МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин

С.Е. Зюзин

01.09.2018 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.03 Математический анализ

1. Код и наименование направления подготовки:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

2. Профили подготовки:

Математика. Информатика и информационные технологии в образовании

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин

6. Составители программы: Б.У. Шарипов, доктор технических наук, доцент, Е.С. Мещерякова, ст. преподаватель

7. Рекомендована: научно-методическим советом Филиала (протокол № 1 от 31.08.2018 г.)

8. Учебный год: 2019-2020 **Семестр:** 3

9.Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью учебной дисциплины «Математический анализ» является формирование системы фундаментальных знаний в области математического анализа, о его месте и роли в системе математических наук, приложениях в естественных науках.

Задачи учебной дисциплины:

- накопление необходимого запаса сведений по математическому анализу (основные определения, теоремы, правила);
- освоение математического аппарата, помогающего моделировать, анализировать и решать профессиональные задачи;
- развитие логического и алгоритмического мышления, способствование формированию умений и навыков самостоятельного анализа исследования профессиональных проблем, развитию стремления к научному поиску путей совершенствования своей работы;
- воспитание математической культуры;
- привитие навыков современных видов математического мышления;
- использование математических методов в практической деятельности.

10. Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы:

Дисциплина «Математический анализ» входит в блок Б1 «Дисциплины (модули)» и является обязательной дисциплиной вариативной части образовательной программы. Для изучения дисциплины требуется освоение курсов «Математика» или «Элементы дифференциального исчисления» и «Введение в математический анализ» или «Элементы интегрального исчисления». Дисциплина является предшествующей для курсов «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного» и др.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Компетенция		Планируемые результаты обучения
Код	Название	
ПК-1	готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	**знает (имеет представление):** связь теоретических основ и технологических приёмов математического анализа с содержанием преподаваемых учебных предметов (*понятия двойного и тройного интеграла, криволинейного и поверхностного интеграла, числового и функционального ряда, производная по направлению, градиент, дивергенция, циркуляция, ротор поля; методы вычисления интегралов, признаки сходимости рядов и т.д.*). **умеет:** – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения математического анализа; **владеет (имеет навыки):** – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – общепедагогической ИКТ-компетентности; – предметно-педагогической ИКТ-компетентности.

ПК-4	способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	**знает:** – технологические приемы математического анализа, лежащие в основе построения различных моделей в экономике, социологии, эконометрике и т.д. *(приложения двойного, тройного, криволинейного и поверхностного интегралов, приложения рядов, приложения теории поля)*; **умеет:** – использовать знание основ математического анализа для перевода информации с естественного языка на язык математики и обратно; – применять теоретические знания по математическому анализу в описании процессов и явлений в различных областях знания; – использовать преимущества технологических приемов математического анализа при решении задач образовательной области «Математика и информатика»; – осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи; **владеет:** – конструктивными умениями как одним из главных аспектов профессиональной культуры будущего учителя-предметника; – материалом математического анализа на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по преподаваемым предметам, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 7/252.

Форма промежуточной аттестации экзамен.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		3 сем.
Контактная работа, в том числе:	108	108
лекции	54	54
практические занятия	54	54
Самостоятельная работа	108	108
Форма промежуточной аттестации *(экзамен –36 час.)*	36	36
Итого:	252	252
Итого:	252	252

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
	1. Лекции	
1.1	Двойной интеграл.	Двойной интеграл. Основные понятия и определения. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах. Приложения двойного интеграла.
1.2	Тройной интеграл.	Тройной интеграл. Основные понятия. Свойства. Вычисление тройного интеграла в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла.

1.3	Криволинейный интеграл.	Криволинейный интеграл 1 рода. Основные понятия и свойства. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода. Приложения криволинейного интеграла 1 рода. Криволинейный интеграл 2 рода. Основные понятия и свойства. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.
1.4	Поверхностный интеграл	Поверхностные интегралы 1 и 2 рода. Вычисление ПИ 1 и 2 рода. Приложения ПИ 1 и 2 рода. Формулы Остроградского – Гаусса, Стокса.
1.5	Числовые ряды	Основные понятия. Ряд геометрической прогрессии. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Остаток ряда. Теоремы об остатке ряда. Теоремы об арифметических операциях над сходящимися рядами. *Положительные ряды.* Необходимый и достаточный признак сходимости положительного ряда. Признаки сравнения рядов. Обобщенный гармонический ряд. Признак Даламбера. Признк Раабе. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши. *Знакочередующиеся ряды.* Признак Лейбница. Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Необходимый и достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.
1.6	Функциональные ряды.	Функциональные ряды. Основные понятия. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Сходимость степенных рядов. Теорема Н. Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена.
1.7	Элементы теории поля	Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Векторное поле: поток, дивергенция, циркуляция, ротор поля. Формула Стокса. Соленоидальное, потенциальное и гармоническое поля.
2. Практические занятия		
2.1	Двойной интеграл.	Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах. Приложения двойного интеграла.
2.2	Тройной интеграл.	Вычисление тройного интеграла в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Приложения тройного интеграла.
2.3	Криволинейный интеграл.	Вычисление криволинейного интеграла 1 рода. Приложения криволинейного интеграла 1 рода. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.
2.4	Поверхностный интеграл	Вычисление поверхностного интеграла 1 и 2 рода.
2.5	Числовые ряды	Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Остаток ряда. Теоремы об арифметических операциях над сходящимися рядами. *Положительные ряды.* Необходимый и достаточный признак сходимости положительного ряда. Признаки сравнения рядов. Обобщенный гармонический ряд. Признак Даламбера. Признк Раабе. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши. *Знакочередующиеся ряды.* Признак Лейбница. Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Необходимый и достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.
2.6	Функциональные ряды.	Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Сходимость степенных рядов. Теорема Н. Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

		Свойства степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена.
2.7	Элементы теории поля	Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Векторное поле: поток, дивергенция, циркуляция, ротор поля.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Двойной интеграл.	8	10	0	16	34
2.	Тройной интеграл.	6	6	0	14	26
3.	Криволинейный интеграл.	6	6	0	12	24
4.	Поверхностный интеграл	4	2	0	12	18
5.	Числовые ряды	14	14	0	26	54
6.	Функциональные ряды.	10	10	0	14	34
7.	Элементы теории поля	6	6	0	14	26
	Экзамен					36
	Итого:	54	54	0	108	252

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Знание основных положений, отраженных в рабочей программе дисциплины, поможет обучающимся ориентироваться в изучаемом курсе, осознавать место и роль изучаемой дисциплины в подготовке будущего выпускника, строить свою работу в соответствии с требованиями, заложенными в программе.

Основными формами контактной работы по дисциплине являются лекции и практические занятия, посещение которых обязательно для всех студентов (кроме студентов, обучающихся по индивидуальному плану).

Подготовка к практическим занятиям ведется на основе планов практических занятий, которые размещены на сайте филиала. В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить в соответствии с вопросами для повторения конспекты лекций, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Кроме того, следует повторить материал лекций, ответить на контрольные вопросы, изучить образцы решения задач, выполнить упражнения (если такие предусмотрены).

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на экзамен. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

Для достижения планируемых результатов обучения используются интерактивные лекции, групповые дискуссии.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.1: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008
2	Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: учеб. для вузов: в 2-х ч. Ч.2: - 9-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2008

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Архипов Г.И. и др. Лекции по математическому анализу: учеб. для вузов.- М.: Дрофа, 2008
4	Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пос.- 5-

	е изд., стер.- СПб: Лань, 2009
5	Тиняков Г.П. Дополнительные главы математического анализа: учеб. пос. - М.: МГИУ, 2008

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Источник
6	Ильин, В.А. Основы математического анализа : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 7-е изд., стер. - Москва : Физмат-лит, 2009. - Ч. I. - 647 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). - ISBN 978-5-9221-0902-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76686 (09.04.2018).
7	Сборник задач по математическому анализу. Ряды : в 3-х т. / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Физматлит, 2009. - Т. 2. Интегралы. - 503 с. - ISBN 978-5-9221-0307-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82820 (09.04.2018).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Методические материалы по дисциплине
2	Геворкян, Э.А. Математика. Математический анализ : учебно-методический комплекс / Э.А. Геворкян, А.Н. Малахов. - Москва : Евразийский открытый институт, 2010. - 343 с. - ISBN 978-5-374-00369-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93168 (09.04.2018).

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение, информационно-справочные системы и профессиональные базы данных

программное обеспечение:

–Win10 (или WinXP, Win7), OfficeProPlus 2010
–браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer
–STDU Viewer version 1.6.2.0
–7-Zip
–GIMP GNU Image Manipulation Program
–Paint.NET
–Tux Paint
–Adobe Flash Player

информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:

–Федеральный портал Российское образование – http://www.edu.ru/;
–Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» http://window.edu.ru/;
–Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – http://fcior.edu.ru;
–Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – https://www.lektorium.tv/;
–Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – http://biblioclub.ru/.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

19. Фонд оценочных средств:

19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)

ПК-1 готовность реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Знать: – связь теоретических основ и технологических приёмов математического анализа с содержанием преподаваемых учебных предметов (*понятия двойного и тройного интеграла, криволинейного и поверхностного интеграла, числового и функционального ряда, производная по направлению, градиент, дивергенция, циркуляция, ротор поля; методы вычисления интегралов, признаки сходимости рядов и т.д.*).	1. Двойной интеграл. 2. Тройной интеграл. 3. Криволинейный интеграл. 4. Поверхностный интеграл. 5. Числовые ряды 6. Функциональные ряды. 7. Элементы теории поля.	Практическое задание Контрольная работа Тест
	Уметь: – ставить познавательные цели учебной деятельности; – осуществлять самоконтроль и самооценку своих учебных достижений; – применять навыки владения ИКТ, проектной и исследовательской деятельностью в процессе изучения математического анализа;	1. Двойной интеграл. 2. Тройной интеграл. 3. Криволинейный интеграл. 4. Поверхностный интеграл. 5. Числовые ряды 6. Функциональные ряды. 7. Элементы теории поля.	Тест Комплекты индивидуальных заданий Доклады, рефераты
	Иметь навыки: – исследовательской и проектной деятельности; – общепользовательской ИКТ-компетентности; – общепедагогической ИКТ-компетентности; – предметно-педагогической ИКТ-компетентности.	1. Двойной интеграл. 2. Тройной интеграл. 3. Криволинейный интеграл. 4. Поверхностный интеграл. 5. Числовые ряды 6. Функциональные ряды. 7. Элементы теории поля.	Доклады, рефераты Комплекты индивидуальных заданий Тесты
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	Знать: – технологические приемы математического анализа, лежащие в основе построения различных моделей в экономике, социологии, эконометрике и т.д. (*приложения двойного, тройного, криволинейного и поверхностного интегралов, приложения рядов, приложения теории поля*);	1. Двойной интеграл. 2. Тройной интеграл. 3. Криволинейный интеграл. 4. Поверхностный интеграл. 5. Числовые ряды 6. Функциональные ряды. 7. Элементы теории поля.	Доклады, рефераты Тесты Контрольная работа
	Уметь: – использовать знание основ математического анализа для перевода информации с естественного языка на язык математики и обратно; – применять теоретические знания по математическому анализу в описании процессов и явлений в различных областях знания; – использовать преимущества технологических приемов математического анализа при решении задач образовательной области «Математика и информатика»;	1. Двойной интеграл. 2. Тройной интеграл. 3. Криволинейный интеграл. 4. Поверхностный интеграл. 5. Числовые ряды 6. Функциональные ряды. 7. Элементы теории поля.	Доклады, сообщения Комплекты индивидуальных заданий Тесты

	– осуществлять поиск и отбор информации, необходимой для решения конкретной задачи;		
	Владеть: – конструктивными умениями как одним из главных аспектов профессиональной культуры будущего учителя-предметника; – материалом математического анализа на уровне, позволяющем формулировать и решать задачи, возникающие в ходе учебной деятельности по преподаваемым предметам, а также в практической деятельности, требующие углубленных профессиональных знаний; – навыками формализации теоретических и прикладных практических задач.	1. Двойной интеграл. 2. Тройной интеграл. 3. Криволинейный интеграл. 4. Поверхностный интеграл. 5. Числовые ряды 6. Функциональные ряды. 7. Элементы теории поля.	Практическое задание Комплекты индивидуальных заданий Тесты
Промежуточная аттестация – экзамен			Вопросы к экзамену

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели (ЗУНы из 19.1):
1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом математического анализа;
2) умение связывать теорию с практикой;
3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
4) умение применять теоретические знания для решения практических задач в области математического анализа, решать типовые расчётные задачи.
Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом математического анализа, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения типовых расчётных задач и практических заданий более высокого уровня сложности в области математического анализа.	*Повышенный уровень*	*Отлично*
Обучающийся владеет понятийным аппаратом математического анализа, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, допускает незначительные ошибки при решении практических заданий более высокого уровня сложности в области математического анализа.	*Базовый уровень*	*Хорошо*
Обучающийся владеет частично теоретическими основами математического анализа, фрагментарно способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, в ряде случаев затрудняется применять теоретические знания при решении типовых расчётных задач, не всегда способен решить практические задания более высокого уровня сложности в области математического анализа.	*Пороговый уровень*	*Удовлетвори-тельно*

Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки при решении типовых расчётных задач либо не имеет представления о способе их решения.	–	*Неудовлетвори-тельно*

19.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

19.3.1 Перечень вопросов к экзамену:

Разделы «Двойной интеграл. Тройной интеграл. Криволинейный интеграл. Поверхностный интеграл»

1. Двойной интеграл. Основные понятия.
2. Геометрический смысл двойного интеграла.
3. Физический смысл двойного интеграла
4. Основные свойства двойного интеграла.
5. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
6. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
7. Приложение двойного интеграла.
8. Тройной интеграл. Основные понятия.
9. Основные свойства тройного интеграла.
10. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
11. Замена переменных в тройном интеграле.
12. Некоторые приложения тройного интеграла.
13. Криволинейный интеграл первого рода.
14. Криволинейный интеграл второго рода.
15. Поверхностный интеграл.
16. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.

Раздел «Числовые ряды. Знакочередующиеся ряды»

17. Числовые ряды. Основные понятия.
18. Ряд геометрической прогрессии.
19. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
20. Остаток ряда. Теоремы об остатке ряда.
21. Теоремы об арифметических операциях над сходящимися рядами.
22. Положительные ряды. Необходимый и достаточный признак сходимости
23. положительного ряда.
24. Признаки сравнения рядов. Обобщенный гармонический ряд.
25. Признак Даламбера. Признак Раабе.
26. Радикальный признак Коши.
27. Интегральный признак Коши.
28. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
29. Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда.
30. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Общий достаточный
31. признак сходимости знакопеременных рядов.
32. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
33. Необходимый и достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Раздел «Функциональные ряды»

34. Функциональные ряды. Основные понятия.
35. Равномерная сходимость.
36. Признак Вейерштрасса.
37. Свойства равномерно сходящихся рядов.
38. Степенные ряды. Теорема Абеля.
39. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема о радиусе сходимости.
40. Радиус сходимости степенного ряда. Формула для нахождения радиуса
41. сходимости степенного ряда.
42. Свойства степенных рядов.
43. Ряд Тейлора.
44. Разложение дробно-рациональных функций в ряд Тейлора.

45. Разложение показательной функции в ряд Тейлора.
46. Разложение тригонометрических функций в ряд Тейлора.
47. Разложение логарифмической функции в ряд Тейлора.
48. Разложение степенной функции в ряд Тейлора.
49. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Раздел «Элементы теории поля».

50. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства.
51. Векторное поле: поток векторного поля, дивергенция, циркуляция, ротор.
52. Соленоидальное, потенциальное и гармоническое поля.

19.3.2 Перечень практических заданий (примеры)

Тема 1. *Двойной интеграл*

Задание 1. Оценить интеграл $\iint\limits_D (x+y-5)dxdy,$ где область интегрирования D- это круг $x^2+y^2\le 16.$

Задание 2. Вычислить повторный интеграл $I=\int\limits_0^7 dx\int\limits_0^{x^2} dy$.

Задание 3. Вычислить повторные интегралы а) $I=\int\limits_1^3 dx\int\limits_x^{3x}\frac{y}{x}dy$, б) $I=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.

Задание 4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \mathrm{xy\ dx\ dy}$, где $\mathrm{D}=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\,|\,1\le x\le 2; 1\le y\le 2\}$.

Задание 5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy,$ где D – это квадрат $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$

Задание 6. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy,$ где D – параболический сегмент, ограниченный параболой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=x.$

Задание 7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{-2}^{6} dx\int\limits_{3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy.$

Задание 8. Вычислить интегральное среднее значение функции $z=12-2x-3y$ в области D, ограниченной прямыми $12-2x-3y=0,\ x=0,\ y=0.$

Замена переменных в двойном интеграле.

Задание 9. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$ по области D, ограниченной прямыми $y=2x-3,\ y=2x+5,\ y=-x+7,\ y=-x-1$

Задание 10. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy,$ где D – область, ограниченная кривыми $y^2=4x,\ y^2=9x,$ $xy=1,\ xy=5.$

Задание 11. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy,$ где D – круг $x^2+y^2\le 2ax.$

Задание 12. Вычислить повторный интеграл $I=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$

Применения двойного интеграла

Задание 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $y = x$.

Задание 14. Вычислить площадь параболического сегмента АОВ, ограниченного дугой ВОА параболы $y = ax^2$ и отрезком ВА, соединяющим точки В(-1,2) и А (1,2).

Задание 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1 + cos\varphi)$, где $r = a\,cos\varphi$, $(a > 0)$.

Задание 16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $yz = 0$.

Задание 17. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задание 18. Найти массу круглой пластины D $(x^2 + y^2 \le 1)$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 3 - x - y$.

Тема 2. *Тройной интеграл*

Задание 1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2 yzdxdydz$, где V – область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Задание 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, если V ограничена плоскостью $z = 2$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$.

Задание 3. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)dz$.

Задание 4. Вычислить объем тела ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 22$ и поверхностью параболоида $9z = x^2 + y^2$.

Темы 3-4. *Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы*

Задание 1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по указанной кривой: $\int\limits_L \frac{ds}{x - y}$, где L - отрезок прямой AB от точки $A(0,-2)$ до точки $B(4,0)$.

Задание 2. Найти координаты центра тяжести дуги однородной кривой L, если

$$L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2,\ x\ \ 0,\ y\ \ 0\}.$$

Задание 3. Найти площадь цилиндрической поверхности $y^2 - 2x = 0$, ограниченной снизу поверхностью $z = 0$ и сверху поверхностью $z = \sqrt{2x - 4x^2}$.

Задание 4. Вычислить интеграл:

$$\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dS,$$

где S – поверхность, полученная вращением кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ относительно полярной оси (декартова и полярная системы координат совмещены).

Задание 5. Найти моменты инерции относительно плоскости XY части однородного конуса $x^2 + y^2 = z^2 tg^2\alpha, x^2 + y^2 \le R^2$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ массой M.

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль ориентированной кривой L:

$$\int\limits_L (y + \pi)dx + x\cos y dy,$$

где L - часть кривой $\pi \ln x - y + \sin y = 0$ от точки $A(0,1)$ до $B(e, \pi)$.

Задание 7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \le z \le H$.

Темы 5. *Числовые ряды*

Задание 1. Найти сумму ряда: а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ б) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots$

Задание 2. Проверить необходимое условие сходимости а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 2n + 1}{100n^2 + 17}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4n^4 + 2n}$

Задание 3. Исследовать на сходимость следующие ряд $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4}\cdots$; $1 + \frac{1}{2\ln^3 2} + \frac{1}{3\ln^3 3} + \frac{1}{4\ln^3 4} + \cdots$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$

Задание 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\cdot \ln n \cdot \sqrt{\ln n}}$.

Темы 6. *Функциональные ряды*

Задание 1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

Задание 2. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$ на множестве $x \in [0,1]$.

Задание 3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$.

Задание 4. Разложить функцию f (x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Указать область сходимости полученного ряда $f(x) = \sqrt[3]{27 + x}$, $x_0=0$.

Задание 5. С точностью до 10^{-4} вычислить $\cos 10^\circ$.

Темы 7. *Элементы теории поля*

Задание 1. Найти уравнение поверхности уровня скалярного поля

$$\varphi = 3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y - 6z - 18,$$

проходящей через точку M(1;2;3).

Задание 2. Найти производную скалярного поля $u=2x^2+2y^2-3yz$ в точке M(1;2;2) в направлении от этой точки к точки M_1(3;4;3).

Задание 3. Найти величину и направление градиента скалярного поля $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке M(1;-2;1).

Задание 4. Найти поток векторного поля $\overline{F} = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задание 5. Найти дивергенцию векторного поля

$$F(M) = (4x^2y^2 - 2xz^4 + +3x^2y^2z)\overline{i} + (2x^3y^2 + x^2yz + 6z^2x)\overline{j} + (3x^2y^2z^2 - 4x^2z + 5yz)\overline{k}$$

в точке M(1;2;–1).

Задание 6. Вычислить циркуляцию вектора поля $\overline{F}(M) = 2yz\overline{i} + 3xz\overline{j} + 4xy\overline{k}$ вдоль кривой L, описываемой уравнениями $x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

Задание 7.Найти ротор векторного поля $F = y^2z^3\overline{i} + x^2z^3\overline{j} + x^2y^3\overline{k}$ в точке M(2;3;1).

19.3.3 Тестовые задания

ТЕСТ Двойные интегралы

2.1. Двойной интеграл

2.1. Интегральной суммой функции двух переменных по области D является:

1. $\sum_{i=1}^{n} f(x_n, y_n)\Delta S_n$;
2. $\sum_{i=1}^{n} f(x, y)\Delta S$;
3. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$;
4. ни одна из них.

2.2. Достаточное условие интегрируемости функции двух переменных. Она должна быть:

1. дифференцируемой в области D;
2. непрерывной в области D;
3. дифференцируемой и непрерывной в области D;
4. всех положения не достаточно.

2.3. Установите соответствие.

1. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$ A. $= \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy;$
2. $\iint\limits_D dS =$ B. $= \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy;$
3. $f(x_0, y_0) =$ C $= \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy;$
4. $\iint\limits_D \left(f_1(x,y) + f_2(x,y)\right)dxdy =$ D. $= S.$

2.4. Повторный интеграл для двойного интеграла $\iint_D (x+y)dxdy$, где $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ имеет вид:

1. $\int_0^1 \mathrm{xdx} + \int_0^2 \mathrm{ydy};$
2. $\int_0^1 (\mathrm{x}+\mathrm{y})\mathrm{dx} \int_0^2 \mathrm{dy};$
3. $\int_0^1 \mathrm{dy} \int_0^2 (\mathrm{x}+\mathrm{y})\mathrm{dx};$
4. $\int_0^1 \mathrm{dx} \int_0^2 (\mathrm{x}+\mathrm{y})\mathrm{dy}.$

2.5. Численное значение интеграла $\int_0^6 dx \int_0^{x^2} dy$ равно:

1. 12; 2. 24; 3. 36; 4. 72.

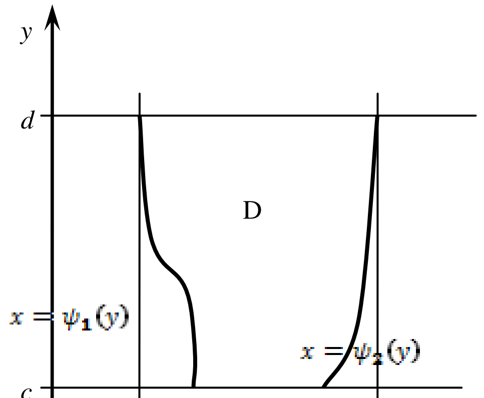
2.6. Двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

Укажите к чему стремится предел:

1. $n \to \infty$;
2. $max\, d_i \to 0$;
3. $n \to \infty$ и $max\, d_i \to 0$;
4. Все положения верны.

2.7. Если область D имеет вид, представленный на рисунке, то формула вычисления двойного интеграла имеет вид:



1. $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy;$
2. $\int_a^b dy \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx;$

3. $\int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx;$

4. $\int_a^b dx \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dy.$

2.8. Численные значения интеграла $\iint_S xydxdy$, где область S является прямоугольником со сторонами [6,8,1,2], равно:

1. 72; 2. 36; 3. 21; 4. 14.

2.9. При замене переменных *x, y* на *u, v* в двойном интеграле функциональный определитель (якобиан) вычисляется по формуле:

1. $\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v};$
2. $\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$
3. $\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$
4. $\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}.$

2.10. При переходе к полярным координатам r и φ формула вычисления двойного интеграла принимает вид:

1. $\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_{S^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi;$
2. $\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_{S^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi;$
3. $\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_{S^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\, drd\varphi;$
4. $\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_{S^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot rdxdy.$

2.11. Численное значение интеграла $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, где D половина круга радиуса R с центром в начале координат, лежащая в области $y \geq 0$, вычисленное в полярных координатах равно:

1. $\frac{\pi R^4}{4};$ 2. $\frac{\pi R^3}{3};$ 3. $\frac{\pi R^2}{2};$ 4. $\pi R^2.$

2.12. Площадь области, ограниченной линиями $y=2-x^2;\ y^3=x^2$, равна:

1. $\frac{2}{15};$ 2. $1\frac{2}{15};$ 3. $2\frac{2}{15};$ 4. $3\frac{2}{15}.$

2.13. Статические моменты S_x и S_y относительно осей Ox и Oy пластины с поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$ выражаются формулами:

1. $S_x=\int_S x\gamma(x,y)dxdy \;\; u \;\; S_y=\int_S y\gamma(x,y)dxdy;$
2. $S_x=\int_S y\gamma(x,y)dxdy \;\; u \;\; S_y=\int_S y\gamma(x,y)dxdy;$
3. $S_x=\int_S x\gamma(x,y)dxdy \;\; u \;\; S_y=\int_S x\gamma(x,y)dxdy;$

4. $S_x = \int\limits_S y\gamma(x,y)dxdy \;\; u \;\; S_y = \int\limits_S x\gamma(x,y)dxdy$.

2.14. Координаты центра тяжести x_c и y_c пластины с поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$, массой m и статическими моментами S_x и S_y вычисляются по формулам:

1. $x_c = \dfrac{S_y}{m} \;\; u \;\; y_c = \dfrac{S_x}{m}$;
2. $x_c = \dfrac{S_x}{m} \;\; u \;\; y_c = \dfrac{S_y}{m}$;
3. $x_c = \dfrac{S_y}{m} \;\; u \;\; y_c = \dfrac{S_y}{m}$;
4. $x_c = \dfrac{S_x}{m} \;\; u \;\; y_c = \dfrac{S_x}{m}$.

2.15. Моменты инерции пластины с поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$ относительно осей Ох, Оу и начала координат выражаются формулами:

1. $I_x = \iint\limits_S y\gamma(x,y)dxdy, I_y = \iint\limits_S x\gamma(x,y)dxdy, I_0 = \iint\limits_S (x+y)\gamma(x,y)dxdy$;
2. $I_x = \iint\limits_S y\gamma(x,y)dxdy, I_y = \iint\limits_S x\gamma(x,y)dxdy, I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy$;
3. $I_x = \iint\limits_S y^2\gamma(x,y)dxdy, I_y = \iint\limits_S x^2\gamma(x,y)dxdy, I_0 = \iint\limits_S (x+y)\gamma(x,y)dxdy$;
4. $I_x = \iint\limits_S y^2\gamma(x,y)dxdy, I_y = \iint\limits_S x^2\gamma(x,y)dxdy, I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2)\gamma(x,y)dxdy$.

2.16. Масса круглой пластины с поверхностной плотностью γ равна:

1. $m = \pi R^2$;
2. $m = 2\pi R$;
3. $m = \gamma\pi R$;
4. $m = \gamma\pi R^2$.

2.17. Координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2, x = 4, y = 0,$ равны:

1. (3; 4.8);
2. (3; 4);
3. (3.8; 4);
4. (3; 8).

2.18. Площадь области, ограниченной линиями $y^2 = x + 1, x + y = 1,$ равна:

1. 9;
2. $\dfrac{9}{2}$;
3. 3;
4. $\dfrac{9}{4}$.

ТЕСТ Тройной интеграл

3.1. Тройной интеграл может быть вычислен по формуле:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^2 (x+y+z)dz$;
2. $\int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^3 \left[\int\limits_0^2 (x+y+z)dz \right] dy \right\} dx$;
3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 \left[x + y + \dfrac{z^2}{2} \right]_0^2 dy$;
4. Любой из перечисленных.

3.2. Установите соответствие:

1. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV =$

A. V.

2. $f(x_0, y_0, z_0) =$

3. $\iiint\limits_V (f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z))dV =$

4. $\iiint\limits_V dV =$

B. $\iiint\limits_V f_1(x,y,z)dV + \iiint\limits_V f_2(x,y,z)dV.$

C. $\frac{1}{V}\iiint\limits_V f(x,y,z)dV.$

D. $\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV.$

3.3. Численная величина тройного интеграла $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x+y+z)dz$ равна:

1. 6; 2. 12; 3. 18; 4. 24.

3.4. Если $f(x,y,z) \geq \varphi(x,y,z)$, то их интегралы соотносятся неравенством:

1. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV < \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$;
2. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV > \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$;
3. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geq \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$;
4. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \leq \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV$.

3.5. Численная величина тройного интеграла $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (xy+z)dz$ равна:

1. 60; 2. 50; 3. 40; 4. 30.

3.6. Установите соответствие обозначений координат с их системой:

1. x, y, z
2. r, φ, z
3. ρ, φ, θ
4. $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$

A. Сферические координаты.
B. Декартовые координаты.
C. Цилиндрические координаты.
D. Обобщенные координаты.

3.7. Функциональный определитель Якоби для тройного интеграла имеет вид:

1. $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{a\partial u} & \frac{\partial x}{a\partial v} & \frac{\partial x}{a\partial w} \\ \frac{\partial y}{b\partial u} & \frac{\partial y}{b\partial v} & \frac{\partial y}{b\partial w} \\ \frac{\partial z}{c\partial u} & \frac{\partial z}{c\partial v} & \frac{\partial z}{c\partial w} \end{vmatrix}$;

2. $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{vmatrix}$;

3. $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$;

4. $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$.

3.8. Численная величина тройного интеграла $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где V есть шар $x^2+y^2+z^2 \le R$, равна:

1. $\dfrac{6\pi R^7}{7}$;   2. $\dfrac{4\pi R^5}{5}$;   3. $\dfrac{2\pi R^3}{3}$;   4. $6\pi R^2$.

3.9. Тройной интеграл $\iiint_V zdxdydz$, где V – область, ограниченная верхней частью конуса $x^2+y^2/R^2=z^2/h^2$ и плоскостью $z=h\ (h>0)$, вычисляется по формуле:

1. $\int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{hr/R}^{h} rzdz$;   2. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{2\pi} dy \int\limits_{hr/R}^{h} rzdz$;

3. $\int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} rzdz$;   4. $\int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} rzdz$.

3.10. Объем материального тела можно вычислить по формуле:

1. $V=\iiint\limits_V dxdydz$;   2. $V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz$;

3. $V=\iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta$;   4. по любой из приведенных.

3.11. Какое из равенств не верно:

1. $I_x = I_{xy} + I_{xz}$;   2. $I_y = I_{yx} + I_{yz}$;

3. $I_z = I_{zx} + I_{zy}$;   4. все равенства верны.

3.12. Момент инерции тела относительно координатной плоскости Oxy вычисляется по формуле:

1. $I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x,y,z)dxdydz$;   2. $I_{xy} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x,y,z)dxdydz$;

3. $I_{xy} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x,y,z)dxdydz$;   4. $I_{xy} = \iiint\limits_V (x+y+z)\gamma(x,y,z)dxdydz$.

3.13. Момент инерции для тела относительно координатных осей Oz вычисляется по формуле:

1. $I_z = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$;   2. $I_z = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$;

3. $I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)dxdydz$;   4. $I_z = \iiint\limits_V x^2y^2\gamma(x,y,z)dxdydz$.

3.14. Статический момент тела относительно координатной плоскости Oxz вычисляется по формуле:

1. $S_{xz} = \iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dV$;   2. $S_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dV$;

3. $S_{xz} = \iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dV$;   4. $S_{xz} = \iiint\limits_V xyz\gamma(x,y,z)dV$.

3.15. Координаты центра тяжести материального тела определяется по формулам (m – масса тела):

1. $x_c = \dfrac{S_{yz}}{m};\ y_c = \dfrac{S_{xz}}{m};\ z_c = \dfrac{S_{xy}}{m};$
2. $x_c = \dfrac{S_{xy}}{m};\ y_c = \dfrac{S_{yz}}{m};\ z_c = \dfrac{S_{zx}}{m};$
3. $x_c = \dfrac{S_{xz}}{m};\ y_c = \dfrac{S_{zy}}{m};\ z_c = \dfrac{S_{yx}}{m};$
4. $x_c = \dfrac{S_{xy}}{m};\ y_c = \dfrac{S_{xz}}{m};\ z_c = \dfrac{S_{yz}}{m}.$

3.16. Момент инерции материального тела относительно координатной оси Оу вычисляется по формуле:

1. $I_y = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz;$
2. $I_y = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x,y,z)dxdydz;$
3. $I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz;$
4. $I_y = \iiint\limits_V xz\gamma(x,y,z)dxdydz.$

3.17. Численная величина тройного интеграла $\iiint_V (x + y - z)dxdydz$ по области V, ограниченной поверхностями $x = -1, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 2$:

1. -4;
2. -2;
3. 2;
4. 4.

3.18. Численная величина тройного интеграла $\iiint_V xydxdydz,$ по области V, ограниченной поверхностями $x = 1. x = 2, y = -2. y = -1, z = 0, z = 1/2$:

1. $-9/8;$
2. $9/8;$
3. $9/4;$
4. $9/2.$

ТЕСТ Криволинейные интегралы

4.1. Криволинейный интеграл не зависит от ______ пути интегрирования (вставить нужное слово).

4.2. Криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x,y)$ по длине AB имеет вид:

1. $\int\limits_L ldl;$
2. $\int\limits_L f(x,y)dl;$
3. $\int\limits_L f(x,y)dxdy;$
4. $\int\limits_L lf(x,y)dl.$

4.3. Криволинейный интеграл первого рода соответствует выражению:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x},\hat{y})\Delta l_i;$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x},\hat{y})\Delta x_i \Delta y_i;$
3. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x},\hat{y})\Delta l_i;$
4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x},\hat{y})\Delta x_i \Delta y_i.$

4.4. Укажите соответствие формулы вычисления криволинейного интеграла первого рода и представления кривой его интегрирования.

1. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$ A. Явное (уравнение $y = \varphi(x)$).
2. $\int\limits_{a}^{b} f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1 + y_x'^2}dx.$ B. Явное (уравнение $x = \varphi(y)$).

3. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + r_{\varphi}'^2}\,d\varphi.$ C. Параметрическое.

4. $\int\limits_{c}^{d} f(\varphi(y), y)\sqrt{1 + x'^2}\,dy.$ D. Полярное.

4.5. Криволинейный интеграл $\int_L (x^5 + 8xy)dl$, где L – дуга кривой $4y = x^4$ между точками $x = 0, x = 2$:

1. $2\sqrt{2} + 1$; 2. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} + 1)$; 3. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; 4. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

4.6. Криволинейный интеграл второго рода дуги пространственной кусочно-гладкой кривой, ограниченной точками A и B, имеет вид:

1. $\int\limits_{AB} P(x, y)dxdy$;
2. $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dxdydz$;
3. $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dxdz + Q(x, y, z)dydz$;
4. $\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$

4.7. Установите соответствие.

1. $\int\limits_{AB} dl.$ A. Длина кривой l, заданной параметрическим уравнением.

2. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + x'^2}\,dl.$ B. Масса материальной дуги L.

3. $\frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy + ydx.$ C. Длина дуги AB.

4. $\int\limits_{L} \gamma(x, y, z)dl.$ D. Площадь фигуры ограниченной замкнутой линией L.

4.8. Установите соответствие.

1. $\int\limits_{AB} y\gamma(x, y)dl.$ A. Длина кривой.

2. $\int\limits_{AB} y^2\gamma(x, y)dl.$ B. Площадь цилиндрической поверхности.

3. $\int\limits_{AB} f(x, y)dl.$ C. Статистический момент.

4. $\int\limits_{AB} dl.$ D. Момент инерции.

4.9. Если кривая AB гладкая, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл второго рода _______________ (вставьте нужное слово).

4.10. Установите соответствие.

1. $\frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy - ydx.$ A. Работа переменной силы.

2. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$ B. Криволинейный интеграл по координате y.

3. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx.$ C. Площадь фигуры.

4. $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$ D. Криволинейный интеграл по координате x.

4.11. Установите переделы интегрирования криволинейного интеграла $\int_L \frac{x}{y}dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенной между точками $(2;2)$ и $(8;4)$:

1. $\int\limits_2^2$; 2. $\int\limits_2^4$; 3. $\int\limits_4^8$; 4. $\int\limits_2^8$.

4.12. Численное значение интеграла $\int_L \frac{x}{y}dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенной между точками (2;2) и (8;4), равно:

1. $\frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$; 2. $\frac{1}{6}(17\sqrt{17} + 5\sqrt{5})$;

3. $\frac{1}{3}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$; 4. $\frac{1}{3}(17\sqrt{17} + 5\sqrt{5})$.

4.13. Численное значение интеграла $\int_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax\ (a > 0)$, равно:

1. a; 2. a^2; 3. $2a^2$; 4. $4a^2$.

ТЕСТ Поверхностные интегралы

5.1. Если поверхность S задана уравнением вида $x = x(y,z)$, то вычисление поверхностного интеграла следует вычислять по формуле:

1. $\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}dxdy$;

2. $\iint\limits_D f(x,y(x,z),z)\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}dxdz$;

3. $\iint\limits_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}dydz$;

4. $\iint\limits_D f(x,y,z)\sqrt{x'^2_y + y'^2_z + z'^2_x}dxdydz$.

5.2. Численное значение поверхностного интеграла первого рода в полярных координатах $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+4r^2)rdr$ равно:

1. π; 2. 2π; 3. 3π; 4. 4π.

5.3. Формула $\iint_D \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$ позволяет вычислять:

1. Массу материального тела;
2. Площадь поверхности;
3. Статический момент относительно оси Oz;
4. Момент инерции.

5.4. Установите соответствие.

1. $\int\limits_{AB} f(x,y)dl.$
2. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$
3. $\iint\limits_{S} f(x,y,z)d\sigma.$
4. $\iint\limits_{S} P(x,y,z)dxdz+Q(x,y,z)dydz+R(x,y,z)dxdy.$

A. Поверхностный интеграл второго рода.
B. Криволинейный интеграл второго рода.
C. Криволинейный интеграл первого рода.
D. Поверхностный интеграл первого рода.

5.5. Укажите пределы повторного интеграла при вычислении поверхностного интеграла первого рода $\iint_\sigma \frac{d\sigma}{1+x+z}$, где σ – часть плоскости $x+y+z=1$, заключенная в первом октанте:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{x+1} \varphi(y)dy;$
2. $\int\limits_0^{x-1} dx \int\limits_0^{x+y+z} \varphi(y)dy;$
3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \varphi(y)dy;$
4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{x+z} \varphi(y)dy.$

5.6. Численное значение поверхностного интеграла первого рода $\iint_\sigma \frac{d\sigma}{1+x+z}$, где σ – часть плоскости $x+y+z=1$, заключенная в первом октанте, равно:

1. $\frac{\sqrt{3}}{4};$
2. $\frac{\sqrt{3}}{8};$
3. $\frac{\sqrt{3}}{12};$
4. $\frac{\sqrt{2}}{8}.$

5.7. Формула

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

получила название:

1. Остроградского;
2. Стокса;
3. Остроградского-Стокса;
4. Остроградского-Гаусса.

5.8. Формула

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz = \oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

получила название:

1. Остроградского;
2. Стокса;
3. Остроградского-Стокса;
4. Гаусса.

5.9. Численное значение поверхностного интеграла второго рода $\iint_\sigma zdxdy + +ydydz + xdxdz$, где $\sigma -$ внешняя поверхность плоскости $x + y + z = 1$, ограниченная координатными плоскостями, равно:

1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{1}{3}$; 3. $\frac{1}{6}$; 4. $\frac{1}{12}$.

5.10. Численное значение интеграла второго рода $\iint_S (y^2 + z^2) dxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1 - x^2}$, отсеченная плоскостями $y = 0,\ y = 1$, равно:

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

5.11. Поверхностный интеграл второго рода $\iint_S Q(x, y, z) dzdx$ для плоскости Oxy от функции $R(x, y, z)$ вычисляется через:

1. поверхностный интеграл первого рода $\iint_S Q(x, y, z) \cos\beta\, dS$;
2. криволинейный интеграл второго рода $\oint_L Pdx + Qdy$;
3. криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} Q(x, y) \cos\beta\, dl$;
4. любой из предложенный вариантов.

5.12. Координата центра масс z_c верхней половины однородного шара V радиуса R с центром в начале координат равна:

1. $z_c = \frac{1}{8}R$; 2. $z_c = \frac{3}{8}R$; 3. $z_c = \frac{5}{8}R$; 4. $z_c = \frac{7}{8}R$.

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.4 Перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа «Двойные и тройные интегралы»

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_2^4 dy \int_{-\frac{4}{y}}^{-1} f(x, y) dx$.

2. Свести двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dxdy$, где *D* - область, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ к повторному интегралу.

3. Свести двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dxdy$, где *D* - область, ограниченная линиями $y = 2x$, $y = -2x, x = 1$ к повторному интегралу.

4. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dxdydz$, если V ограничена плоскостями $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ 2x + 3y + 4z = 12$.

5. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $z = 0, x = 1, y = x^3, z = 2y$.

Контрольная работа «Криволинейные и поверхностные интегралы»

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\oint_\Gamma xyzds$, *где* $\Gamma -$ *четверть окружности* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x$, *расположенная в I октанте.*

2. Вычислить криволинейный интеграл по отрезку АВ, ориентированному в направлении от точки А к точке В:

$$\int_{\Gamma} (2x-y)dx + (4x+5y)dy, \quad A(3;-4), B(1;2).$$

3. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Г, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева:

$$\int_{\Gamma} (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy, \qquad \Gamma - \textit{эллипс}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Г с началом в точке А и концом в точке В:

$$\int_{\Gamma} (x^4+4xy^3)dx + (6x^2y^2-5y^4)dy, \qquad A(-2;-1), B(0;3).$$

5. С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить интеграл

$$\iint_S (2x+y-z^2)dydz + (-4x+2y+z)dzdx + (6x^3-3y+z)dxdy,$$

где S – внешняя сторона поверхности $|2x+y+z|+|x+2y+z|+|x+y+2z|=1$.

6. *Используя формулу Стокса, вычислить интеграл* $\oint_L xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz,$

где L *— кривая* $x=a\sin t, y=a\cos t\,, z=a(\sin t+\cos t), t\in[0,2\pi)$, ориентированная в направлении возрастания параметра t.

Контрольная работа «Разделы Числовые ряды. Знакочередующиеся ряды. Функциональные ряды»

ВАРИАНТ 1

№1. Найти сумму S числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

№2. Установить расходимость числового ряда на основе необходимого условия сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)\sin\left(\frac{3}{5n+4}\right)$.

№3. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-6n+10}$.

№4. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе признака Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+6)^3}{2^n}$.

№5. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе радикального признака Коши или интегрального признака Коши $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+4}\right)^n$.

№6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[6]{64n+3}}$.

№7. Исследовать на сходимость числовой ряд, используя признаки сходимости числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{6n+7}{6n+4}\right)^{n^2}$.

№8. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

№9. Пользуясь теоремой Вейерштрасса, доказать, что функциональный ряд сходится равномерно в указанной области $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(\pi nx)}{n\sqrt{n+x}}, \quad x\in[0;+\infty)$.

№10. Разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Указать область сходимости полученного ряда.

Указание. Использовать разложения элементарных функций в степенные ряды $y=(x+4)^3e^{-3x+5},\ x_0=-4.$

ВАРИАНТ 2

№1. Найти сумму S числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

№2. Установить расходимость числового ряда на основе необходимого условия сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}n^2arctg\left(\frac{8}{n^2+5}\right)$.

№3. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

№4. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе признака Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{\sqrt{n^3+8}}$.

№5. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе радикального признака Коши или интегрального признака Коши $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}$.

№6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{9n^2+2n+5}}$.

№7. Исследовать на сходимость числовой ряд, используя признаки сходимости числовых рядовь$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right))$.

№8. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-7)^n}{\sqrt{9n^2+1}}$.

№9. Пользуясь теоремой Вейерштрасса, доказать, что функциональный ряд сходится равномерно в указанной области $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{x}{n}\right),\ x\in[0;\pi]$.

№10. Разложить функцию f (x) в ряд Тейлора в окрестности точки x0. Указать область сходимости полученного ряда.

Указание. Использовать разложения элементарных функций в степенные ряды $y=(3x^2+x+1)e^{2x-1},\ x_0=0.$

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.5 Темы курсовых работ

Не предусмотрены

19.3.6 Темы рефератов и докладов

1. Площадь в криволинейных координатах
2. Вычисление площади поверхности
3. Механические приложения двойных интегралов
4. Формула Грина
5. Механические приложения тройных интегралов
6. О вычислении массы и центра тяжести тел
7. Примеры приложения формулы Остроградского
8. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло
9. Очерк истории рядов. Эпоха Ньютона и Лейбница.
10. Очерк истории рядов. Период формального развития теории рядов
11. Очерк истории рядов. Создание точной теории.
12. Признак Бертрана
13. Признак Жамэ
14. Признак Ермакова
15. Признак Лобачевского
16. Признак Дедекинда
17. Признак Дирихле
18. Ряд Гранди. Ряд Пюизё
19. Ряд Лорана
20. Ряды Фурье и их приложения
21. Центральная предельная теорема и ее доказательство через ряды Тейлора.

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется за самостоятельно написанный реферат по теме; умение излагать материал последовательно и грамотно, делать необходимые обобщения и выводы;
- **оценка «хорошо»** ставится, если: реферат удовлетворяет в основном требованиям на оценку «отлично», но при этом имеет один из недостатков: в изложении: допущены небольшие пробелы, не исказившие содержание реферата; допущены один–два недочета при освещении основного содержания темы, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов, которые легко исправляются по замечанию преподавателя. В реферате может быть недостаточно полно развернута аргументация;
- **оценка «удовлетворительно»** ставится, если: неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, исправленные после замечаний преподавателя; студент не может применить теорию в новой ситуации;
- **оценка «неудовлетворительно»** ставится, если: не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, которые не исправлены после нескольких замечаний преподавателя; нарушена логика в изложении материала, нет необходимых обобщений и выводов; недостаточно сформированы навыки письменной речи; реферат является плагиатом других рефератов более чем на 90%.

19.3.7 Комплект индивидуальных заданий (примеры)

Индивидуальное задание выдается по блокам, номер варианта задания совпадает с номером задачи и порядковым номером студента в списке учебной группы.

1. Двойные интегралы.

1.1. Вычислить двойные интегралы по указанным прямоугольникам *D*

1. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x-y)^2}$; $1 \le x \le 2$; $3 \le y \le 4$;

2. $\iint\limits_D xe^{xy}dydx$; $0 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 0$;

3. $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$; $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$;

4. $\iint\limits_D \left(3yx^2 - 2x^3\right)dxdy$; $0 \le x \le 1$; $1 \le y \le 2$;

1.2. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями

1. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

2. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2$;

Перейти к полярным координатам

2. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;   4. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

1.3. Вычислить площадь области, ограниченной линиями

1 $y^2=x+1,\ \ x+y=1$;   15. $xy=4,\ \ x=1,\ \ y=2$;

Применить полярные координаты

3. $x^2+y^2-2ax=0,\ \ x^2+y^2-2bx=0$ $(0<a<b)$;   4. $x^2+y^2=a^2,\ \ x^2+y^2-2ax=0,\ \ y=0$;

2. Тройные интегралы

2.1. Вычислить тройной интеграл по области *V*, ограниченной поверхностями

1. $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz;\ \ x=-1,\ \ x=+1,\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ z=0,\ \ z=2$;
2. $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;\ \ x=0,\ \ x=1,\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ y=0,\ \ z=1$;
3. $\iiint\limits_V xydxdydz\ \ x=1,\ \ x=2,\ \ y=-2,\ \ y=-1,\ \ z=0,\ \ z=\frac{1}{2}$;
4. $\iiint\limits_V \rho\sin\theta d\rho d\varphi d\theta;\ \ \varphi=0,\ \ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \ \rho=0,\ \ \rho=2,\ \ \theta=0,\ \ \theta=\frac{\pi}{2}$;

2.2. Вычислить тройной интеграл с помощью замены переменных

1	$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;\ \ x^2+y^2+z^2\le R^2-шар$;
2	$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;\ \ x^2+y^2=z,\ \ z=1$;
3	$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz;\ \ x^2+y^2+z^2\le R^2$;
4	$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz;\ \ x^2+y^2=2x,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ z=3$;

3. Криволинейные и поверхностные интегралы

3.1. Вычислить криволинейный интеграл

1. $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx+xydy$, если путь от A(1,1) до B(3,4) – отрезок прямой.
2. $\int\limits_{K}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, если K - ломаная OAB, где O(0,0), A(2,0), B(4,2).
3. $\int\limits_{AB}\frac{yds}{\sqrt{x}}$, если AB - дуга полукубической параболы $y^2=(4/9)x^3$ от A(3, $2\sqrt{3}$) до B(8, $\frac{32\sqrt{2}}{3}$).
4. $\int\limits_{K}ydx-(y+x^2)dy$, если K - дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

4. Поверхностные интегралы (индивидуальные задания не предусмотрены)

5. Числовые ряды

5.1. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости рядов

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ 3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$

1.

5.2. С помощью признака сравнения проверить сходимость ряда:

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$ 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

5.3. С помощью признака Даламбера исследовать сходимость ряда:

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

6. Функциональные ряды

6.1. Найти радиус и интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 3 $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ 4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$

6.2. Разложить функции в ряд Маклорена и найти интервалы сходимости функций

1 $f(x)=\frac{2x+3}{x^2-4x+3}$ 2 $f(x)=\ln(x^2-10x+9)$

3 $f(x)=\sqrt[5]{1+x}$ 4 $f(x)=\frac{1}{2+3x^2}$

<u>7. Элементы теории поля</u>

7.1.1. Найти уравнение поверхности уровня скалярного поля φ, проходящей через точку M

1 $\varphi = 2x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4z = 18$; M(2;1;2);

2 $\varphi = x^2 - 2y^2 + 4x + 8y - 5z = 24$; M(3;2;1);

3 $\varphi = 3x^2 - 2y^2 + 12x + 8y - 6z = 14$; M(1;2;3);

4 $\varphi = 2x^2 - 2y^2 - 8x + 8y = 6$; M(2;2);

7.2. Градиент скалярного поля

7.2.1. Найти производную скалярного поля φ в точке M по направлению от этой точки к точке M

1 $\varphi = x^2 + 2y^2 - 3yz$; M(2;2;2); M1(2;3;3);

2 $\varphi = 2x^2 + y^2 + 4yz$; M(1;2;1); M1(2;3;2);

3 $\varphi = 3x^2 - y^2 + 4yz$; M(2;2;1); M1(3;3;2);

4 $\varphi = 4x^2 + y^2 - 5yz$; M(3;2;1); M1(4;3;3);

7.1.2. Найти величину и направление градиента скалярного поля φ в точке M

1 $\varphi = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xyz$; M(1;1;1);

2 $\varphi = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xyz$; M(1;2;1);

3 $\varphi = 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3xyz$ M(1;2;2);

4 $\varphi = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3xyz$ M(2;1;1);

7.3.1. Найти поток векторного поля F через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

1 $F = 7(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k})$; $\rho^2 = 2$;

2 $F = 6(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k})$; $\rho^2 = 3$;

3 $F = 5(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k})$; $\rho^2 = 4$;

4 $F = 4(x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k})$; $\rho^2 = 5$;

7.4. Дивергенция векторного поля

7.4.1. Найти дивергенцию векторного поля F(M) в точке M

1 $F(M) = (2x^2y^2 - 2xz^3 + 2x^2y^2z^2)\bar{i} +$ M(1;2;1);

$+(3x^3y^2+2x^2yz+4xz^2)\bar{j}+$
$+(2x^2y^2z^2-2x^2z+5yz)\bar{k};$

2 $F(M)=(3x^2y^2-xz^3+3x^2y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;2;1);
$+(2x^3y^2+3x^2yz+2xz^2)\bar{j}+$
$+(3x^2y^2z^2-3x^2z-3yz)\bar{k};$

3 $F(M)=(x^3y^3-2x^2z^2+2y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;2;2);
$+(2x^2y^2+x^2y^2z^2+2x^2z)\bar{j}+$
$+(2x^3y^3z^3+2x^2z+2yz)\bar{k};$

4 $F(M)=(3x^2y^3+2x^3z^2-2y^2z^2)\bar{i}+$ M(1;2;1);
$+(3x^2y^3+3x^2z^2-3yz^2)\bar{j}+$
$+(x^4y^3z^3+x^2z^2+y^2z^2)\bar{k};$

7.5. Циркуляция векторного поля

7.5.1. Вычислить циркуляцию векторного поля F(M) вдоль кривой L, описываемой уравнением $x=f(t),\ y=f(t),\ z=f(t)$

1 $F(M)=3yz\bar{i}+4xz\bar{j}+5xy\bar{k};$ $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\ (0\le t\le 0{,}5);$

2 $F(M)=3xy\bar{i}+4yz\bar{j}+5xz\bar{k};$ $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\ (0\le t\le 1);$

3 $F(M)=2xz\bar{i}+3xy\bar{j}+4yz\bar{k};$ $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\ (0\le t\le 1{,}5);$

4 $F(M)=3yz\bar{i}-4xz\bar{j}+5xy\bar{k};$ $x=t^2,\ y=t^3,\ z=t^4\ (0\le t\le 1);$

7.6. Ротор векторного поля

7.6.1. Найти ротор векторного поля F в точке M.

1 $F=y^2z^2\bar{i}+x^2z^2\bar{j}+x^3y^3\bar{k};$ M(2;1;1);

2 $F=y^3z^3\bar{i}+x^3z^3\bar{j}+x^4y^4\bar{k};$ M(2;2;1);

3 $F=x^3z^2\bar{i}+y^3z^2\bar{j}+x^3y^3\bar{k};$ M(2;2;2);

4 $F=x^2z^3\bar{i}+y^3z^2\bar{j}+x^2y^2\bar{k};$ M(3;2;2);

7.7.1. Найти потенциал поля, если оно существует

1 $F(M)=(5x^2y^2+4x^2z^2+4x^3z^2)\bar{i}+$ M(2;2;1);
$+(4xy^3-y^3z^2+3x^2z^2)\bar{j}+$
$+(xy^3z^2+x^3z+y^2z)\bar{k};$

2 $F(M)=(2x^3y^3-2x^2z^2+2y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;2;2);
$+(4x^3y-2y^2z^3+4x^2z^2)\bar{j}+$
$+(x^2yz^2-x^2z^3-y^3z^2)\bar{k};$

3 $F(M)=(3x^3y^3-3x^3y^3+3y^2z^2)\bar{i}+$ M(2;1;1);
$+(2x^3y^3+4y^2z^2+3x^3z^3)\bar{j}+$
$+(x^2y^2z+x^2z^3+y^3z^2)\bar{k};$

4 $F(M)=(2xy^3+2x^3z+2yz^3)\bar{i}+$ M(2;2;1);
$+(3x^4y^4+2yz^3+3x^3z)\bar{j}+$

$+(xyz + x^3y^3 + y^3y^3)\bar{k}$;

Критерии оценки:

- **оценка «отлично»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 90% заданий;
- **оценка «хорошо»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 70% заданий;
- **оценка «удовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено более 50% заданий;
- **оценка «неудовлетворительно»** выставляется студенту, если правильно выполнено менее 50% заданий.

19.3.8 Составление аннотированного каталога

Составить аннотированный каталог материалов информационно-образовательных ресурсов по одной из тем: «Кратные интегралы», «Ряды», «Теория поля» (аннотация должна содержать не менее 3 предложений). Количество материалов – не менее 10.

Информационно-образовательные ресурсы:

– Научная электронная библиотека – http://www.scholar.ru/;
– Федеральный портал Российское образование – http://www.edu.ru/;
– Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» http://window.edu.ru/;
– Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – http://fcior.edu.ru;
– Лекции ведущих преподавателей вузов России в свободном доступе – https://www.lektorium.tv/;
– Электронно-библиотечная система «Издательства Лань» – http://e.lanbook.com/;
Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – http://biblioclub.ru/.

№	Наименование материала	Информационно-образовательные ресурс	Ссылка	Аннотация
1.				
2.				

19.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущий контроль успеваемости проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущий контроль успеваемости проводится в формах*: фронтальных опросов, контрольных работ, индивидуальных заданий, тестирование, рефератов, докладов.* Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются количественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.