_2)$ высказывание $P(a) \leftrightarrow Q(b)$ является эквивалентностью высказываний *P(a)* и *Q(b).*

Все свойства логических операций, доказанные для высказываний справедливы и для операций над предикатами.

Для сложных предикатов справедливы следующие свойства.

Пусть *P(x)* и *Q(x)* – два предиката, заданные на одном и том же множестве *D*.

Область истинности предиката $\neg P(x)$ совпадает с дополнением области истинности предиката *P(x)* до области его определения *D*:

$$I_{\neg P} = D - I_P \qquad (10)$$

Область истинности предиката *P(x)*$\wedge$*Q(x)* совпадает с пересечением областей истинности предикатов *P(x)* и *Q(x)*:

$$I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q \qquad (11)$$

Область истинности предиката *P(x)*$\vee$*Q(x)* совпадает с объединением областей истинности предикатов *P(x)* и *Q(x)*:

$$I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q \qquad (12)$$

Область истинности предиката *P(x)*$\to$*Q(x)* совпадает с областью истинности предиката $\neg P(x) \vee Q(x)$, поэтому, учитывая (10) и (12):

$$I_{P\to Q} = I_{\neg P\vee Q} = I_{\neg P} \cup I_Q \qquad (13)$$

Область истинности предиката *P(x)*$\leftrightarrow$*Q(x)* совпадает с областью истинности предиката $\left(\neg P(x) \vee Q(x)\right) \wedge \left(\neg Q(x) \vee P(x)\right)$, поэтому, учитывая (10), (11) и (12):

$$I_{P\leftrightarrow Q} = I_{(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)} = (I_{\neg P} \cup I_Q) \cap (I_{\neg Q} \cup I_P) \qquad (14).$$

Пример. Найти область истинности предиката $P(x) = \left(x:6\right) \to \left(x>3\right)$, заданного на множестве *Z*.

Предикат $P(x):\left(x:6\right) \to \left(x>3\right)$можно рассматривать как импликацию предикатов $R(x):\left(x:6\right)$ и $Q(x):\left(x>3\right)$:

$$P(x) = R(x) \to Q(x).$$

Чтобы найти его область истинности, воспользуемся формулой (13), которая в наших обозначениях примет вид:

$$I_{R\to Q} = I_{\neg R\vee Q} = I_{\neg R} \cup I_Q \qquad (15).$$

Отрицанием предиката $R(x) = \left(x:6\right)$ является предикат $\neg R(x) = \neg(x:6)$, область истинности которого составляют все целые числа, не кратные 6:

$$I_{\neg R} = \{x \in Z \,/\, x \textit{ не делится на } 6\}.$$

Область истинности предиката $Q(x) = \left(x>3\right)$ составляют все целые числа, большие 3:

$$I_Q = \{x \in Z \,/\, x > 3\}.$$

Согласно равенству (15), область истинности предиката $P(x)$ совпадает с объединением областей истинности предикатов $\neg R(x)$ и $Q(x)$, и, следовательно, состоит из тех и только тех целых чисел, которые либо не делятся на 6, либо больше 3:

$$I_P = \{x \in Z \,/\, x \text{ не делится на } 6 \text{ или } x > 3\}.$$

Для предиката $S(x, y)$ от двух переменных область определения и область истинности состоят из упорядоченных пар предметных переменных *(x, y)*, в которых *x* $\in M_1$, *y* $\in M_2$, M_1 и M_2 – множества, на которых задан предикат $S(x, y)$.

Рассмотрим, как найти область истинности сложного двухместного предиката можно по тем же формулам, которые были приведены для одноместных предикатов.

Пример. Изобразить графически область истинности предиката от двух переменных:

$$S(x,\ y) : \left(\left(x-1\right)^2 + y^2 > 4\right) \rightarrow \left(x + y < -1\right).$$

Предикат $S(x,\ y)$, заданный на множестве *D = R×R*, является импликацией двух предикатов:

$$P(x,\ y) : \left(x-1\right)^2 + y^2 > 4 \text{ и } Q(x,\ y) : x + y < -1$$

Отрицанием предиката $P(x,\ y)$ будет предикат $\neg P(x,\ y) : \left(x-1\right)^2 + y^2 \le 4$, область истинности которого состоит из всех пар действительных чисел *(x, y)*, удовлетворяющих неравенству $\left(x-1\right)^2 + y^2 \le 4$.

Уравнение $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 4$ есть уравнение окружности с центром в точке (1, 0) и радиусом, равным 2. Точки, удовлетворяющие соответствующему неравенству, лежат, очевидно, внутри и на этой окружности:

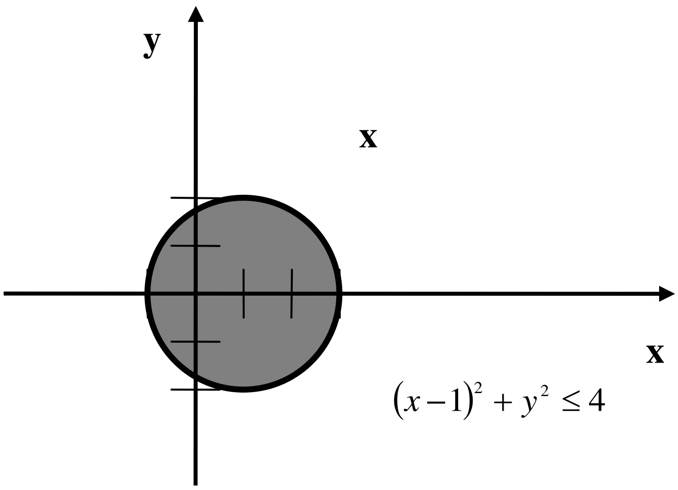


Рис. 1. ***Область истинности предиката*** $\neg P(x,\ y)$

Область истинности предиката $Q(x,\ y) : x + y < -1$ есть множество всех пар действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x + y < -1$. Перепишем это неравенство в виде: $y < -1 - x$. Множество точек, удовлетворяющих уравнению $y = -1 - x$ представляет собой прямую, проходящую, например, через точки (0, -1) и (-1, 0). Тогда точки, удовлетворяющие соответствующему неравенству, будут расположены ниже этой прямой. Так как неравенство строгое, то очки, лежащие на самой прямой, ему не удовлетворяют.

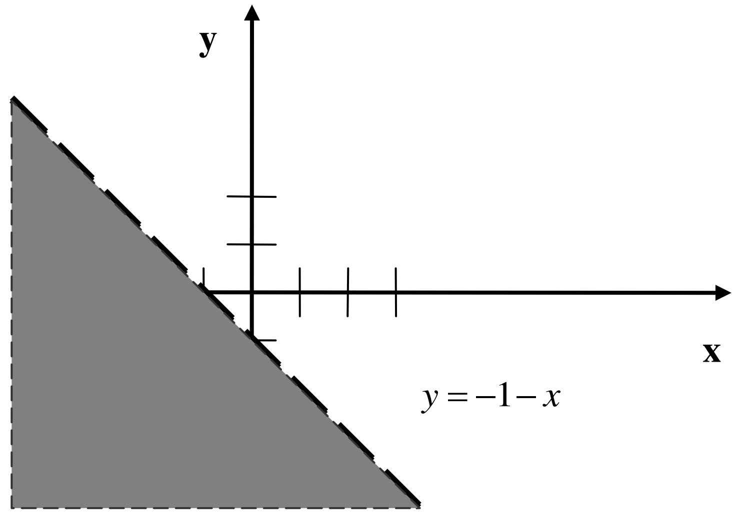


Рис. 2. ***Область истинности предиката Q(x, y)***

Учитывая формулу (13), получим область истинности предиката $S(x,\ y)$: $I_S = I_{P \to Q} = I_{\neg P \vee Q} = I_{\neg P} \cup I_Q$

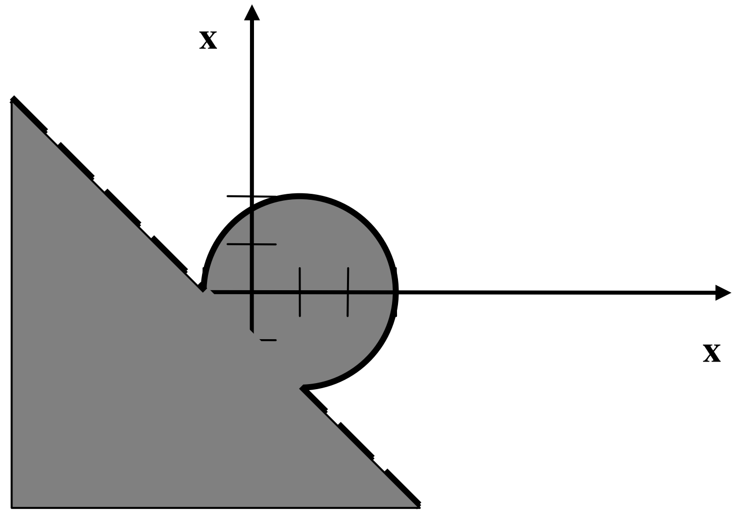


Рис. 3. ***Область истинности предиката S(x, y)***

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$, заданный на области определения *D*, называется:

–*тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ конкретных значений из множества *D* он обращается в истинное высказывание;

–*тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ конкретных значений из множества *D* он обращается в ложное высказывание;

–*выполнимым (опровержимым)* на этом множестве, если существует хотя бы один набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, на котором он обращается в истинное (ложное) высказывание.

Справедливы следующие утверждения.

1. Предикат $P(x_1, x_2, ... x_n)$, заданный на области определения *D*, является тождественно истинным, тогда и только тогда, когда его область истинности совпадает с областью определения: $I_P = D$.

2. Предикат $P(x_1, x_2, ... x_n)$, заданный на области определения *D*, является тождественно ложным, тогда и только тогда, когда его область истинности есть пустое множество: . $I_P = \varnothing$..

3. Предикат $P(x_1, x_2, ... x_n)$, заданный на области определения *D*, выполним тогда и только тогда, когда его область истинности не пуста: $I_P \neq \varnothing$.

4. Предикат $P(x_1, x_2, ... x_n)$, заданный на области определения *D*, опровержим тогда и только тогда, когда его область истинности не совпадает с областью определения: $I_P \neq D$.

2.2. Равносильность и следование предикатов

Два *n*-местных предиката $P(x_1, x_2, ... x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ... x_n)$, заданные на одной и той же области определения *D*, называются *равносильными,* если предикат $P(x_1, x_2, ... x_n)$ обращается в истинное высказывание на тех и только тех наборах значений переменных $x_1, x_2, ... x_n$, на которых в истинное высказывание обращается предикат $Q(x_1, x_2, ... x_n)$.

Очевидно, что предикаты равносильны тогда и только тогда, когда их области истинности совпадают: $I_P = I_Q$.

Предикат $Q(x_1, x_2, ... x_n)$, заданный на области определения *D*, называется *логическим следствием* предиката $P(x_1, x_2, ... x_n)$ с той же областью определения, если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных $x_1, x_2, ... x_n$, на которых в истинное высказывание обращается предикат $P(x_1, x_2, ... x_n)$.

Очевидно, что предикат $Q(x_1, x_2, ... x_n)$ будет логическим следствием предиката $P(x_1, x_2, ... x_n)$ тогда и только тогда, когда область истинности предиката $P(x_1, x_2, ... x_n)$ содержится в области истинности предиката $Q(x_1, x_2, ... x_n)$: $I_P \subseteq I_Q$.

Учитывая приведенную выше классификацию предикатов, можно сформулировать следующие утверждения.

1. Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката с одной и той же областью определения равносильны.

2. Каждый тождественно истинный *n*-местный предикат является следствием любого другого *n*-местного предиката, заданного на том же множестве.

3. Каждый *n*-местный предикат является следствием любого другого тождественно ложного *n*-местного предиката, заданного на том же множестве.

Пример. Определить, являются ли предикаты $P(x, y)$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ и $Q(x, y)$: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ равносильными или один из них есть следствие другого.

Если рассматривать эти предикаты на множестве всех действительных чисел, то область истинности первого есть множество всех неотрицательных действительных чисел, второго – только положительных действительных чисел (y ≠ 0). Поэтому $I_P \subset I_Q$ и $Q(x, y)$ есть следствие $P(x, y)$.

Если же рассматривать эти предикаты на множестве всех положительных действительных чисел, то на этой области определения каждый из предикатов будет тождественно истинным, поэтому они равносильны.

2.3. Кванторные операции над предикатами

Известно, что для превращения одноместного предиката в высказывание нужно подставить вместо переменной некоторое ее значение из области определения. Однако существует еще один способ превращения предиката в высказывание. Этот способ связан с применением, так называемых *кванторных операций.*

Символ «∀» принято называть *квантором общности,* а символ «∃» – *квантором существования.* Выражение *«(∀x)(P(x))»* читается как: «для любого *x* выполняется *P(x)*», выражение *«(∃x)(P(x))»* – «существует *x*, для которого выполняется *P(x)*».

Операцией связывания квантором общности называется *правило*, по которому каждому одноместному предикату *P(x)*, заданному на множестве *D*, сопоставляется высказывание *(∀x)(P(x))*, которое истинно в том и только том случае, когда предикат *P(x)* тождественно истинен, и ложно, когда *P(x)* – опровержим:

$$(\forall x)(P(x)) = \begin{cases} \text{истинное высказывание, если } P(x) - \text{тождественно истинен;} \\ \text{ложное высказывание.} \end{cases}$$

Операцией связывания квантором существования называется *правило*, по которому каждому одноместному предикату *P(x)*, заданному на множестве *D*, сопоставляется высказывание *(∃x)(P(x))*, которое ложно в том и только том случае, когда предикат *P(x)* тождественно ложен, и истинно, когда *P(x)* – выполним:

$$(\exists x)(P(x)) = \begin{cases} \text{ложное высказывание, если } P(x) - \text{тождественно ложен;} \\ \text{истинное высказывание.} \end{cases}$$

Например, пусть предикат *P(x)*, заданный на множестве натуральных чисел, имеет вид: *x > 12*.

Тогда высказывание *(∀x)(P(x))* можно записать как *(∀x)(x > 12)*, а высказывание *(∃x)(P(x))* как *(∃x)(x > 12)*. Очевидно, что первое высказывание будет ложно, так как предикат P(x): x > 12 опровержим на множестве натуральных чисел – существуют натуральные числа, которые меньше либо равны 12. Этот же предикат будет выполним на множестве натуральных чисел, так как существуют натуральные числа, меньшие 12.

Для операций, связанных с кванторами также справедливы законы де Моргана:

1. $\neg\left[(\forall x)\big(P(x)\big)\right] \equiv (\exists x)\big(\neg P(x)\big)$;
2. $\neg\left[(\exists x)\big(P(x)\big)\right] \equiv (\forall x)\big(\neg P(x)\big)$.

С помощью кванторной символики можно записывать на языке логики предикатов различные предложения. Проанализировав строение простых высказываний, можно сделать вывод о том, что содержание любого из них может быть сведено к утверждению о наличии или отсутствии у предметов определенных свойств.

При этом такие утверждения могут относиться не только к отдельным предметам, но и к классам предметов.

Высказывание, в котором утверждается, что все предметы класса обладают или не обладают определенным свойством, называется *общеутвердительным* или *общеотрицательным.*

Высказывание, в котором утверждается, что некоторые предметы класса обладают или не обладают определенным свойством, называется *частноутвердительным* или *частноотрицательным.*

Пусть класс предметов обозначается буквой S, свойство – буквой P. Тогда общеутвердительное суждение «Все прямоугольники – параллелограммы» на языке логики предикатов будет выглядеть следующим образом: $(\forall x)\big(S(x)\to P(x)\big)$. Общеотрицательное суждение «Никакой треугольник не является окружностью» на языке логики предикатов будет записано так: $(\forall x)\big(S(x)\to\neg P(x)\big)$.

Частноутвердительному суждению «Некоторые функции – периодические» соответствует следующая формула логики предикатов $(\exists x)\big(S(x)\wedge P(x)\big)$. Частноотрицательному суждению «Некоторые ромбы нельзя вписать в окружность» – $(\exists x)\big(S(x)\wedge\neg P(x)\big)$.

Отрицанием общеутвердительного суждения является суждение частноотрицательное, а отрицанием общеотрицательного суждения является суждение частноутвердительное, и наоборот.

Пример. Записать символически на языке логики предикатов предложение «**Все математики знают математическую логику**», построить его отрицание и перевести полученное высказывание на русский язык.

Обозначим через *P(x)*: «*x* – математик», через *Q(x)*: «*x* знает математическую логику». Тогда на языке логики предикатов данное предложение будет записано следующим образом:

$$(\forall x)\big(P(x)\to Q(x)\big).$$

Строим отрицание полученного высказывания по первому закону де Моргана:

$$\neg\Big((\forall x)\big(P(x)\to Q(x)\big)\Big)\equiv(\exists x)\Big(\neg\big(P(x)\to Q(x)\big)\Big)\equiv(\exists x)\neg\big(\neg P(x)\vee Q(x)\big)\equiv$$
$$\equiv(\exists x)\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)$$

Переведем полученное высказывание на русский язык, получим предложение «**Некоторые математики не знают математической логики**».

Операции квантификации можно применять к предикатам любой размерности. При этом если исходный предикат был n-местным то после связывания одной из переменных любым квантором получим предикат, зависящий уже от $n-1$ переменной, то есть $(n-1)$-местный предикат. Таким образом, можно связать все переменные кванторами и получить из предиката любой размерности высказывание.

Если в n-местном предикате кванторами связаны не все переменные, то переменные с кванторами так и называют *связанными*, а без кванторов – *свободными*. При этом значение предиката от связанной переменной уже не зависит.

2.4. Формулы логики предикатов

Прежде чем дать строгое определение формулы логики предикатов, определим множество символов, образующих алфавит, из которого формулы будут строиться.

В алфавит логики предикатов входят:

–*переменные* $x, y, z, ...$ и эти же переменные с натуральными индексами. Природа этих переменных в логике предикатов не рассматривается. Считается, что существует некоторое непустое множество, откуда эти переменные могут принимать свои значения. Множество называют предметной областью, а сами переменные – предметными переменными;

–*нульместные предикатные переменные (высказывания)* $P, Q, R, ...$ и эти же переменные с натуральными индексами;

– n*-местные предикатные переменные* $(n \geq 1)$ $P(-), Q(-), ...,$ $P(-,-),\ Q(-,-),\ ...\ ,\ P\underbrace{(-,-,...,-)}_{n\ раз}, Q\ \underbrace{(-,-,...,-)}_{n\ раз}, ...$ с указанием мест в них;

–*символы логических и кванторных операций* $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

–*вспомогательные символ*ы (,) – открывающая и закрывающая скобки, = – знак равенства и , – запятая.

Дадим строгое определение формулы логики предикатов.

1. Всякая нульместная предикатная переменная есть формула.

2. Если $P\underbrace{(-,-,...,-)}_{n\ раз}$ n*-местная предикатная переменная*, то $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – формула со свободным вхождением переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

3. Если F и H – формулы, то $\neg F$, $F \wedge H$, $F \vee H$, $F \rightarrow H$, $F \leftrightarrow H$ – тоже формулы. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F, H, являются свободными (связанными) и в новых формулах.

4. Если F – формула, x – предметная переменная, входящая в F свободно, то $(\forall x)(F(x))$ и $(\exists x)(F(x))$ – формулы, в которых переменная x связанная, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу F свободно или связанно, остаются и в новых формулах соответственно такими же.

5. Никаких других формул логики предикатов, кроме полученных по пунктам 1 – 4 этого определения, нет.

Формулы, определённые в пунктах 1 и 2, называют *элементарными* или *атомарными*, остальные формулы – составными.

Формулы логики предикатов являются формальными объектами, построенными по определенным правилам. Смысл они приобретают лишь при замене предметных переменных значениями из выбранного множества (предметной области), а предикатных букв – конкретными предикатами (отношениями) на этом множестве. Такая замена называется *интерпретацией*.

Интерпретацией формулы F логики предикатов называется всякая система $\{D, \omega\}$, где D – область интерпретации, ω – соответствие, которое каждой предметной переменной формулы F сопоставляет элемент множества D, а каждой

n-местной предикатной переменной $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-местный предикат на множестве D.

Пример. Пусть $F = (\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ – формула логики предикатов. Построим её интерпретацию на множестве $D = R \times R$ (R – множество действительных чисел).

Пусть ω сопоставляет двухместной предикатной переменной $P(-,-)$ следующий двухместный предикат на множестве $D = R \times R$: $P(x, y): x > y$

Тогда при данной интерпретации формула $F = (\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ превращается в следующее выражение на выбранной области интерпретации: $F = (\forall x)(\exists y)(x > y),\ x, y \in R$.

Данное выражение есть истинное высказывание, утверждающее, что для любого действительного числа существует меньшее него действительное число (множество действительных чисел не ограничено снизу).

Из примера видно, что для одной и той же формулы логики предикатов можно построить бесконечное число интерпретаций, выбирая каждый раз новую область интерпретации и на неё – новые предикаты, соответствующие входящим в формулу предикатным буквам. Соответственно, при некоторых интерпретациях формула может обращаться в истинное высказывание, при других – в ложное.

Если же в исходной формуле не все предметные переменные были связаны кванторами, то при интерпретации она превратится в предикат на выбранной области интерпретации. И только после замены свободных предметных переменных конкретными значениями – в высказывание.

Формула логики предикатов называется *выполнимой (опровержимой*) на множестве *D*, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Формула логики предикатов называется *тождественно-истинной (тождественно-ложной)* на множестве *D*, если при любой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно-истинный (тождественно-ложный) предикат.

Формула логики предикатов называется *общезначимой или тавтологией (противоречием)*, если при любой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на любых множествах, она превращается в тождественно-истинный (тождественно-ложный) предикат.

Например, формула $F = (\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ из приведенного выше примера является выполнимой. Формула $F = \neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$ будет тавтологией. Формула $\neg P(x) \wedge (\forall y)(P(y))$ – противоречием.

3. Булевы функции

3.1. Булевы функции от одного и двух аргументов

Булевой функцией от одного аргумента называется отображение *f* множества {0, 1} в себя:

f: {0, 1}→{0, 1}.

Таким образом, аргумент булевой функции может принимать одно из значений: 0 или 1, и сама функция принимает значения в этом же множестве. Нетрудно подсчитать, что всего существует четыре различных булевых функций от одного аргумента, которые представлены в таблице.

Аргумент	Булевы функции			
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функция $f_0(x) = 0$, поэтому она так и называется – *тождественный ноль.* Функция $f_1(x) = x$ называется *тождественной функцией.* $f_2(x)$ принимает значение, противоположное значению своего аргумента, и поэтому называется *отрицанием*: $f_2(x) = x'$. Функция $f_3(x) = 1$ называется *тождественной единицей.*

Булевой функцией от двух аргументов называется отображение *g* декартова квадрата множества {0, 1} в это же множество:

$g: \{0, 1\}\times\{0, 1\}\to\{0, 1\}$.

Булевой функцией от n аргументов называется отображение *f* декартового произведения множества {0, 1} n раз на себя в это же множество:

$$f: \underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n\ раз} \to \{0,1\}.$$

Можно доказать, что различных булевых функций от *n* аргументов существует ровно 2^{2^n}. Поэтому булевых функций от 2 аргументов будет 16. Перечислим все эти функции.

Аргументы		Булевы функции															
x	*y*	0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	+	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\vert$	1
		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции в таблице пронумерованы так, что номер функции, записанный в двоичной системе счисления, совпадает со столбцом ее значений. Охарактеризуем каждую из функций.

Нулевая и последняя функции есть *тождественный нуль* и *тождественная единица* соответственно. Третья и пятая тождественно равны своему первому и второму аргументу соответственно, а десятая и двенадцатая - *отрицанию* первого и второго аргумента:

$g_3(x, y) = x$, $g_5 = y$, $g_{10}(x, y) = y'$, $g_{12}(x, y) = x'$.

Первая функция есть *конъюнкция*, седьмая – *дизъюнкция*, девятая – *эквивалентность*, тринадцатая – *импликация* в том смысле как они определены и для высказываний:

$g_1(x, y) = x\cdot y$, $g_7(x, y) = x\vee y$, $g_9(x, y) = x\leftrightarrow y$, $g_{13}(x, y) = x\to y$.

Одиннадцатая функция носит название *антиимпликации*, так у нее *y* есть посылка, а *x* – заключение, а вторая и четвертая функции есть *отрицание импликации* и *антиимпликации* соответственно:

$g_{11}(x, y) = x \leftarrow y = y \rightarrow x$, $g_2(x, y) = \left(x \rightarrow y\right)'$, $g_4(x, y) = \left(x \leftarrow y\right)'$.

Шестая функция называется *сложением по модулю 2* или *суммой Жегалкина* и является отрицанием эквивалентности, восьмая – *стрелкой Пирса* и является отрицанием дизъюнкции, четырнадцатая – *штрихом Шеффера* и является отрицанием конъюнкции:

$g_6(x, y) = x + y = \left(x \leftrightarrow y\right)'$, $g_8(x, y) = x \downarrow y = \left(x \vee y\right)'$,

$g_{14}(x, y) = x \mid y = \left(x \cdot y\right)'$.

Две булевы функции называются *равными,* если они принимают одинаковые значения на любых одинаковых наборах значений переменных.

Суперпозицией булевых функций $g_1(y_1^1, y_1^2, ..., y_1^{m_1}), ..., g_n(y_n^1, y_n^2, ..., y_n^{m_n})$ в булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется новая булева функция *F*, получающаяся из функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подстановкой вместо (всех или некоторых) аргументов x_1, $x_2, \ldots, x_n$ функций $g_1, g_2, \ldots, g_n$ соответственно.

Например, построим суперпозицию функций $g_1(x, y) = x \cdot y$ и $g_8(x, y) = = x \downarrow y$ в функцию $f(x, y) = (x \vee y) \rightarrow x$:

$F(x, y) = f(g_1, g_8) = (x \cdot y \vee x \downarrow y) \rightarrow x \cdot y$.

Для булевых функций выполняются те же законы, что и для соответствующих логических операций над высказываниями: коммутативность, ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции, законы поглощения, де Моргана, двойного отрицания и т.д., с помощью которых можно сложные булевы функции приводить к более простому виду.

Пример. Упростить выражение для булевой функции:

1. $f(x, y, z) = (x' \cdot y' \cdot z \vee x' \cdot y \cdot z) \vee (x \cdot y' \cdot z \vee x \cdot y \cdot z) \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по законам ассоциативности и коммутативности*].

2. $f(x, y, z) = (y' \vee y) \cdot x' \cdot z \vee (y' \vee y) \cdot x \cdot z) \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по законам коммутативности и дистрибутивности*].

3. $f(x, y, z) = (1 \cdot x' \cdot z) \vee (1 \cdot x \cdot z) \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по закону исключенного третьего*].

4. $f(x, y, z) = x' \cdot z \vee x \cdot z \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по свойству операции конъюнкции* $x \cdot 1 = x$].

5. $f(x, y, z) = \left(x' \vee x\right) \cdot z \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по закону дистрибутивности*].

6. $f(x, y, z) = 1 \cdot z \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по закону исключенного третьего*].

7. $f(x, y, z) = z \vee x \cdot y \cdot z'$ [*по свойству операции конъюнкции* $x \cdot 1 = x$].

8. $f(x, y, z) = (z \vee x \cdot y) \cdot (z \vee z')$ [*по закону дистрибутивности*].

9. $f(x, y, z) = (z \vee x \cdot y) \cdot 1$ [*по закону исключенного третьего*].

10. $f(x, y, z) = z \vee x \cdot y$ [*по свойству операции конъюнкции* $x \cdot 1 = x$].

Кроме законов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, здесь использовался закон исключенного третьего: $x \vee x'$ = 1 и свойство операции конъюнкция: $x \cdot 1 = x$.

3.2. Релейно-контактные схемы

Под *релейно-контактной схемой (РКС)* понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Контакты РКС делятся на *замыкающие* и *размыкающие.* Каждый контакт подключен к *реле* (переключателю), причем к одному реле может быть подключено несколько контактов. Когда реле срабатывает, т.е. через него идет ток, то все подключенные к нему замыкающие контакты замыкаются, а размыкающие – размыкаются. При отключении реле все происходит в обратном порядке.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная – x_1, или $x_2, \ldots$, или x_n. Каждая переменная, соответствующая некоторому реле, принимает значение 1, когда реле срабатывает и значение 0 при отключении реле. Все замыкающие контакты, подключенные к реле *x*, обозначаются также *x*, а размыкающие – x'. Это означает, что при срабатывании реле все замыкающие контакты принимают значение 1, а размыкающие – значение 0. При отключении реле все происходит наоборот.

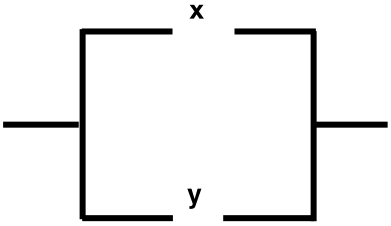
Тем самым всей РКС ставится в соответствие булева переменная *y*, которая зависит от булевых переменных x_1, $x_2, \ldots$, x_n, обозначающих реле и участвующих в данной схеме. Если при данном наборе состояний реле x_1, $x_2, \ldots$, x_n вся РКС проводит ток, то переменная у принимает значение 1, если схема ток не проводит, то переменная у принимает значение 0.

Поскольку каждый набор состояний реле x_1, $x_2, \ldots$, x_n представляет набор длины *n* из нулей и единиц, то каждая РКС задает правило, согласно которому каждому такому набору сопоставляется также либо 0, либо 1. Таким образом, каждая РКС определяет некоторую булеву функцию *y* от *n* аргументов, которая принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов x_1, $x_2, \ldots$, x_n, соответствующих тем состояниям реле x_1, $x_2, \ldots$, x_n, при которых данная схема проводит ток. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *функцией проводимости* данной РКС.

Рассмотрим простейшие РКС и найдем их функции проводимости.

Очевидно, что эта схема проводит ток тогда и только тогда, когда оба контакта замкнуты, то есть только тогда, когда обе переменные x и y принимают значение 1. Булева функция двух аргументов, удовлетворяющая этому условию, есть конъюнкция, поэтому функция проводимости данной РКС: $f(x, y) = x \cdot y$.

Говорят, что *последовательное соединение двух контактов* реализует конъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.



Вторая схема проводит ток тогда и только тогда, когда хотя бы один из контактов замкнут, то есть когда хотя бы одна из булевых переменных x или y принимает значение 1. Булева функция двух аргументов, удовлетворяющая этому условию, есть дизъюнкция, поэтому функция проводимости данной РКС: *f(x, y) = x∨y*.

Говорят, что *параллельное соединение двух контактов* реализует дизъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Для булевых функций может быть доказана следующая теорема:

Теорема. *Любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.*

Согласно этой теореме, всякая булева функция может быть реализована в виде РКС.

Пример. Построить релейно-контактную схему, для которой функция $f(x,y,z,u)=\left[\left(x'\vee y\right)\cdot\left(y\cdot z\vee x\right)\right]\vee u\cdot z$ являлась бы функцией проводимости.

Функция может быть реализована как параллельное соединение двух веток: первая выражена квадратной скобкой, вторая – произведением $u\cdot z$. Квадратная скобка реализуется последовательным соединением двух круглых скобок. Первая круглая скобка есть параллельное соединение двух контактов – x' и *y*, вторая - параллельное соединение контакта *x* и последовательного соединения контактов *y* и *z*:

На рисунке показана реализация булевой функции

$$f(x,y,z,u)=\left[\left(x'\vee y\right)\cdot\left(y\cdot z\vee x\right)\right]\vee u\cdot z$$

в виде релейно-контактной схемы.

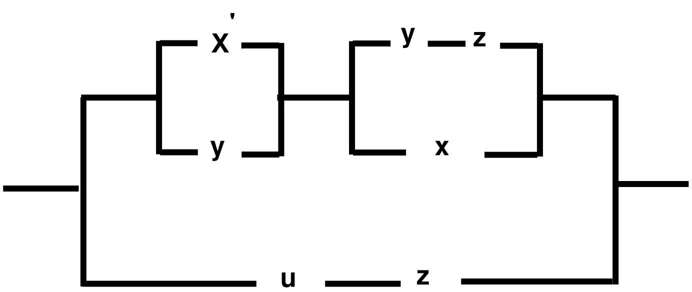


Рис. 4. ***Релейно-контактная схема функции*** $f(x,y,z,u)$

Согласно теореме о том, что всякую булеву функцию можно представить как суперпозицию конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, для каждой булевой функции существует равносильная ей функция, содержащая только эти три операции. Очевидно, что такое представление неоднозначно. Однако среди всех таких представлений существуют так называемые *нормальные представления,* играющие особую роль.

Конъюнктивным (дизъюнктивным) одночленом от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется булева функция, представляющая конъюнкцию (дизъюнкцию) самих этих аргументов или их отрицаний. Причем союз «или» употребляется не в исключающем смысле, например, $f=x\vee y\vee x'\vee z$ – дизъюнктивный одночлен от аргументов *x, y, z*.

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов.

Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов.

Например, $f(x,y,z)=\left(x'\vee y\vee z\right)\cdot\left(x\vee y\vee x'\vee z\right)\cdot\left(x\vee y\vee z'\right)$ – конъюнктивная нормальная форма булевой функции от аргументов *x, y, z*.

Очевидно, что всякая булева функция обладает как конъюнктивной, так и дизъюнктивной нормальной формой, причем этих форм существует неограниченно много. Среди множества всех таких форм существует одна, как конъюнктивная, так и дизъюнктивная, которая для данной функции единственна. Это *совершенная конъюнктивная (дизъюнктивная) нормальная форма.*

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *совершенным,* если в него от каждой пары букв x_i и x_i' входит только одна буква.

Нормальная форма от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *совершенной,* если в нее входят лишь совершенные одночлены от этих аргументов.

Например, $f(x,y,z)=\left(x'\vee y\vee z\right)\cdot\left(x\vee y\vee z\right)\cdot\left(x\vee y\vee z'\right)$ – совершенная конъюнктивная нормальная форма булевой функции от аргументов *x, y, z*.

Теорема. Для каждой булевой функции от *n* аргументов, тождественно не равной 0, существует и притом единственная СДНФ.

Теорема. Для каждой булевой функции от *n* аргументов, тождественно не равной 1, существует и притом единственная СКНФ.

Существуют различные способы приведения булевой функции к СДНФ и СКНФ: с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности.

Пример. Для функции $f(x,y,z)=\left[\left(x'\vee y\right)\cdot\left(y\cdot z\vee x\right)\right]\vee x\cdot z$ построить СКНФ и СДНФ двумя способами.

Рассмотрим первый способ (с помощь равносильных преобразований).

Получим СДНФ

1. $f(x,y,z)=\left(x'\cdot\left(y\cdot z\vee x\right)\vee y\cdot\left(y\cdot z\vee x\right)\right)\vee x\cdot z$ [*по закону дистрибутивности*].

2. $f(x,y,z)=x'\cdot y\cdot z\vee x'\cdot x\vee y\cdot y\cdot z\vee y\cdot x\vee x\cdot z$ [*по закону дистрибутивности*].

3. $f(x,y,z)=x'\cdot y\cdot z\vee 0\vee y\cdot z\vee y\cdot x\vee x\cdot z$ [*по свойству* $x\cdot x'=0$ *и закону идемпотентности*].

4. $f(x,y,z)=x'\cdot y\cdot z\vee y\cdot z\vee y\cdot x\vee x\cdot z$ [*по свойству* $x\vee 0=x$].

Первый конъюнктивный одночлен является совершенным, а остальные три – нет, так как в каждом из них нет какого-либо аргумента (или его отрицания). Приведем эти одночлены к совершенной форме.

1. $y\cdot z=y\cdot z\cdot 1$ [*по свойству* $x\cdot 1=x$].

2. $y\cdot z=y\cdot z\cdot 1=y\cdot z\cdot(x\vee x')$ [*по закону исключенного третьего* $x\vee x'=1$].

3. $y\cdot z=y\cdot z\cdot 1=y\cdot z\cdot(x\vee x')=y\cdot z\cdot x\vee y\cdot z\cdot x'$ [*по дистрибутивному закону*].

Получили два совершенных конъюнктивных одночлена $y\cdot z\cdot x,\ y\cdot z\cdot x'$

Аналогично: $y \cdot x = y \cdot x \cdot 1 = y \cdot x \cdot (z \vee z') = y \cdot x \cdot z \vee y \cdot x \cdot z'$;

$x \cdot z = x \cdot z \cdot 1 = x \cdot z \cdot (y \vee y') = x \cdot z \cdot y \vee x \cdot z \cdot y'$.

Тогда для функции f получим (с учетом коммутативного закона):

$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \cdot \vee x' \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z' \vee x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y' \cdot \mathrm{z}$.

Применяем закон идемпотентности к конъюнкции $x \cdot y \cdot z$ и получаем СДНФ: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \cdot \vee x' \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z' \vee x \cdot y' \cdot \mathrm{z}$

Получим СКНФ

1. $f(x, y, z) = (x' \vee y \vee x \cdot z) \cdot (y \cdot z \vee x \vee x \cdot z)$[*по дистрибутивному закону*].

2. $f(x, y, z) = ((x' \vee x \cdot z) \vee y) \cdot (y \cdot z \vee (x \vee x \cdot z))$ [*по ассоциативному закону и по коммутативному закону*].

3. $f(x, y, z) = ((x' \vee x) \cdot (x' \vee z) \vee y) \cdot (y \cdot z \vee (x \vee x \cdot z))$ [*по дистрибутивному закону*].

4. $f(x, y, z) = ((x' \vee x) \cdot (x' \vee z) \vee y) \cdot (y \cdot z \vee x)$ [*по закону поглощения*].

5. $f(x, y, z) = ((x' \vee z) \vee y) \cdot (y \cdot z \vee x)$ [*по закону исключенного третьего*].

6. $f(x, y, z) = (x' \vee z \vee y) \cdot (y \vee x) \cdot (z \vee x)$ [*по ассоциативному закону и дистрибутивному закону*].

Первый конъюнктивный одночлен является совершенным, а остальные два – нет, так как в каждом из них нет какого-либо аргумента (или его отрицания). Приведем эти одночлены к совершенной форме.

1. $y \vee x = x \vee y$ [*по коммутативному закону*].

2. $y \vee x = x \vee y = x \vee y \vee 0$ [*по свойству* $x \vee 0 = x$].

3. $y \vee x = x \vee y = x \vee y \vee 0 = x \vee y \vee (z \cdot z')$ [*по свойству* $x \cdot x' = 0$].

4. $y \vee x = x \vee y = x \vee y \vee 0 = x \vee y \vee (z \cdot z') = (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee z')$ [*по дистрибутивному закону*].

Аналогично $x \vee z = x \vee z \vee 0 = x \vee z \vee (y \cdot y') = (x \vee z \vee y) \cdot (x \vee z \vee y')$.

Тогда для функции f получим СКНФ (с учетом закона поглощения и коммутативного закона):

$f(x, y, z) = (x' \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee y \vee z') \cdot (x \vee y' \vee z)$

Рассмотрим второй способ (с помощью таблицы истинности)

Строим для функции $f(x, y, z) = [(x' \vee y) \cdot (y \cdot z \vee x)] \vee x \cdot z$ таблицу истинности.

Введем обозначения: $A = x' \vee y$, $B = y \cdot z$, $C = y \cdot z \vee x$, $D = (x' \vee y) \cdot (y \cdot z \vee x)$, $E = x \cdot z$

x	y	z	x'	A	B	C	D	E	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Чтобы для функции *f* построить СДНФ, нужно:

–выбрать все те наборы значений ее аргументов, на которых она принимает значение 1;

–для каждого такого набора выписать совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 на этом наборе и только на нем;

–полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить дизъюнкцией.

Чтобы для функции *f* построить СКНФ, нужно:

–выбрать все те наборы значений ее аргументов, на которых она принимает значение 0;

–для каждого такого набора выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий значение 0 на этом наборе и только на нем;

–полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить конъюнкцией.

Применим эти правила к заданной функции.

СДНФ.

Значение 1 функция $f(x,y,z)=\left[\left(x'\vee y\right)\cdot\left(y\cdot z\vee x\right)\right]\vee x\cdot z$ принимает на наборах значений аргументов *x, y, z*, расположенных в четвертой, шестой, седьмой и восьмой строках таблицы истинности. Для каждого из этих наборов строим совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 на этом наборе и только на нем и соединяем их дизъюнкцией.

Так как в четвертой строке таблицы истинности *x* принимает значение 0, а *y* и *z* – 1, то чтобы конъюнкция трех аргументов была истина на этом наборе и только на нем, *x* должен войти в нее со знаком отрицания, а *y* и *z* – без отрицания. Аналогично рассуждаем для остальных наборов значений аргументов.

СДНФ: $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z\cdot\vee x'\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot z'\vee x\cdot y'\cdot \mathrm{z}$

Аналогично строим СКНФ.

СКНФ: $f(x,y,z)=\left(x'\vee y\vee z\right)\cdot\left(x\vee y\vee z\right)\cdot\left(x\vee y\vee z'\right)\cdot\left(x\vee y'\vee z\right)$

Сравнивая с выражениями, полученными первым способом, видим, что они одинаковы с точностью до порядка следования совершенных одночленов. Используя СДНФ и СКНФ можно построить релейно-контактную схему с заданными условиями работы.

4. Машина Тьюринга

В 1937 году английский инженер и математик А. Тьюринг сформулировал понятие алгоритма в виде абстрактной математической машины, которая по имени своего создателя получила название *машины Тьюринга (МТ).*

Машину Тьюринга можно представить себе в виде некоторого автоматического устройства, через считывающую головку которого проходит бесконечная в обе стороны лента, разбитая на ячейки. В каждый момент времени устройство, находясь в определенном состоянии, обозревает содержимое только одной ячейки, в которой записано не больше одного символа некоторого заданного алфавита. Рабочий шаг машины заключается в том, что устройство стирает символ, записанный в обозреваемой ячейке, заменяет его на новый символ и перемещается на соседнюю слева или справа ячейку в новом состоянии. Шаг осуществляется в соответствии с *командой.* Набор команд задает *программу* данной МТ.

Чтобы задать программу МТ, необходимо задать:

1. Внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, символы которого записываются в ячейки ленты. Символ a_0 называют «пустым»; он означает, что в ячейке ничего не записано и вводится для удобства рассуждений.

2. Алфавит внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$, в каждом из которых может находиться данная МТ. Среди всех внутренних состояний машины выделяют два: q_0- состояние остановки, попав в которое, машина прекращает работу, и q_1- начальное состояние, находясь в котором, машина начинает работу.

3. Набор команд, каждая из которых имеет вид:

$$q_i a_j \to q_k a_l K,\ где \begin{cases} 1 \le i \le m, & 0 \le j \le n, \\ 0 \le k \le m, & 0 \le l \le n, \\ K \in \{Л, П, С\}. \end{cases}$$

Буквы Л, П, С, записанные в правой части команды означают, что после замены символа a_j на a_l, машина передвигается на одну ячейку влево (Л), вправо (П) или остается на месте (С), переходя из состояния q_i в состояние q_k.

Так как работа МТ полностью определяется ее состоянием в данный момент - q_i и содержимым обозреваемой в этот момент ячейки - a_j, то для каждой пары символов (q_i, a_j), программа МТ должна содержать одну и только одну команду, начинающуюся этими символами. Очевидно, ни одна команда не может начинаться с символа q_0, поскольку он означает состояние остановки. Таким образом, программа МТ с внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$ должна содержать $m \cdot (n + 1)$ команд. Программа МТ чаще всего записывается в виде таблицы, в строках которой записаны символы внешнего алфавита, в столбцах – символы алфавита внутренних состояний, а на пересечении строки с символом q_i и столбца с символом a_j записана правая часть команды $q_k a_l K$:

Q \ **A**	$\mathbf{a}_0$	$\mathbf{a}_1$	…	$\mathbf{a}_j$	…	a_n
$\mathbf{q}_1$						
⋮						

$\mathbf{q}_i$				$\mathbf{q}_k \mathbf{a}_l \mathbf{K}$		
$\vdots$						
q_m						

Словом в алфавите A или Q или $A \cup Q$ называется любая конечная последовательность букв соответствующего алфавита.

k-той конфигурацией называется слово в алфавите A, записанное на ленте к началу k-го шага работы МТ, с указанием того, какая ячейка обозревается на этом шаге и в каком состоянии находится машина.

Конфигурация называется *заключительной,* если состояние, в котором находится МТ – заключительное, т.е. состояние остановки q_0.

Непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\}$ *воспринимается МТ в стандартном положении,* если оно записано в последовательных ячейках ленты, все другие ячейки пусты, и МТ обозревает крайнюю справа ячейку из тех, в которых записано слово α. Если при этом МТ находится в состоянии q_1, то стандартное положение называется *начальным,* если в состоянии q_0 - то *заключительным.*

Слово α перерабатывается МТ в слово β, если от слова α, воспринимаемого машиной в начальном состоянии, после выполнения конечного числа команд МТ приходит к слову β, воспринимаемому в положении остановки.

Задача переработки слов МТ с заданной программой называется *задачей применения МТ к словам.*

ПРИМЕР. Применить машину Тьюринга с данной программой:

Q \ **A**	$\mathbf{a}_0$	**1**	*
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1 \mathbf{a}_0$**П**	$\mathbf{q}_3 \mathbf{a}_0$**Л**	$q_0 a_0$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2 \mathbf{a}_0$**Л**	$\mathbf{q}_4 \mathbf{a}_0$**П**	$q_4 a_0$П
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2 \mathbf{a}_0$**П**	$\mathbf{q}_3$**1Л**	q_3*Л
q_4	$q_1 a_0$Л	$q_4$1П	q_4*П

к слову α = 111*1, воспринимаемому в начальном стандартном положении.

РЕШЕНИЕ:

Так как слово α = 111*1 воспринимается МТ в начальном стандартном положении, то в начальный момент времени машина обозревает крайнюю правую ячейку, видит в ней символ 1, находясь в начальном состоянии q_1:

$$1\,1\,1*\underbrace{1}_{q_1} \quad .$$

Находим в программе МТ команду, которая начинается сочетанием символов $q_1$1. Для этого выбираем в таблице строку с символом q_1 и столбец с символом 1. На пересечении этих строки и столбца записана вторая часть команды: $q_3 a_0$Л, выполняя которую машина стирает 1, записывает вместо нее пустой символ a_0 и переходит в соседнюю слева ячейку в состоянии q_3:

$$1\,1\,1\underbrace{\;}_{q_3}*a_0\,.$$

В ячейке слева машина обозревает символ * в состоянии q_3. На пересечении строки q_3 и столбца * записана команда q_3*Л, по которой машина оставляет * без изменения и в том же состоянии q_3 передвигается еще на одну ячейку влево:

$$1\;1\underbrace{\;1}_{q_3}*a_0\,.$$

Теперь машина обозревает 1 в состоянии q_3. Следующий шаг она делает согласно команде: $q_3 1 \to q_3 1$Л:

$$1\underbrace{\;1}_{q_3}\;1*a_0\,.$$

Очевидно, что эта команда будет повторяться до тех пор, пока машина будет «видеть» 1, находясь в состоянии q_3:

$$\underbrace{\;1}_{q_3}1\;1*a_0 \quad \text{и} \quad \underbrace{a_0}_{q_3}1\;1\;1*a_0\,.$$

«Пересчитав» все единицы, считывающее устройство дойдет до пустой ячейки, в которой по договоренности записан пустой символ a_0. Обозревая a_0 в состоянии q_3, машина должна выполнить следующую команду: $q_3 a_0 \to q_2 a_0$П,

согласно которой машина перейдет к ячейке с 1 в новом состоянии q_2:

$$a_0\;\underbrace{1}_{q_2}\,1\;1*a_0\,.$$

Далее по команде $q_2 1 \to q_4 a_0$П машина стирает 1 и переходит уже на соседнюю справа ячейку в новом состоянии q_4:

$$a_0\,a_0\underbrace{\;1\;}_{q_4}\;1*a_0\,.$$

По команде $q_4 1 \to q_4 1$П машина, оставив без изменений следующую справа 1 и оставаясь в состоянии q_4, дойдет в этом состоянии до ячейки с символом *:

$$a_0\;1\underbrace{1}_{q_4}*a_0 \quad \text{и} \quad a_0\;1\,1\underbrace{\;*\;}_{q_4}a_0\,.$$

Далее по команде $q_4 * \to q_4$*П, машина, оставив * без изменения, передвинется еще на одну ячейку вправо, где нет никакого символа, то есть, по договоренности, мы считаем, что там записан пустой символ a_0:

$$a_0\;1\,1*\underbrace{\;a_0\;}_{q_4}\;a_0\,.$$

По команде $q_4 a_0 \to q_1 a_0$Л, «проверив», что единиц справа на ленте больше нет, машина, ничего не вписав в пустую ячейку, возвращается назад, влево, перейдя в состояние q_1:

$$a_0\;1\,1\;\underbrace{*}_{q_1}\;a_0\,.$$

Наконец, по команде $q_1 * \to q_0 a_0$ машина «стирает» символ * и останавливается.

Таким образом, слово α = 111*1 перерабатывается данной МТ в слово β = 11.

Можно сказать, что данная МТ вычитает из числа единиц, записанных слева от *, число единиц, записанных справа от нее.

Конструирование машин Тьюринга

Задача написания программы машины Тьюринга, которая решала бы некоторую проблему, получила название *задачи конструирования машины Тьюринга.* Для конструирования машины Тьюринга необходимо задать внешний алфавит из n символов, алфавит внутренних состояний из m символов и программу, содержащую $m(n + 1)$ команду. Формат допустимых команд описан в задании 1. Задача конструирования является более сложной, чем задача применения готовой машины Тьюринга к словам. Здесь не может существовать единого алгоритма, описывающего процесс конструирования программы. Выбор символов внешнего алфавита и состояний внутреннего алфавита обуславливается данными конкретной задачи, для решения которой строится программа.

ПРИМЕР. Сконструировать машину Тьюринга, которая вычисляла бы функцию $f(x) = 2x$ для чисел в десятичной системе счисления.

РЕШЕНИЕ:

В условии сказано, что числа представлены в десятичной системе счисления, поэтому, кроме обязательного пустого символа a_0 во внешний алфавит необходимо включить цифры от 0 до 9:

$$A = \{a_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\ .$$

В алфавит внутренних состояний обязательно входят начальное состояние q_1 и состояние остановки q_0. Иногда ими можно и ограничиться, а иногда необходимы новые состояния. В нашем случае, чтобы определить это, проведем ряд рассуждений.

При удвоении натурального числа, записанного в десятичной системе счисления, реализуется один из двух случаев.

1. Если все цифры исходного числа не превосходят 4, то каждая из цифр заменяется цифрой, в два раза большей – получаем удвоенное число. Для осуществления этой операции достаточно состояния q_1 и передвижения считывающего устройства влево на соседнюю ячейку.
2. Если же одна или несколько цифр превышают 4, то потребуется новое состояние q_2. Оно должно обеспечить не только замену последней цифры, но и изменение предыдущих цифр числа.

Получаем следующий набор команд:

1. $q_1 0 \rightarrow q_1 0Л$;
2. $q_1 1 \rightarrow q_1 2Л$;
3. $q_1 2 \rightarrow q_1 4Л$;
4. $q_1 3 \rightarrow q_1 6Л$;
5. $q_1 4 \rightarrow q_1 8Л$.

В первом случае, после удвоения каждой цифры числа, считывающее устройство доходит до пустой ячейки в состоянии q_1. Так как число удвоено, то машина должна остановиться. Получаем пятую команду:

6. $q_1\, a_0 \rightarrow q_0\, a_0$.

Во втором случае, когда последняя (или вообще, какая-либо из цифр) числа есть одна из цифр от 5 до 9, получаем следующие команды:

7. $q_1 5 \rightarrow q_2 0Л$;
8. $q_1 6 \rightarrow q_2 2Л$;
9. $q_1 7 \rightarrow q_2 4Л$;

$$10.\ \ q_1 8 \to q_2 6Л;$$
$$11.\ \ q_1 9 \to q_2 8Л.$$

Состояние q_1 в правой части этих команд использовать нельзя, так как в этом случае машина, перейдя влево, удвоит предыдущую цифру и мы получим неверный результат. Например, число 15 при использовании только состояния q_1 перешло бы в число 20, а не в 30, как должно быть.

Теперь осталось задать команды для случая, когда машина в состоянии q_2 обозревает ячейку с одной из цифр или с пустым символом. Получаем последние 11 команд, которые завершают программу.

12. $q_2 0 \to q_1 1Л;$	17. $q_2 5 \to q_2 1Л;$
13. $q_2 1 \to q_1 3Л;$	18. $q_2 6 \to q_2 3Л;$
14. $q_2 2 \to q_1 5Л;$	19. $q_2 7 \to q_2 5Л;$
15. $q_2 3 \to q_1 7Л;$	20. $q_2 8 \to q_2 7Л;$
16. $q_2 4 \to q_1 9Л;$	21. $q_2 9 \to q_2 9Л;$

$$22.\ q_2 a_0 \to q_0 1.$$

Команды с 12 по 16 обеспечивают правильное изменение цифр числа от 0 до 4, если эти цифры не являются последними в десятичной записи числа; для цифр от 5 до 9 ту же задачу решают команды с 17 по 21. Последняя команда программы срабатывает в том случае, когда машина «добирается» до пустой ячейки в состоянии q_2.

Таким образом, алфавит внутренних состояний сконструированной машины содержит три состояния:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}.$$

Проверим работу программы на числах **99108** и **1043**.

$$9910\underbrace{8}_{q_1} \xrightarrow{10} 991\underbrace{0}_{q_2}6 \xrightarrow{12} 99\underbrace{1}_{q_1}16 \xrightarrow{2} 9\underbrace{9}_{q_1}216 \xrightarrow{11}$$

$$\xrightarrow{11} a_0\underbrace{9}_{q_2}8216 \xrightarrow{21} \underbrace{a_0}_{q_2}98216 \xrightarrow{22} \underbrace{1}_{q_0}98216.$$

Действительно, **99108•2 = 198216.**

$$104\underbrace{3}_{q_1} \xrightarrow{4} 10\underbrace{4}_{q_1}6 \xrightarrow{5} 1\underbrace{0}_{q_1}86 \xrightarrow{1} \underbrace{1}_{q_1}086 \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \underbrace{a_0}_{q_1}2086 \xrightarrow{21} \underbrace{a_0}_{q_0}2086.$$

Действительно, **1043•2 = 2086.**

Машина произвольного доступа

Очередная попытка сформулировать понятие алгоритма в виде абстрактной математической машины была предпринята в 70-е годы 20 века. Эта машина получила название *машины произвольного доступа (МПД).*

МПД состоит из бесконечного числа регистров $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, в каждом из которых может быть записано натуральное число или 0. Будем обозначать число, записанное в регистре R_n через r_n.

Состоянием машины или *конфигурацией* будем называть последовательность чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Работа МПД заключается в изменении ее конфигураций путем выполнения команд в порядке их написания. Машина имеет следующие типы команд.

1. *Команды обнуления.* Для всякого натурального числа n имеется команда Z(n), действие которой заключается в замене содержимого регистра R_n на число 0. Содержимое других регистров при этом не меняется.

Обозначение: Z(n) - $r_n := 0$.

2. *Команды прибавления единицы.* Для всякого натурального числа n имеется команда S(n), действие которой заключается в увеличении содержимого регистра R_n на 1. Содержимое других регистров при этом не меняется.

Обозначение: S(n) - $r_n := r_n + 1$.

3. *Команды переадресации.* Для всяких натуральных чисел n и m имеется команда T(m, n), действие которой заключается в замене содержимого регистра R_n числом r_m, хранящимся в регистре R_m. Содержимое других регистров при этом не меняется.

Обозначение: T(m, n) - $r_n := r_m$ или $r_m \to R_n$.

4. *Команды условного перехода.* Для всяких натуральных n, m и q имеется команда J(m, n, q), действие которой заключается в следующем:

- сравнивается содержимое регистров R_n и R_m, затем:
- если $r_n = r_m$, то МПД переходит к выполнению команды с номером q;
- если $r_n \neq r_m$, то МПД переходит к выполнению команды, следующей по списку.

Пусть P – программа МПД, K_0 – начальная конфигурация. Применение программы P к начальной конфигурации $P(K_0)$ называется *вычислением.* Будем обозначать команды программы P через $I_1, I_2, \ldots, I_S$. В качестве начальных конфигураций будем рассматривать только такие, в которых имеется лишь *конечное число* ненулевых элементов и вместо $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ будем писать $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Опишем класс функций, вычислимых на МПД. Множество натуральных чисел с нулем обозначим N_0. Будем рассматривать частичные функции

$$f : N_0 \times N_0 \times \ldots \times N_0 \to N_0$$

Будем говорить, что программа P вычисляет функцию f с результатом b (b $\in$N), если она применима к начальной конфигурации $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, f определена на этой конфигурации и $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$.

ПРИМЕР.

Записать программу и построить блок-схему МПД, которая вычисляла бы функцию f(x, y) = x + y.

РЕШЕНИЕ:

В качестве начальной конфигурации возьмем (x, y, 0). Тогда содержимое первого регистра до начала работы программы будет равно x, второго - y, а третьего – 0:

$$R_1 : r_1 := x,\ R_2 : r_2 := y,\ R_3 : r_3 := 0.$$

Функция f(x, y) = x + y может быть вычислена следующей программой, состоящей из пяти команд:

I_1 = J(3, 2, 5) – команда условного перехода, которая сравнивает содержимое третьего и второго регистров и, если числа, записанные в них равны, то осуществляется переход к пятой команде I_5, а если не равны, то к следующей по списку команде I_2.

I_2 = S(1) - r_1 : = r_1 + 1 – команда прибавления единицы к содержимому первого регистра.

I_3 = S(3) - r_3 : = r_3 + 1 - прибавления единицы к содержимому третьего регистра.

I_4 = J(1, 1, 1) – команда, обеспечивающая цикл. Так как содержимое первого регистра всегда равно самому себе, то эта команда возвращает машину к выполнению первой команды до тех пор, пока число в третьем регистре не станет равно числу во втором регистре. Так прибавление по единице идет последовательно к содержимому третьего, а затем первого регистров, то когда в третьем регистре получим число y, то в первом, соответственно, получим $x + y = f(x, y)$.

I_5 - останов. - **r_1 : = x + y = f(x, y).**

Нумерация машин Тьюринга

Под нумерацией алгоритмов понимают эффективные кодирования натуральными числами множества всех алгоритмов для каждой из рассматриваемых моделей алгоритмов. Данные результаты относятся к числу фундаментальных, так как они используются, в частности, для установления невычислимости ряда конкретных функций.

Будем считать, что символы внешних алфавитов и алфавитов внутренних состояний машин Тьюринга берутся из двух множеств символов:

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots\} \text{ и } \{q_0, q_1, \ldots, q_j, \ldots\}.$$

При этом будем считать, что a_0 принадлежит всем внешним алфавитам машин Тьюринга и означает пустой символ, а символы q_0 и q_1 принадлежат всем алфавитам внутренних состояний и означают начальное состояние и состояние остановки соответственно. Назовем следующий набор символов *стандартным алфавитом*:

$$\mathbf{A} = \{Л, П, C, a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, q_0, q_1, \ldots, q_j, \ldots\}.$$

Каждому символу стандартного алфавита поставим в соответствие двоичный набор – *код* – согласно таблице 1.

Таблица 1

	Символ	**Код**	**Число нулей в коде**
Символы сдвига	**П**	**10**	**1**
	Л	**100**	**2**
	С	**1000**	**3**
Символы внешнего алфавита	**a_0**	**10000**	**4**
	a_1	**1000000**	**6**
	…	**…**	**…**
	a_i	**100…00**	**2i + 4**
	…	**…**	**…**
Символы алфавита состояний	**q_0**	**100000**	**5**
	q_1	**10000000**	**7**
	…	**…**	**…**
	q_j	**100…000**	**2i + 5**
	…	**…**	**…**

Если команда машины Тьюринга I имеет формат:

$$I =: qa \to q'a'X, \quad X \in \{Л, П, С\},$$

то ей ставится двоичный набор по правилу:

$$\text{Код}(I) = \text{Код}(q)\text{Код}(a)\text{Код}(q')\text{Код}(a')\text{Код}(X) \quad (1)$$

Пусть Θ - произвольная машина Тьюринга. Упорядочим все ее команды в соответствии с лексикографическим порядком левых частей команд:

$$q_1a_0,\, q_1a_1,\, \ldots, q_1a_n,\, q_2a_0,\, q_2a_1, \ldots, q_2a_n, \ldots, q_ma_0,\, q_ma_1, \ldots, q_ma_n\,.$$

Всего программа машины Тьюринга с внешним алфавитом из n символов и алфавитом внутренних состояний из m символов содержит m(n + 1) команд, которые по указанному выше правилу оказались лексикографически упорядочены следующим образом: $I_1, I_2, \ldots, I_{m(n+1)}$. Данной последовательности команд поставим в соответствие двоичный набор вида:

$$\text{Код}(\Theta) = \text{Код}(I_1)\ \text{Код}(I_2)\ldots\ \text{Код}(I_{m(n+1)}) \qquad (2).$$

Из указанной процедуры следует, что машина Θ переводит конфигурацию вида $q_1a_1^x$ в конфигурацию вида $q_0a_1^x$, поэтому, представляя натуральное число n в виде a_1^{n+1}, получаем, что Θ вычисляет функцию

$$f(x) = x.$$

Очевидно, что такое кодирование является алгоритмической процедурой. Зная код машины, можно однозначно восстановить ее программу. Для этого нужно выделить все подслова, начинающиеся единицей с каким-либо числом нулей, до следующей единицы. Пятерка таких подслов образует команду.

Номером машины Тьюринга называется натуральное число, которое получается при переводе в десятичную систему счисления двоичный код этой машины. Очевидно, что так как все коды начинаются с единицы, то разным кодам соответствуют разные натуральные числа. Тогда все мыслимые машины Тьюринга можно упорядочить по возрастанию их номеров:

$$T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots \qquad (3).$$

Указанное упорядочение является эффективным в том смысле, что существует алгоритм, который по номеру n машины T_n выдает ее код, и, обратно, существует алгоритм, который по заданному коду выдает номер машины.

Нумерация МПД – программ

Определим нумерацию команд, которые может выполнять машина произвольного доступа. Для этого зададим некоторую функцию α, вычисляющую номера команд МПД.

$$\alpha(Z(n)) = 4(n-1);$$
$$\alpha(S(n)) = 4(n-1) - 1;$$
$$\alpha(T(m, n)) = 4p(m-1, n-1) + 2; \qquad (4)$$
$$\alpha(J(m, n, q)) = 4\pi(m, n, q) + 3,$$

где $p(x, y) = 2^x(2y+1) - 1$ и $\pi(x, y, z) = p(p(x-1, y-1), z-1)$.

Можно показать, что функция α и обратная к ней эффективно вычислимы. Определим теперь номер программы произвольной МПД.

Пусть программа имеет вид $P = I_1 \ldots I_s$. Номер программы $\gamma(P)$ вычисляется следующим образом:

$$\gamma(P) = \tau(\alpha(I_1), \ldots, \alpha(I_s)) \qquad (5),$$

где $\tau(x_1,\ldots,x_s) = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + 2^{x_1+x_2+x_3+2} + \cdots + 2^{x_1+\cdots+x_s+s-1} - 1$ (6).

Присвоим каждой программе МПД ее номер γ(P) и упорядочим номера по возрастанию. Указанное упорядочение также является эффективным, так как по каждой программе позволяет найти ее номер и обратно.

ПРИМЕР.

1. Занумеровать машину Тьюринга с программой Θ:

$$\begin{aligned} \Theta:\quad & q_1\, a_0 \to q_2 a_1 Л \\ & q_1\, a_1 \to q_2\, a_0\, C \\ & q_2\, a_0 \to q_1\, a_1 П \\ & q_2\, a_1 \to q_0\, a_1\, C. \end{aligned}$$

2. Занумеровать программу МПД:

$$\begin{aligned} P:\quad & I_1 = S(2) \\ & I_2 = Z(3) \\ & I_3 = T(1,3) \\ & I_4 = J(1,1,1). \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ:

1. В программе Θ 4 команды. Сначала найдем коды этих команд согласно таблице 1 правилу (1).

Первая команда $q_1\, a_0 \to q_2 a_1 Л$ имеет код $10^7 10^4 10^9 10^6 10^2$; вторая команда $q_1\, a_1 \to q_2\, a_0\, C$ - код $10^7 10^6 10^9 10^4 10^3$; третья команда $q_2\, a_0 \to q_1\, a_1 П$ - код $10^9 10^4 10^7 10^6 10^1$, и, наконец, последняя команда - $q_2\, a_1 \to q_0\, a_1$ С - код $10^9 10^6 10^5 10^6 10^3$. Тогда код машины будет иметь вид:

$$\mathbf{10^7\, 10^4\, 10^9\, 10^6\, 10^2\, 10^7\, 10^6\, 10^9\, 10^4\, 10^3\, 10^9\, 10^4\, 10^7\, 10^6\, 10^1\, 10^9\, 10^6\, 10^5\, 10^6\, 10^3}.$$

2. Согласно формулам (4), рассчитаем значение α-функции от каждой команды программы P.

$$\alpha(I_1) = \alpha(S(2)) = 4(2-1) - 1 = 4 - 1 = \underline{\mathbf{3}};$$

$$\alpha(I_2) = \alpha(Z(3)) = 4(3-1) = 4\cdot 2 = \underline{\mathbf{8}};$$

$$\alpha(I_3) = \alpha(T(1,3)) = 4p(1-1, 3-1) + 2 = 4p(0,2) + 2,$$

так как $p(0, 2) = 2^0(2\cdot 2 + 1) - 1 = 4$, то $\alpha(I_3) = \alpha(T(1, 3)) = 4\cdot 4 + 2 = \underline{\mathbf{18}}$.

$$\alpha(I_4) = \alpha(J(1,1,1)) = 4\pi(1,1,1) + 3.$$

Т. к. $\pi(1, 1, 1) = p(p(1-1, 1-1), 1-1) = p(p(0, 0), 0) = p([2^0(2\cdot 0 + 1) - 1], 0) =$
$= p(0, 0) = 2^0(2\cdot 0 + 1) - 1 = 0$, то:

$$\alpha(I_4) = \alpha(J(1,1,1)) = 4\cdot 0 + 3 = \underline{\mathbf{3}}.$$

Согласно формуле (5), номер программы P равен:

$$\gamma(P) = \tau(\alpha(I_1), \alpha(I_2), \alpha(I_3), \alpha(I_4)) = \tau(3, 8, 18, 3).$$

Значение функции τ рассчитаем по формуле (6):

$\tau(3, 8, 18, 3) = 2^3 + 2^{3+8+1} + 2^{3+8+18+2} + 2^{3+8+18+3+3} - 1 = 2^3 + 2^{12} + 2^{31} + 2^{35} - 1.$

Следовательно, $\boldsymbol{\gamma(P) = 2^3 + 2^{12} + 2^{31} + 2^{35} - 1 = 36507226119}$.

Частично-рекурсивные функции

Класс частично рекурсивных функций также был введен в качестве еще одного уточнения понятия алгоритма. Данный класс определяется путем указания конкретных исходных функций, называемых *базисными* и фиксированного множества операций получения новых функций из заданных.

Обозначим через N_0 множество натуральных чисел с нулем. Тогда в качестве базисных функций берутся следующие функции.

1). *Нуль-функция 0(x)*:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N}_0) \quad \mathbf{0(x) = 0} \qquad \textbf{(1).}$$

2). *Функция следования s(x)*:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N}_0) \quad \mathbf{s(x) = x + 1} \qquad \textbf{(2).}$$

3). *Функция выбора аргумента* $I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N}_0) \quad I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m, \ m \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad (3).$$

Допустимыми операциями над функциями являются операции *суперпозиции* или *подстановки, примитивной рекурсии* и *минимизации.*

Операция суперпозиции.

Пусть заданы одна n-местная функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и n m-местных функций, зависящих от одних и тех же переменных $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, …, $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. (Этого можно добиться введением фиктивных переменных).

Суперпозицией функций g и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называется функция

$$\mathbf{h}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathbf{g}(\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (4),$$

Очевидно, что функция h определена тогда и только тогда, когда определены все функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Операцию суперпозиции обозначают:

$$\mathbf{h = S(g, f_1, f_2, \ldots, f_n)} \qquad \textbf{(5).}$$

Операция примитивной рекурсии.

Пусть заданы n-местная функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и (n + 2)-местная функция $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z)$. Определим (n + 1)-местную функцию f индуктивно с помощью соотношений:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) \end{cases} \qquad \textbf{(6).}$$

Про функцию f говорят, что она получена рекурсией из функций g и h и обозначают:

$$\mathbf{f = R(g, h).}$$

Операция минимизации.

Пусть задана n-местная функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$. Зафиксируем набор $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ и рассмотрим уравнение относительно y:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n \qquad (7).$$

Будем решать данное уравнение, последовательно вычисляя

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), \ g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1), \ g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 2) \text{ и т.д.}$$

и сравнивая с x_n. Наименьшее y, для которого выполнено (7), обозначим

$$\mu_y = (g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n) \qquad (8).$$

Про функцию f говорят, что она получена минимизацией из функции g и обозначают:

$$\mathbf{f = \mu_y (g).}$$

Функция называется *частично рекурсивной,* если она может быть получена из базисных функций применением конечного числа раз операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

ПРИМЕР.

Выразить функцию f(x, y) = x + y через базисные: нуль-функцию - 0(x) = 0, функцию следования – s(x) = x + 1 и функцию выбора аргументов - $I_m^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$.

РЕШЕНИЕ:

Для любых чисел x и y выполняются соотношения:

$$\mathbf{x + 0 = x = I_1^2(x, y),}$$

$$\mathbf{x + (y + 1) = (x + y) + 1.}$$

Пусть $I_1^2(x, y) = g(x)$, $s(z) = z + 1 = (x + y) + 1 = h(x, y, z)$, т.е. заданы одноместная функция g(x) и трехместная функция h(x, y, z).

Тогда функцию f(x, y) = x + y можно рассматривать как двуместную функцию, удовлетворяющую соотношениям:

$$f(x, 0) = x + 0 = I_1^2(x, y) = g(x),$$

$$f(x, y + 1) = s(z) = h(x, y, f(x, 1)).$$

Следовательно, функция f(x, y) = x + y получена с помощью операции примитивной рекурсии из функций g(x) и h(x, y, z), или, с учетом вышесказанного, из функций $I_1^2(x, y)$ - функция выбора аргумента и s(z) - функция следования.

Тематика рефератов

1. Алгоритмы вокруг нас.
2. Основатели теории алгоритмов – Клини, Черч, Пост, Тьюринг.
3. Тезис Черча.
4. Проблема вычислимости математической логике.
5. Нормальные алгоритмы Маркова..
6. Методы разработки алгоритмов.
7. Средства и языки описания (представления) алгоритмов.
8. История формирования «понятия алгоритмов».
9. Известнейшие алгоритмы в истории математики.
10. Нормальные алгоритмы Маркова.
11. Принцип нормализации Маркова.
12. Эквивалентность различных теорий алгоритмов.
13. Алгоритмические проблемы.
14. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.