

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
БОРИСОГЛЕБСКИЙ ФИЛИАЛ
(БФ ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин



С.Е. Зюзин
20.05.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.04.05 Математические методы оптимизации
экономических решений

1. Код и наименование направления подготовки:

38.03.01 Экономика

2. Профиль подготовки:

Экономика предприятий и организаций

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная, очно-заочная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: естественнонаучных и
общеобразовательных дисциплин

6. Составители программы: Л.В. Лободина, канд. пед. наук, доцент, Е.С. Мещерякова,
ст. преподаватель

7. Рекомендована: Научно-методическим советом Филиала от 19.05.2025, протокол № 8

8. Учебный год: 2026-2027 **Семестр:** 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью учебной дисциплины «Математические методы оптимизации экономических решений» является приобретение обучающимися теоретических знаний и практических навыков постановки и решения оптимизационных экономических задач.

Задачи учебной дисциплины:

- формирование системы основных понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов, и раскрытие взаимосвязи этих понятий;
- формирование навыков принятия решений по совершенствованию функциональной деятельности или организации управления в прикладных областях;
- изучение принципов построения математических моделей различных объектов и систем;
- применение математического моделирования и методов оптимизации в практической деятельности.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Математические методы оптимизации экономических решений» относится к обязательной части блока Б1 Дисциплины (модули). Для освоения дисциплины «Математические методы оптимизации экономических решений» необходимы знания, умения, навыки, сформированные в ходе изучения дисциплин «Линейная алгебра», «Статистика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Экономическая теория. Микроэкономика» и др. Изучение данной дисциплины является необходимой основой для изучения дисциплин «Экономика внутрифирменных структур», «Бизнес-планирование», «Эконометрика» и др.

Условия реализации дисциплины для лиц с ОВЗ определяются особенностями восприятия учебной информации и с учетом индивидуальных психофизических особенностей.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знания (на промежуточном уровне) экономической теории при решении прикладных задач	ОПК-1.4	Использует математические методы и модели оптимизации при решении прикладных задач экономической теории	Знать: основные методы математического моделирования; методы решения оптимизационных задач; методы построения и анализа моделей Уметь: строить математические модели процессов и явлений Владеть: методами построения, анализа и применения математических моделей
ОПК-4	Способен предлагать экономически и финансово обоснованные организационно-управленческие решения в профессиональной деятельности	ОПК-4.3	Выбирает инструментальные средства для обоснования и реализации организационно-управленческих решений	Знать: методики выбора инструментальных средств обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей Уметь: решать оптимизационные задачи с ограничениями Владеть: навыками решения экономических и управленческих задач
ОПК-5	Способен использовать современные информационные ресурсы	ОПК-5.2	Использует специализированные программные средства для	Знать: основы применения ЭВМ для моделирования и оптимизации различных процессов Уметь: решать оптимизационные задачи;

	ые технологии и программные средства при решении профессиональных задач		решения и анализа оптимизационных и эконометрических задач и применяет полученные результаты для обоснования экономических решений	применять пакеты прикладных программ для решения прикладных задач экономической теории Владеть: методами применения пакетов прикладных программ для решения задач моделирования и оптимизации
--	---	--	--	--

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 3/108.

Форма промежуточной аттестации зачет с оценкой.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

ОФО

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			семестр №4
Контактная работа		72	72
в том числе:	лекции	36	36
	лабораторные	36	36
Самостоятельная работа		36	36
Итого:		108	108

ОЗФО

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			семестр №4
Контактная работа		32	32
в том числе:	лекции	16	16
	лабораторные	16	16
Самостоятельная работа		76	76
Итого:		108	108

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Введение.	Центральная задача экономики. Принятие решений. Классификация методов оптимальных решений в экономике.	—
1.2	Общая задача линейного программирования (ЗЛП).	Постановка задачи оптимизации. Математическое программирование. Классические задачи линейного математического программирования: задача планирования производства, задача о смесях (составление	—

		рациона), задача о раскрое материала. Составление математических моделей оптимизации экономических процессов с использованием линейного математического программирования.	
1.3	Методы решения задач линейного программирования. Графический метод.	Графический метод. Постановка и решение задач линейного математического программирования графическим методом.	—
1.4	Симплексный метод решения задачи линейного математического программирования.	Сведение задачи линейного программирования к каноническому виду. Добавочные переменные, их экономический смысл. Составление симплексных таблиц. Переход к допустимому решению. Условие оптимальности решения в задаче на максимум и на минимум.	—
1.5	Двойственность в задачах линейного математического программирования.	Теоремы двойственности. Основные свойства двойственных оценок. Составление двойственной задачи. Решение двойственной задачи с использованием данных симплекс-таблицы. Составление двойственной задачи. Решение двойственной задачи с использованием теорем двойственности.	—
1.6	Специальные задачи математического программирования.	Транспортная задача. Задача о назначениях. Получение первоначального опорного плана транспортной задачи методами северо-западного угла и наименьших затрат. Решение транспортной задачи методом потенциалов.	—
1.7	Сетевое планирование.	Сетевой график. Критический путь. Составление сетевого графика в планировании последовательности работ. Резервы времени в сетевом планировании. График Ганта. Расчет основных характеристик в сетевом планировании: продолжительность критического пути, резервы времени.	
1.8	Теория массового обслуживания.	Основные понятия. Классификация систем массового обслуживания. Основные характеристики систем массового обслуживания (СМО). Расчет характеристик стохастических СМО.	—
1.9	Методы и модели управления товарно-материальными запасами.	Основные понятия. Формула Вильсона. Расчет характеристик товарно-материального склада. Расчет характеристик склада на основе модели чередования циклов производства и реализации произведенной продукции.	—
2. Практические занятия			
Практические занятия учебным планом не предусмотрены			
3. Лабораторные работы			
3.2	Общая задача линейного программирования (ЗЛП).	Составление математических моделей оптимизации экономических процессов с использованием линейного математического программирования.	—
3.3	Методы решения задач линейного программирования. Графический метод.	Решение задач линейного математического программирования графическим методом.	—
3.4	Симплексный метод решения задачи линейного математического программирования.	Составление симплексных таблиц. Переход к допустимому решению. Условие оптимальности решения в задаче на максимум и на минимум.	—
3.5	Двойственность в задачах линейного математического	Составление двойственной задачи. Решение двойственной задачи с использованием теорем двойственности.	—

	программирования.		
3.6	Специальные задачи математического программирования	Решение транспортной задачи методом потенциалов.	–
3.7	Сетевое планирование.	Расчет основных характеристик в сетевом планировании: продолжительность критического пути, резервы времени.	–
3.8	Теория массового обслуживания	Расчет характеристик стохастических систем массового обслуживания (СМО).	–
3.9	Методы и модели управления товарно-материальными запасами.	Расчет характеристик товарно-материального склада.	–

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

ОФО

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение.	2	0	0	2	4
2.	Общая задача линейного программирования (ЗЛП).	4	0	4	4	12
3.	Методы решения задач линейного программирования. Графический метод.	2	0	4	4	10
4.	Симплексный метод решения задачи линейного математического программирования.	8	0	6	4	18
5.	Двойственность в задачах линейного математического программирования.	4	0	4	4	12
6.	Специальные задачи математического программирования.	6	0	6	4	16
7.	Сетевое планирование.	4	0	4	4	12
8.	Теория массового обслуживания.	2	0	4	6	12
9.	Методы и модели управления товарно-материальными запасами.	4	0	4	4	12
	Итого:	36	0	36	36	108

ОЗФО

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Введение.	1	0	0	4	5
2.	Общая задача линейного программирования (ЗЛП).	1	0	2	8	11
3.	Методы решения задач линейного программирования. Графический метод.	1	0	2	8	11
4.	Симплексный метод решения задачи линейного математического	4	0	2	10	16

	программирования.					
5.	Двойственность в задачах линейного математического программирования.	2	0	2	10	14
6.	Специальные задачи математического программирования.	2	0	2	10	14
7.	Сетевое планирование.	2	0	2	8	12
8.	Теория массового обслуживания.	1	0	2	10	13
9.	Методы и модели управления товарно-материальными запасами.	2	0	2	8	12
	Итого:	16	0	16	76	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению учебной дисциплины, целесообразно ознакомиться с учебной программой дисциплины, электронный вариант которой размещён на сайте БФ ВГУ.

Изучение дисциплины предполагает изучение основной и дополнительной литературы, работа с конспектами лекций, полное и своевременное выполнение заданий по всем разделам дисциплины, предусмотренных лабораторными работами. Основное внимание в самостоятельной работе обучающимся необходимо уделить изучению методов решения задач линейного программирования и методам и моделям управления товарно-материальными запасами.

При подготовке к промежуточной аттестации необходимо повторить пройденный материал в соответствии с учебной программой, примерным перечнем вопросов, выносящихся на аттестацию. Рекомендуется использовать конспекты лекций и источники, перечисленные в списке литературы в рабочей программе дисциплины, а также ресурсы электронно-библиотечных систем.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Новиков, А. И. Экономико-математические методы и модели : экономико-математические методы и модели : учебник / А. И. Новиков. – 6-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2024. – 532 с. : ил., табл., схем. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=711063 (дата обращения: 17.02.2024). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-05787-8. – Текст : электронный.
2	Кундышева, Е. С. Математические методы и модели в экономике : учебник / Е. С. Кундышева ; под науч. ред. Б. А. Суслакова. – 3-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2022. – 286 с. : ил., табл., граф. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=684490 (дата обращения: 17.02.2024). – ISBN 978-5-394-04621-6. – Текст : электронный.
3	Карлова, М. Ю. Моделирование и оптимизация задач экономики средствами симплексного метода и теории двойственности : учебное пособие : [16+] / М. Ю. Карлова ; Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского. – Липецк : Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2018. – 82 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=576925 (дата обращения: 17.02.2024). – Библиогр.: с. 77 - 79. – ISBN 978-5-88526-996-4. – Текст : электронный.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4	Колемаев, В. А. Математическая экономика : учебник / В. А. Колемаев. – 3-е изд., стер. – Москва : Юнити-Дана, 2017. – 401 с. : табл., граф., схемы – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=684909 (дата обращения: 17.02.2024). –

	Библиогр. в кн. – ISBN 5-238-00794-9. – Текст : электронный.
5	Аксентьев, В. А. Математические методы в экономике и финансах : учебное пособие / В. А. Аксентьев, Е. Г. Пыткеев, А. Г. Хохлов ; Тюменский государственный университет. – 3-е изд., перераб. – Тюмень : Тюменский государственный университет, 2011. – 376 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571440 (дата обращения: 17.02.2024). – Библиогр.: с. 363 - 365. – ISBN 978-5-400-00530-5. – Текст : электронный.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
6	Справочная правовая система «Консультант плюс»: http://www.consultant.ru/ ;
7	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – http://biblioclub.ru/
8	Электронно-библиотечная система (ЭБС) ВГУ https://lib.vsu.ru/?p=4&t=8b

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Шапкин, А. С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию : учебное пособие / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – 11-е изд., перераб. – Москва : Дашков и К°, 2023. – 402 с. : ил., табл., схем. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=711065 (дата обращения: 17.02.2024). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-05448-8. – Текст : электронный.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины может использоваться смешанное обучение

При реализации дисциплины используются **информационно-справочные системы и профессиональные базы данных:**

- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU – <http://elibrary.ru/>
- Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» <http://window.edu.ru/>
- Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru>
- Электронная библиотека экономической и деловой литературы – <http://www.aup.ru/library/>
- Федеральный образовательный портал Экономика. Социология Менеджмент – <http://ecsocman.hse.ru/db/sectx/124.html>
- Официальный интернет-портал правовой информации – <http://pravo.gov.ru/>
- Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» – <http://biblioclub.ru/>
- ООО Политехресурс ЭБС «Электронная библиотека технического вуза» (ЭБС «Консультант студента») – <https://www.studentlibrary.ru/>

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Программное обеспечение:

- Win10 (или Win7), OfficeProPlus 2010
 - браузеры: Yandex, Google, Opera, Mozilla Firefox, Explorer
 - STDU Viewer version 1.6.2.0
 - 7-Zip
 - GIMP GNU Image Manipulation Program
 - Paint.NET
 - Tux Paint
- Мультимедийное оборудование (проектор, ноутбук или стационарный компьютер, экран).

19. Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор (ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Введение.	ОПК-1	ОПК-1.4	Тест
2.	Общая задача линейного программирования (ЗЛП).	ОПК-1 ОПК-4 ОПК-5	ОПК-1.4 ОПК-4.3 ОПК-5.2	Лабораторная работа «Решение ЗЛП графическим методом» Лабораторная работа «Технология решения задачи линейного программирования в табличном процессоре EXCEL»
3.	Методы решения задач линейного программирования. Графический метод.	ОПК-1 ОПК-4 ОПК-5	ОПК-1.4 ОПК-4.3 ОПК-5.2	Лабораторная работа «Решение задачи линейного программирования с помощью встроенной функции «Поиск решения» табличного процессора Excel»
4.	Симплексный метод решения задачи линейного математического программирования.	ОПК-1 ОПК-4 ОПК-5	ОПК-1.4 ОПК-4.3 ОПК-5.2	Лабораторная работа «Решение задач линейного программирования симплекс-методом» Лабораторная работа «Технология решения задач линейного программирования симплекс-методом в табличном процессоре Excel»
5	Двойственность в задачах линейного математического программирования.	ОПК-1 ОПК-4 ОПК-5	ОПК-1.4 ОПК-4.3 ОПК-5.2	Лабораторная работа «Решение ЗЛП методом искусственного базиса» Лабораторная работа «Двойственность в задачах линейного программирования»
6	Специальные задачи математического программирования.	ОПК-1 ОПК-4 ОПК-5	ОПК-1.4 ОПК-4.3 ОПК-5.2	Лабораторная работа «Технология решение транспортной ЗЛП в табличном процессоре Excel» Лабораторная работа «Решение транспортной задачи линейного программирования методом потенциалов в табличном процессоре Excel»
7	Сетевое планирование.	ОПК-1 ОПК-4	ОПК-1.4 ОПК-4.3	Лабораторная работа «Элементы сетевого планирования и управления»
8	Теория массового обслуживания.	ОПК-1 ОПК-4	ОПК-1.4 ОПК-4.3	Лабораторная работа «Элементы теории массового обслуживания»
9	Методы и модели управления товарно-материальными запасами.	ОПК-1 ОПК-4 ОПК-5	ОПК-1.4 ОПК-4.3 ОПК-5.2	Лабораторная работа «Модели управления запасами»
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой				Фонды оценочных средств (Отчеты по лабораторным работам Тестирование)

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольная работа и индивидуальное задание.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

20.1.1 Лабораторные работы

Лабораторная работа «Решение ЗЛП графическим методом»

Цель работы: Освоение технологии графического решения задач линейного программирования в табличном процессоре Excel.

Содержание лабораторной работы

Дана задача линейного программирования на плоскости (таблица 1). Требуется найти решение ЗЛП в табличном процессоре Excel.

Вариант 1.

Таблица 1. Исходные данные.

Вид сырья	Запас сырья	Расход на ед. продукции		Прибыль от реализации	
		П1	П2	Д1	Д2
1	25	1	5	1	2
2	9	1	1		
3	21	3	1		

ЗЛП в канонической форме:

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 21, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Ход работы

Решим ЗЛП графическим методом:

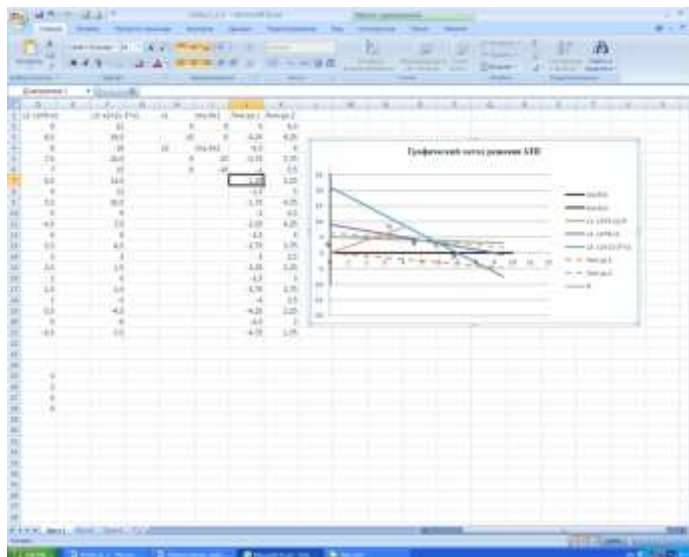
1. Построим оси Ox_1 и Ox_2 , которые задаются соответственно уравнениями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.
2. Для построения для каждой из прямых системы ограничений достаточно двух точек. Строим первую прямую из системы ограничений, уравнение которой получается в результате замены в ограничении знака неравенства на знак равенства:

$$x_1 + 5x_2 = 25 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{5}x_1 + 5 \quad (L_1)$$

3. Аналогично строим вторую и третью прямые из системы ограничений:

$$x_2 = -x_1 + 9 \quad (L_2), \quad x_2 = -3x_1 + 21 \quad (L_3)$$

4. Выделяем полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Получаем что пятиугольник OABCD есть область допустимых решений (ОДР) задачи.
5. Строим линии уровня. Приняв $F = 0$, получим уравнение линии уровня 1: $x_1 + 2x_2 = 0$. Задавая различные значения целевой функции, можно построить несколько линий уровня.



Результат ЗЛП:

Для достижения оптимального плана будем переходить с одной линии уровня на другую в направлении возрастания целевой функции (т.к. данная задача на нахождение максимума – перемещаемся по направлению вектора нормали к целевой функции).

Точка В в данном случае окажется критической точкой (также она является граничной точкой ОДР).

Таким образом, оптимальный план выпуска достигается в точке пересечения прямых L1 и L2.

Решив систему из двух неравенств
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \end{cases}$$
, получим точку В (5;4).

Таким образом, экономический смысл задачи заключается в следующем: для достижения максимальной выгоды, следует выпускать 5 ед. продукции П1 и 4 ед. продукции П2, при этом максимальная выручка будет равна 13.

Лабораторная работа «Технология решения задачи линейного программирования в табличном процессоре EXCEL»

Цель работы: освоить технологии решения задач линейного программирования в табличном процессоре Excel.

Содержание лабораторной работы

В работе необходимо решить оптимизационную задачу линейного программирования (ЗЛП) с использованием встроенных функций табличного процессора Excel и проинтерпретировать полученное решение, сравнив его эффективность с различными начальными приближениями.

Вариант 1.

Целевая функция:

$$F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Ход работы



Рис 1. Значение целевой функции при трех начальных приближениях.



Рис 2. Результат выполнения поиска решений.

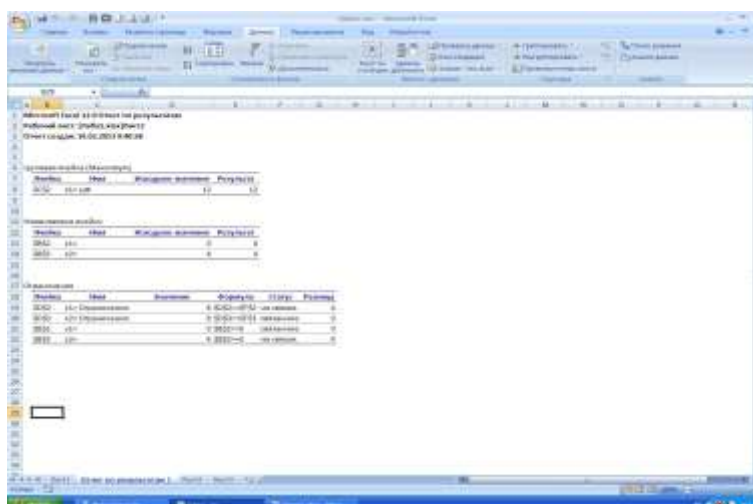


Рис. 3. Отчет по результатам поиска решений.

Результат: оптимальные значения вычисленных неизвестных
 $x_1 = 0, x_2 = 4$, целевая функция $F_{\max} = 12$.

Лабораторная работа «Решение задачи линейного программирования с помощью встроенной функции «Поиск решения» табличного процессора Excel»

Цель работы: решение задачи линейного программирования в табличном процессоре EXCEL.

Содержание лабораторной работы

Найти решение задачи линейного программирования с помощью встроенной функции «Поиск решения» табличного процессора Excel.

Вариант 1.

Таблица 1. Исходные данные.

Вид сырья	Запас сырья	Расход на ед. продукции	Прибыль от реализации

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Лист1.xlsx]Лист1
Отчет создан: 09.02.2013 10:35:04

Целевая функция (Максимум)

Вариант	Имя	Исходное значение	Результат
\$F\$4	макс. в цд 120	0	13

Производственные функции

Вариант	Имя	Исходное значение	Результат
\$G\$3	выпущено П1	0	5
\$G\$5	выпущено П2	0	4

Производственные ресурсы

Вариант	Имя	Значение	Формула	Статус	Результат
\$F\$7	левая часть	25	=\$G\$3+\$G\$5	связанный	0
\$F\$8	левая часть	8	=\$G\$3+\$G\$5	связанный	0
\$F\$9	левая часть	18	=\$G\$3+\$G\$5	не связан	3

Рис. 2. Отчет по результатам.

Результат: максимальная прибыль, полученная предприятием при реализации продукции составит 13 ден. ед. При этом будут выпущены 5 единиц продукции П1 и 4 единицы продукции П2.

Лабораторная работа «Решение задач линейного программирования симплекс-методом»

Цель работы: научиться решать задачи линейного программирования симплекс-методом

Идея симплекс-метода заключается в последовательном улучшении первоначального плана путем упорядоченного перехода от одного опорного плана к другому и завершается нахождением оптимального плана. Симплекс-методом решаются только канонические задачи линейного программирования.

Решение канонической задачи симплекс-методом существенно облегчается применением так называемых симплексных таблиц.

Всякую каноническую задачу можно записать условно в виде таблицы. Таблица заполняется следующим образом: первые m строк содержат в условной форме уравнения системы ограничений, разрешенные относительно базисных переменных. В последней строке записана целевая функция, эта строка называется F -строкой. В столбцах записаны свободные переменные и свободные члены.

Условие оптимальности плана: если ЗЛП на максимум, то в F -строке не должно быть отрицательных элементов; если ЗЛП на минимум, то в F -строке не должно быть положительных элементов.

Алгоритм решения:

1. Исходную задачу линейного программирования приводим к каноническому виду путем введения базисных переменных.
2. Базисные переменные выражаем через свободные переменные.
3. Строим начальный план, полагая свободные переменные равными нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам.
4. Строим первую симплекс-таблицу.
5. Проверяем план на оптимальность. Если план не оптимален, то его улучшаем.
6. Улучшение плана.
 - а) выбор разрешающего столбца: для этого в F -строке выбираем максимальный по абсолютной величине из отрицательных элементов, если задача на максимум, или,

максимальный из положительных элементов, если задача на минимум. Пусть это будет столбец с номером s ;

б) выбор разрешающей строки: выбираем строку с минимальным симплексным отношением. Симплексные отношения - это отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Пусть это будет строка с номером r .

в) выбор разрешающего элемента: элемент, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца. Пусть это будет элемент a_{rs} .

г) переменную x_s вводим в базис вместо переменной x_r .

д) элементы новой симплекс-таблицы b_{ij} пересчитываем по следующим формулам:

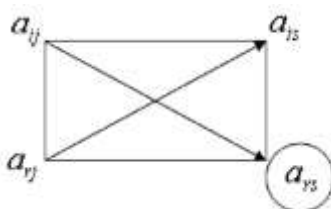
разрешающий элемент $b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}$,

элементы разрешающего столбца $b_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}}, i \neq r$,

элементы разрешающей строки $b_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, j \neq s$,

остальные элементы симплекс-таблицы по правилу прямоугольника:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$



7. Вновь полученный план проверяется на оптимальность.

Вариант 1.

Ход работы

Задание. Для производства двух видов изделий P_1 и P_2 используется три вида сырья S_1, S_2, S_3 , запасы которого соответственно равны 100, 60, 180 единиц. Для производства одной единицы продукции P_1 используется 2 единицы сырья S_1 и по 1 единице сырья S_2 и S_3 . Для производства одной единицы продукции P_2 используется по 1 единице сырья S_1 и S_2 и 4 единицы сырья S_3 .

Прибыль от реализации 1 единицы каждой продукции P_1 и P_2 соответственно равна 30 и 20 единицам.

Необходимо составить симплекс-методом такой план выпуска продукции P_1 и P_2 , при котором суммарная прибыль будет наибольшей.

Решение.

1. Составим математическую модель задачи:

Пусть x_1 – единица готовой продукции вида P_1 ,

x_2 – единица готовой продукции вида P_2 .

Цель фабрики – получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов P_1 и P_2 , тогда:

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 4x_2 \leq 180, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

2. Задачу приводим к каноническому виду:

$$F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 180, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 5 \end{cases}$$

3. Базисные переменные выражаем через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 100 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 60 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 180 - x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

4. Записываем начальный план: $X_0 = (0; 0; 100; 60; 180)$

5. Строим первую симплекс-таблицу:

Таблица 1. Первая симплекс-таблица.

Свободные перем. Базисные перем.	$-x_1$	$-x_2$	Свободные члены	Симплексные отношения
x_3	2	1	100	$\frac{100}{2} = 50 \text{ min}$
x_4	1	1	60	$\frac{60}{1} = 60$
x_5	1	4	180	$\frac{180}{1} = 180$
Ф-строка	-30	-20	0	

6. Начальный план не оптимален, так как в Ф-строке есть отрицательные элементы.

7. Улучшение плана. Строим вторую симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 2. Вторая симплекс-таблица.

Свободные перем. Базисные перем.	$-x_3$	$-x_2$	Свободные члены	Симплексные отношения
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	50	100
x_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10	20 min
x_5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	130	$\approx 37,1$
Ф-строка	15	-5	1500	

8. План, соответствующий таблице 2, $X_1 = (50; 0; 0; 10; 130)$ оптимален, так как в Ф-строке есть отрицательные элементы. Улучшаем его.

9. Улучшение плана. Строим третью симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 3. Третья симплекс-таблица.

Свободные перем. Базисные перем.	$-x_3$	$-x_4$	Свободные члены	Симплексные отношения
-------------------------------------	--------	--------	-----------------	-----------------------

x_1	1	-1	40	
x_2	-1	2	20	
x_5	3	-7	60	
Р-строка	10	10	1600	

10. План, соответствующий таблице 3, $X_2 = (40; 20; 0; 0; 60)$ оптимален, так как в Р-строке нет отрицательных элементов.

Ответ: если предприятие будет выпускать продукцию вида P_1 и P_2 в количестве 40 и 20 единиц соответственно, то получит максимальную прибыль в размере 1600 единиц, при этом сырье S_1 и S_2 будет израсходовано полностью, а сырье S_3 останется в количестве 60 единиц.

Лабораторная работа «Технология решения задач линейного программирования симплекс-методом в табличном процессоре Excel»

Цель работы: освоение технологии решения задач линейного программирования симплекс-методом в табличном процессоре Excel.

Содержание лабораторной работы

Дана задача линейного программирования. Требуется найти решение ЗЛП в табличном процессоре Excel симплекс – методом.

Вариант 1.

Задача. На арендном предприятии для изготовления двух типов кабеля А и В выполняется пять технологических операций. Нормы затрат времени на изготовление 1000 м кабеля каждого вида по каждой операции, доход от реализации 1000 м кабеля, а также общий фонд рабочего времени по каждой операции приведены в табл. 4.5. Определить оптимальный выпуск продукции, при котором будет получен наибольший доход.

Таблица 1. Исходные данные.

Вид технологической операции	Нормы затрат времени для производства кабеля		Общий фонд времени
	Типа А	Типа В	
Получение проволоки	8	3	28
Изоляция	6	7	27
Скручивание	6	2	22
Освинцовывание	0	1	22
Испытание	7	8	16
Доход от реализации	13	10	

Построим модель:

$$F = 13x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \leq 28 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 27 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ 0x_1 + x_2 \leq 22 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 16, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Избавимся от неравенств в ограничениях, введя в ограничения неотрицательные балансовые переменные, и перейдём к каноническому виду:

$$F = 13x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 28 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_4 = 27 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 22 \\ x_2 + x_6 = 22 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_7 = 16, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 7. \end{cases}$$

Составим опорный план

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	13	10	0	0	0	0	0	0
2	8	3	1	0	0	0	0	28
3	6	7	0	1	0	0	0	27
4	6	2	0	0	1	0	0	22
5	0	1	0	0	0	1	0	22
6	7	8	0	0	0	0	1	16

Рис. 1. Первая симплекс-таблица.

Теперь выберем разрешающий столбец. В нашем случае это столбец С, поскольку в нём находится наибольшее положительное значение целевой функции. После этого выбираем разрешающий элемент($\min \{b_i/a_{ij}\}$), в нашем случае это элемент С7.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	13	10	0	0	0	0	0	0
2	8	3	1	0	0	0	0	28
3	6	7	0	1	0	0	0	27
4	6	2	0	0	1	0	0	22
5	0	1	0	0	0	1	0	22
6	7	8	0	0	0	0	1	16

Рис. 2. Вторая симплекс-таблица.

Далее составляем новую симплекс-таблицу, в которой элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающей строки и столбца становятся равны 0, кроме разрешающего элемента. Остальные элементы определяются по правилу

прямоугольника (сумма произведений главной и побочной диагонали делить на разрешающий элемент).

Рис. 3. Третья симплекс-таблица.

В новой симплекс-таблице значения целевой функции равны нулю или меньше нуля, а это значит, что найдено оптимальное решение:

$$x_1 = 2,3; x_2 = 0; x_3 = 9,71; x_4 = 13,29; x_5 = 8,29; x_6 = 22; x_7 = 0; F_{\max} = 29,71.$$

Ответ: для достижения максимального дохода, который составит 26 ед. необходимо выпустить 2 единицы изделий типа А и отказаться от выпуска изделий типа В.

Лабораторная работа «Решение ЗЛП методом искусственного базиса»

Цель работы: изучение метода искусственного базиса решения ЗЛП.

Содержание лабораторной работы

Дана задача линейного программирования с системой ограничений неpreferredительного вида. Преобразовать исходную задачу в М-задачу и решить её симплексным методом, используя табличный процессор Excel. Воспользоваться условиями задач, приведенных ниже в индивидуальных заданиях.

Вариант 1.

$$F = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20, x_j \geq 0, j = 1,4 \end{cases}$$

Ход работы

Система уравнений имеет неpreferredительный вид (отсутствуют переменные в preferredительном виде), следовательно, применяем метод искусственного базиса, вводя переменные W_1 и W_2 .

Таким образом, процесс решения ЗЛП сведется к решению М-задачи, получаем:

$$F = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 - MW_1 - MW_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + W_1 = 16 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 + W_2 = 20, x_j \geq 0, j = 1,4, W_q \geq 0, q = 1,2. \end{cases}$$

Составим симплексную таблицу для М-задачи (таблица 1).

Таблица 1. Симплексная таблица для М-задачи.

	x_1	x_2	x_3	x_4	W_1	W_2	Симплексные
--	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------------

									отношения
Баз. пер.	Своб. пер.	A_0	8	-6	-5	2	$-M$	$-M$	
W_1	$-M$	16	1	4	-1	1	1	0	
W_1	$-M$	20	4	-6	3	-7	0	1	$\frac{16}{1} = 16 \min$
$Z_j - C_j$		0	-8	6	5	-2	0	0	
		$-36M$	$-5M$	$2M$	$-2M$	$6M$			
x_4	2	16	1	4	-1	1	1	0	$\frac{16}{1} = 16$
W_2	$-M$	132	11	22	-4	0	7	1	$\frac{132}{11} = 12 \min$
$Z_j - C_j$		32	-6	14	3	0	2	0	
		$-132M$	$-11M$	$-22M$	$4M$		$-6M$		
x_4	2	4	0	2	$-\frac{7}{11}$	1	$\frac{4}{11}$	$-\frac{1}{11}$	
x_1	8	12	1	2	$-\frac{4}{11}$	0	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{11}$	
$Z_j - C_j$		104	0	26	$\frac{9}{11}$	0	$\frac{64}{11}$	$\frac{64}{11}$	
							M	M	

Начальное решение не является оптимальным, т.к. в строке оценок содержатся отрицательные, следовательно, решение можно улучшить.

Определим переменную, которая войдет в список базисных: разрешающий столбец x_4 , т.к. $2 + 6M$ – максимальная по модулю оценка среди отрицательных.

Разрешающую строку найдем через симплексные отношения: $\min\{16\}=16$, следовательно, разрешающая – первая строка. Разрешающий элемент: $A_{1,4} = 1$.

Аналогично для второй итерации, разрешающий элемент: $A_{2,1} = 11$.

Полученное решение $X_2 = (12; 0; 0; 4; 0; 0)$ оптимально, т.к. среди оценок нет отрицательных.

Значение целевой функции: $F_{\max} = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 104$.

Найдем оптимальное решение исходной задачи, используя табличный процессор Excel.

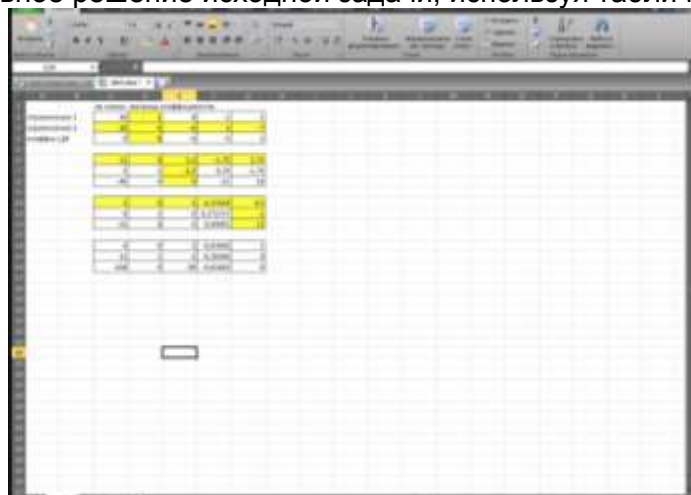


Рис.1. Форма для ввода условий.

Выбираем наибольший положительный элемент в ячейках C2:G3. Он равен 4 и находится в ячейке D3, значит столбец D разрешающий. Выберем разрешающий элемент D3=4.

Составив новую симплекс-таблицу, получаем:

Рис. 2. Результат второй итерации.

Снова улучшая результат итераций (т.к. не все оценки отрицательны), получим:

Рис. 3. Конечный результат итераций.

В ячейках C16: G16 все значения равны или меньше нуля. Поэтому решение считается оптимальным, корни уравнений находятся в столбце свободных членов напротив единичных значений. Переменные, соответствующие небазисным столбцам, берутся равными нулю.

Ответ. $x_1 = 12$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 4$; $F_{\max} = 104$.

Лабораторная работа «Двойственность в задачах линейного программирования»

Цель работы: построение математических моделей двойственных задач.

Таблица 1. Исходные данные.

Вид технологической операции	Нормы затрат времени для производства кабеля		Общий фонд времени
	Типа А	Типа В	
Получение проволоки	8	3	28
Изоляция	6	7	27
Скручивание	6	2	22
Освинцовывание	0	1	22
Испытание	7	8	16
Доход от реализации	13	10	

Экономико-математическая модель исходной задачи

Введем переменные x_1 и x_2 , составим ЦФ и систему ограничений:

$$F = 13x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \leq 28 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 27 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ 0x_1 + x_2 \leq 22 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 16, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

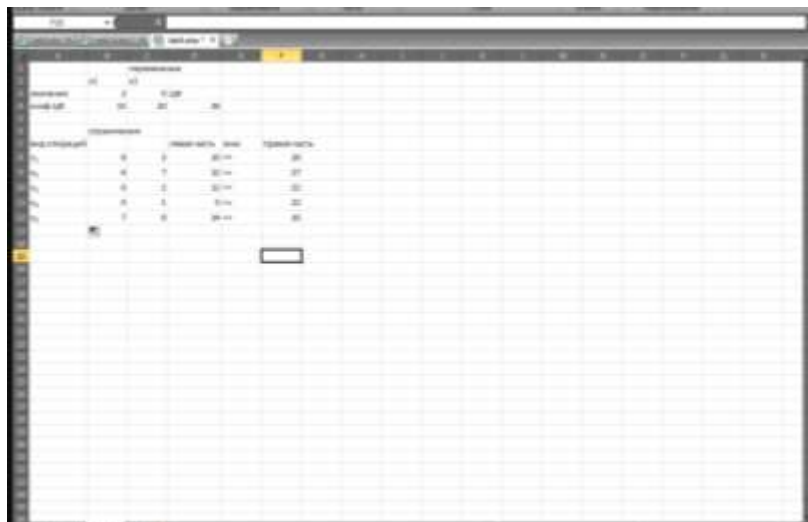


Рис. 1. Решение исходной задачи.

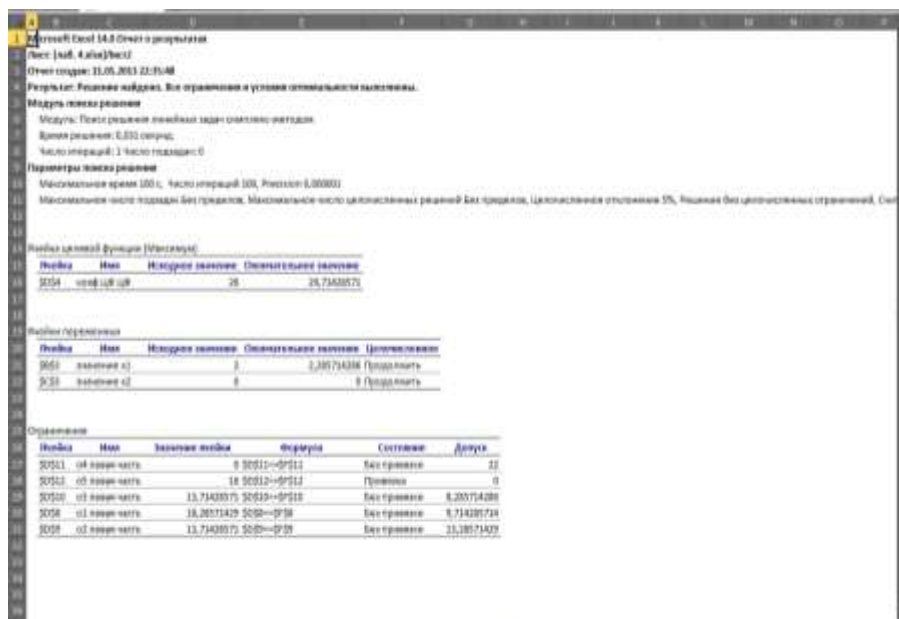


Рис. 2. Отчет по результатам.

Экономико-математическая модель двойственной задачи:

Введем переменные y_i ($i = 1, 5$), составим целевую функцию и систему ограничений:

$$G = 28y_1 + 27y_2 + 22y_3 + 22y_4 + 16y_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 0y_4 + 7y_5 \geq 13 \\ 3y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 8y_5 \geq 10, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, 5 \end{cases}$$

Решение двойственной задачи можно найти в отчете «Поиск решений» – отчет по устойчивости. Теневые цены ресурсов равны (0;0;0;0;1.86).

Microsoft Excel 4.0.1 Report on stability
 File: Lab. 3.xlsx
 Date: 04.04.2014 22:00:00

Report on stability

Resource	Unit	Optimal value	Value	Optimal value	Optimal value	Optimal value
1	1000000000	0	0	0	0	0
2	1000000000	0	0	0	0	0
3	1000000000	0	0	0	0	0
4	1000000000	0	0	0	0	0
5	1000000000	0	0	0	0	0

Products

Product	Unit	Optimal value	Value	Optimal value	Optimal value	Optimal value
1	1000000000	0	0	0	0	0
2	1000000000	0	0	0	0	0
3	1000000000	0	0	0	0	0
4	1000000000	0	0	0	0	0
5	1000000000	0	0	0	0	0

Рис.3. Отчет по устойчивости.

Операция O_5 имеет отличную от нуля оценку – она используется в оптимальном плане полностью, является дефицитным, сдерживает рост целевой функции.

Остальные ресурсы используются не полностью, поэтому имеют нулевые двойственные оценки, не влияют на план выпуска продукции.

Общая стоимость используемых ресурсов при выпуске 2 продуктов типа А составит:

$$G_{\min} = 28 \cdot 0 + 27 \cdot 0 + 22 \cdot 0 + 22 \cdot 0 + 16 \cdot 1,86 = 29,71.$$

Лабораторная работа «Технология решение транспортной ЗЛП в табличном процессоре Excel»

Цель работы: освоение технологии решения транспортной задачи в табличном процессоре Excel.

Содержание лабораторной работы

Дана транспортная задача линейного программирования. Необходимо составить математическую модель ТЗ и решить ее с помощью встроенной функции «Поиск решения» табличного процессора Excel.

Вариант 1.

Задача. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у трех поставщиков A_i в количестве a_i ($i=1,3$) единиц, необходимо доставить четырем потребителям B_j в количестве b_j ($j=1,4$) единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i -го поставщика к j -му потребителю. Себестоимость единицы продукции в i -м пункте равна c_i .

Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывести все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий минимальную стоимость.

Ход работы

Поставщики	Количество продукта	Потребитель				
		B_1	B_2	B_3	B_4	(B_5)
		Стоимость перевозки груза				
A_1	350	4	5	8	6	0
A_2	750	4	7	1	2	0
A_3	300	2	6	4	7	0
Потребность потребителя	1400 1250	200	50	600	400	(150)

Чтобы привести задачу в сбалансированный вид (т.к. $\sum_{i=1}^m a_i = 1200 \neq 100 = \sum_{i=1}^n b_i$), введем фиктивного потребителя B_5 с потребностью в количестве 150 ед., стоимость перевозки грузов к нему введем равными 0.

Исходные данные (стоимость перевозки)				
	В1	В2	В3	В4
В1	100	200	300	400
В2	200	300	400	500
В3	300	400	500	600
В4	400	500	600	700
В5	500	600	700	800

Потребности				
	В1	В2	В3	В4
В1	100	200	300	400
В2	200	300	400	500
В3	300	400	500	600
В4	400	500	600	700
В5	500	600	700	800

Рис.1. Ввод исходных данных.

Исходные данные (стоимость перевозки)				
	В1	В2	В3	В4
В1	100	200	300	400
В2	200	300	400	500
В3	300	400	500	600
В4	400	500	600	700
В5	500	600	700	800

Потребности				
	В1	В2	В3	В4
В1	100	200	300	400
В2	200	300	400	500
В3	300	400	500	600
В4	400	500	600	700
В5	500	600	700	800

Рис.2. Оптимальный план перевозок.

Вариант 1.

Задача. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны b_j ($j = 1, 4$). Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны a_i ($i = 1, 3$). На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок представлены в таблицах задания. Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
	Затраты на перевозку, ден. ед.				
A_1	4	24	26	26	13
A_2	24	30	10	29	6
A_3	12	11	24	22	21
Потребности, b_j	10	12	10	8	

Пусть x_{ij} – количество единиц груза, запланированного к перевозке от i -го поставщика j -му потребителю ($x_{ij} \geq 0, i = 1, 3; j = 1, 4$). Тогда стоимость перевозки: $Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$.

Рис. 1. Форма для ввода условий.

Данная транспортная задача является закрытой (сбалансированной), т.к. спрос равен предложению:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 13 + 6 + 21 = 40, \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 10 + 12 + 10 + 8 = 40.$$

Формирование опорного плана распределения поставок по *методу северо-западного угла* (без учета величины издержек):

The screenshot shows a spreadsheet with the following sections:

- Поставщики (Suppliers):** A table with 3 rows (A1, A2, A3) and 4 columns (B1, B2, B3, B4) showing supply quantities.
- Потребители (Consumers):** A table with 4 rows (B1, B2, B3, B4) and 3 columns (A1, A2, A3) showing demand quantities.
- Цены (Prices):** A table with 3 rows (A1, A2, A3) and 4 columns (B1, B2, B3, B4) showing unit costs.
- Метод северо-западного угла (Northwest Corner Method):** A section detailing the allocation process, including a list of allocations and a final cost calculation.

Рис. 2. Первоначальный план перевозок по методу северо-западного угла.

Общее число заполненных клеток должно быть равно 6 ($4+3-1=6$). У нас их 6. Закрепленное за каждым потребителем количество товара, которое они могут принять, строго равно предложению поставщиков.

Мы имеем случай сбалансированности спроса и предложения.

$x_{11} = 10$ ед. продукта следует перевезти от 1-го поставщика 1-му потребителю;

$x_{12} = 3$ ед. продукта следует перевезти от 1-го поставщика 2-му потребителю;

$x_{22} = 6$ ед. продукта следует перевезти от 1-го поставщика 3-му потребителю;

$x_{32} = 3$ ед. продукта следует перевезти от 2-го поставщика 3-му потребителю;

$x_{33} = 10$ ед. продукта следует перевезти от 2-го поставщика 4-му потребителю;

$x_{34} = 8$ ед. продукта следует перевезти от 3-го поставщика 4-му потребителю.

Суммарный расход на перевозку продуктов равен 741 ден. ед.:

$$F(x) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 24 + 6 \cdot 30 + 3 \cdot 11 + 10 \cdot 24 + 8 \cdot 22 = 741.$$

Формирование опорного плана распределения поставок по *методу минимального элемента* (с учетом величины издержек):

The screenshot shows a spreadsheet with the following sections:

- Поставщики (Suppliers):** A table with 3 rows (A1, A2, A3) and 4 columns (B1, B2, B3, B4) showing supply quantities.
- Потребители (Consumers):** A table with 4 rows (B1, B2, B3, B4) and 3 columns (A1, A2, A3) showing demand quantities.
- Цены (Prices):** A table with 3 rows (A1, A2, A3) and 4 columns (B1, B2, B3, B4) showing unit costs.
- Метод минимального элемента (Minimum Element Method):** A section detailing the allocation process, including a list of allocations and a final cost calculation.

Рис. 3. Опорный план распределения.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Потребитель	П1	П2	П3	П4	Итого
1	4	30	26	24	84
2	24	10	11	22	67
3	12	11	24	20	67
Поставщик	30	37	30	8	105

Потребитель	П1	П2	П3	П4	Итого
1	10	0	0	0	10
2	0	10	0	0	10
3	0	0	10	0	10
Поставщик	30	37	30	8	105

Метод минимального элемента

Потребитель	П1	П2	П3	П4	Итого
1	10	0	0	0	10
2	0	10	0	0	10
3	0	0	10	0	10
Поставщик	30	37	30	8	105

Рис. 4. Результат заполнения клеток.

Общее число заполненных клеток должно быть равно 6 (4+3-1). У нас их 6. Закрепленное за каждым потребителем количество товара, которое они могут принять, строго равно предложению поставщиков.

Мы имеем случай сбалансированности спроса и предложения.

$x_{11} = 10$ ед. продукта следует перевезти от 1-го поставщика 1-му потребителю;

$x_{13} = 3$ ед. продукта следует перевезти от 1-го поставщика 3-му потребителю;

$x_{23} = 6$ ед. продукта следует перевезти от 2-го поставщика 3-му потребителю;

$x_{32} = 12$ ед. продукта следует перевезти от 3-го поставщика 2-му потребителю;

$x_{33} = 1$ ед. продукта следует перевезти от 3-го поставщика 3-му потребителю;

$x_{34} = 8$ ед. продукта следует перевезти от 3-го поставщика 4-му потребителю.

Суммарный расход на перевозку продуктов равен 510 ден. ед.

$$F(x) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 26 + 6 \cdot 10 + 12 \cdot 11 + 24 \cdot 1 + 22 \cdot 8 = 540.$$

510 < 741, следовательно, метод минимального элемента дал лучший вариант опорного плана, более приближенный к оптимальному.

Метод потенциалов поиска оптимального решения задачи

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Потребитель	П1	П2	П3	П4	Итого
1	10	0	0	0	10
2	0	10	0	0	10
3	0	0	10	0	10
Поставщик	30	37	30	8	105

Метод минимального элемента

Потребитель	П1	П2	П3	П4	Итого
1	10	0	0	0	10
2	0	10	0	0	10
3	0	0	10	0	10
Поставщик	30	37	30	8	105

Рис. 5. Определение потенциалов.

Определим оценки свободных клеток по формуле: $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

	20	15	12	13	
24	10^4	24	153^{26}	62^{26}	$u_1 = 0$
4	30^{24}	45^{30}	206^{10}	4^{29}	$u_2 = -16$
32	12	12^{11}	1^{24}	8^{22}	$u_3 = -2$
	$v_1 = 4$	$v_2 = 13$	$v_3 = 26$	$v_4 = 24$	

Среди оценок нет отрицательных, значит найден оптимальный план (план улучшить нельзя):

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 64 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$Z(x) = 510$ ден.ед.

План полностью совпал с опорным планом, составленным по методу минимального элемента. Весь груз распределен.

Лабораторная работа «Элементы сетевого планирования и управления»

Цель работы: приобретение навыков построения моделей сетевого планирования и управления и оптимизации построенных моделей.

Содержание работы

Сетевой графике и его параметры. Правила построения сетевого графика. Расчет параметров сетевого графика. Оптимизация технологического графика. Линейный график и способы его построения.

Выполнение комплексных научных исследований, также проектирование и строительство промышленных, сельскохозяйственных и транспортных объектов требуют календарной увязки большого числа взаимосвязанных работ, выполняемых различными организациями.

Составление и анализ соответствующих календарных планов представляют собой весьма сложную задачу, при решении которой применяется *метод сетевого планирования*. Этот метод дает возможность определить, какие работы или операции из числа многих, составляющих проект, являются «критическими» по своему влиянию на общую календарную продолжительность проекта; каким образом построить наилучший календарный план проведения всех работ по данному проекту с тем, чтобы выдержать заданные сроки при минимальных затратах. Идея сетевого метода очень проста. Она основана на графическом изображении комплекса работ с любой степенью их детализации и на выполнении элементарных арифметических операций по расчету параметров и анализу сетевых графиков.

С математической точки зрения *сетевой график* – это связный взвешенный оргграф $G=(A, R)$ без петель и контуров. При моделировании производственных процессов в качестве вершин графа используют события, а в качестве дуг – работы.

Событие – это момент начала или завершения одной или нескольких работ. Предполагается, что событие не имеет временной продолжительности, а совершается мгновенно. На графике событие изображается кружком (прямоугольником) с номером.

Событие, которым начинается рассматриваемый комплекс работ, называется *начальным*, а событие, которым завершается комплекс работ, – *конечным*, остальные события являются промежуточными.

Под *работой* понимается любой *трудовой процесс, сопровождающийся затратой времени и приводящий к нужным результатам*. На графе работы изображаются *дугами*. Весом каждой дуги является продолжительность соответствующей работы. Работы бывают действительные и фиктивные.

Действительная работа – это реальный процесс, приводящий к достижению конкретных результатов и требующий затрат определенных ресурсов (материальных средств, времени, персонала).

На сетевом графике работа изображается сплошной дугой. *Фиктивная работа* – условное изображение зависимости между действительными работами. Фиктивная работа не требует затрат ресурсов и времени. На графике изображается *пунктирной дугой*.

Любая последовательность работ, соединяющая каких-либо два события, называется *путем*. Путь, соединяющий исходное и конечное событие через последовательность работ, называется *полным путем сетевого графика*. *Длительностью* полного пути является сумма весов (продолжительностей по времени) входящих в него дуг (работ).

Полный путь максимальной продолжительности называется *критическим*. *Критическими* также называются работы и события, находящиеся на этом пути. Критический путь выделяется на графике *жирными или двойными стрелками*. Именно он определяет продолжительность выполнения всего комплекса требуемых работ.

По существу, критический путь – самое «узкое» место проекта.

Уменьшить общую продолжительность осуществления проекта можно, только изыскав способы сокращения работ, лежащих на критическом пути.

Сумма продолжительностей всех критических работ называется *критическим сроком выполнения комплекса работ*.

Очевидно, что быстрее критического срока комплекс работ выполнить нельзя. Действительно, чтобы достигнуть завершающего события, надо пройти обязательно весь критический путь. Для сокращения продолжительности выполнения комплекса работ необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути.

Правила построения сетевого графика:

- в сетевом графике должны быть одно начальное и одно завершающее события. Если это не так, то вводятся фиктивные события и работы;
- дуги, соединяющие события, могут иметь произвольную длину и произвольный наклон, но желательно избегать их пересечения;
- график не должен иметь тупиковых событий, т.е. событий (за исключением завершающего), из которых не выходит ни одной дуги. В этом случае вводят фиктивную работу.
- график не должен содержать событий (за исключением начального), в которые не входит ни одна дуга. В этом случае вводят фиктивную работу.
- любые два события – вершины графа – могут быть непосредственно связаны не более чем одной дугой;
- график не должен содержать замкнутых контуров и петель.

Нумерация событий производится по следующему правилу: начальному событию присваивается минимальный номер, следующему событию присваивается очередной номер, если все входящие в него дуги выходят из уже пронумерованных событий, и т.д. Если под это правило подпадает несколько событий, то нумерация производится в любой удобной последовательности, например, очередной номер присваивается событию, встречающему первым при следовании слева направо.

Основными параметрами сетевого технологического графика являются ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени наступления событий.

Ранний срок свершения события $t_p(j)$ – максимальная продолжительность времени выполнения всех работ от исходного события до рассматриваемого j -го события.

Ранние сроки свершения событий определяются последовательно от начального события 0 к конечному N , в порядке нумерации событий, по формуле

$$t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i, j)\}, t_p(0) = 0, i < j, t_p(N) = T_{кр},$$

где $t_p(j)$ – ранний срок свершения j -го события, предшествующего рассматриваемому j -му событию; $t(i, j)$ – продолжительность работы, соединяющей i -е и j -е события.

Поздний срок свершения события $t_n(i)$ – максимальный допустимый срок наступления рассматриваемого i -го события, не приводящий к увеличению критического пути. Он показывает, через какое время после начала выполнения комплекса работ должно наступить интересующее событие, чтобы общая продолжительность работ не увеличилась.

Поздние сроки свершения событий определяются последовательно от завершающего события к исходному в порядке, обратном нумерации событий, по формуле:

$$t_n(j) = \min\{t_n(i) - t(i, j)\}, t_n(N) = t_p(N) = T_{кр},$$

где $t_n(j)$ – поздний срок свершения j -го события, которому непосредственно предшествует рассматриваемое i -е событие; $t(i, j)$ – продолжительность работы (длина дуги), соединяющей i -е и j -е события.

Заметим, что значения t_n и t_p конечного события равны и соответствуют величине критического пути $T_{кр}$. Это обстоятельство можно использовать для проверки правильности выполнения расчетов.

Резерв времени свершения события $D_t(i)$ показывает, насколько можно сдвинуть срок наступления рассматриваемого события в сторону его увеличения, не увеличивая при этом критического пути:

$$D_t(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

После расчета параметров сетевого графика определяется критический путь. Для этого устанавливаются события с резервом времени свершения, равным нулю ($D_t = 0$). Критический путь будет пролегать между этими событиями, соединяя исходное и завершающее события непрерывной последовательностью работ. Критический путь строится от завершающего события к исходному (если параметры графика определены правильно, резервы времени свершения исходного и завершающего событий равны 0). При этом если в событие, лежащее на критическом пути, входят дуги из нескольких событий, также лежащих на критическом пути (у них также $D_t = 0$), то критический путь проходит по дуге, определяющей t_p рассматриваемого события.

В общем случае критических путей может быть несколько.

Под оптимизацией технологического графика понимается его улучшение с целью уменьшения времени выполнения комплекса работ при заданном количестве сил и средств. Сетевой метод планирования работ не дает строго оптимального решения. Однако путем последовательного многократного улучшения первоначального варианта можно получить график, близкий к оптимальному.

Эта задача может быть решена путем привлечения к выполнению работ, лежащих на критическом пути, дополнительных сил и средств за счет работ, не лежащих на этом пути.

Другой способ оптимизации сетевого технологического графика заключается в изменении порядка следования работ (изменении состава предшествующих работ).

В процессе оптимизации состав работ, лежащих на критическом пути, может изменяться. В этом случае дальнейшая оптимизация технологического графика выполняется по вновь образованному критическому пути.

Критериями оптимальности сетевого графика могут служить:

- коэффициенты загрузки a_i или простоя b_i i -го специалиста:

$$a_i = \frac{T_i}{T_{кр}}; b_i = 1 - a_i;$$

- коэффициенты средней загруженности a или простоя b специалистов:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{nT_{кр}}; b = 1 - a,$$

где T_i – суммарная продолжительность работы i -го специалиста; $T_{кр}$ – длина критического пути; n – число специалистов, задействованных в работах.

Признаками высокого качества технологического графика (его близости к оптимальному) являются:

- близость значений $a_i, i=1, n$ к значению a , которые должны различаться не более чем на 0,01;
- близость значения a к единице.

Линейный график и способы его построения

Сетевой график дает общее представление о структуре комплекса работ и технологической последовательности их выполнения.

Недостатком сетевого графика является то, что он не дает четкого представления о взаимном расположении работ во времени, что затрудняет нахождение критического пути и оптимизацию сетевого графика.

Этот недостаток отсутствует у *линейного графика*, или *диаграммы Ганта*. Элементами линейного графика являются работы, которые изображаются в системе координат (номер работы есть время ее выполнения).

Линейный график строится по следующему правилу:

- работы изображаются на графике линиями (прямоугольниками), длина которых пропорциональна их длительности;
- работа изображается на графике, если построены все работы, непосредственно ей предшествующие;
- момент начала выполнения данной работы определяется моментом окончания выполнения всех непосредственно предшествующих ей работ.

Основным достоинством сетевого графика является наглядное отображение структуры комплекса, логической последовательности выполнения отдельных работ и взаимосвязей между ними.

Вариант 1.

Перечень работ, выполняемых при техническом обслуживании автомобиля, представлен в таблице 1.

Таблица 1. Перечень работ.

Номер работы	Код работы	Число исполнителей, человек	Продолжительность работы, мин.	Предшествующие работы	Участие специалистов в работах
1	1.1	1	5	–	№1
2	1.2	2	8	2.3	№1, №2
3	2.1	1	5	1.1	№1
4	2.2	1	10	1.1	№2
5	2.3	2	6	2.1, 2.2	№1, №2

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ). Выполнить расчет критериев оптимальности сетевого графика. Построить диаграмму Ганта.

Решение.

Согласно таблице 1 и представленному перечню работ получен график, изображенный на рисунке 1.

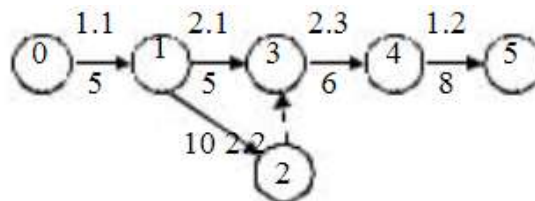


Рис. 1. Сетевой технологический график.

Далее выполним расчет параметров сетевого графика, их анализ и оптимизацию. Расчеты проведем по формулам, рассмотренным выше, результаты расчетов сведем в таблицу 2.

На рисунке 2 представлена модель для расчета параметров и в таблице 2 результаты расчета параметров сетевого графика.

Номер работы	Вид работы	Число исполнителей, человек	Продолжительность работы, ед.	Предшествующие работы	Число специалистов в работе
1	1.1	5	5	—	№1
2	2.2	10	10	1.1	№1, №2
3	2.1	5	5	1.1, 2.2	№1
4	2.3	6	6	2.1	№2
5	1.2	8	8	2.3	№1, №2

Номер события	Ранний срок события	Поздний срок события	Резерв времени события
0	0	0	0
1	5	5	0
2	15	15	0
3	15	15	0
4	21	21	0
5	29	29	0

Рис. 2. Модель задачи для расчета параметров сетевого графика.

Таблица 2. Параметры сетевого графика.

Номер события i	Ранний срок события $t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i, j)\}, i < j$	Поздний срок $t_n(j) = \min\{t_n(i) - t(i, j)\}, j < i$	Резерв времени события $D_i(i) = t_n(i) - t_p(i)$
0	0	0	0
1	5	5	0
2	15	15	0
3	15	15	0
4	21	21	0
5	29	29	0

Из таблицы очевидно, что продолжительность критического пути составляет $T_{кр} = 29$ ед. времени, а сам критический путь проходит через все события графика.

На рисунке 3 обозначим критический путь выполнения проекта.

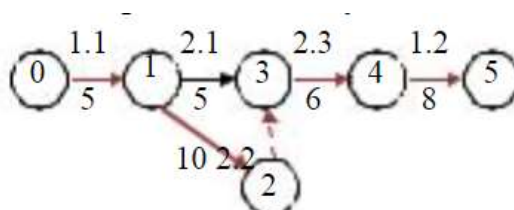


Рис. 3. Сетевой график с критическим путем.

Рассчитаем коэффициенты загрузки специалистов по данным таблицы 1. Из условия задачи следует, что специалист №1 участвует в выполнении работ 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, а специалист №2 – работ 1.1, 2.2, 2.3.

Для 1-го специалиста:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{T_{кр}} = \frac{5+8+5+6}{29} = 0,83 \text{ – коэффициент загрузки.}$$

$$b_1 = 1 - a_1 = 1 - 0,83 = 0,17 \text{ – коэффициент простоя.}$$

Для 2-го специалиста:

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{T_{кр}} = \frac{8+10+6}{29} = 0,83 \text{ – коэффициент загрузки.}$$

$$b_2 = 1 - a_2 = 1 - 0,83 = 0,17 \text{ – коэффициент простоя.}$$

Как видно, загруженность специалистов одинакова и достаточно высокая, что свидетельствует о высоком качестве организации труда.

Построим линейный график.

1). На новом листе составим в табличном процессоре таблицу исходных данных для диаграммы Ганта (рис. 4), опираясь на общий сетевой график.

	A	B	C	D
19	Номер работы	Начало работы	Продолжительность работы	Код работы
20	1	0	5	1.1
21	2	5	10	2.2
22	3	5	5	2.1
23	4	15	6	2.3
24	5	21	8	1.2

Рис. 4. Исходные данные для диаграммы Ганта.

2). Построим линейчатую гистограмму (лента «Вставить», тип диаграммы «Линейчатая с вертикальной осью с накоплением»). Для вертикальной оси зададим обратный порядок категорий в окне «Формат оси». Для первого ряда (синяя часть гистограммы) уберем заливку. Добавим для каждой работы код. В результате получим линейный график, изображенный на рисунке 5.

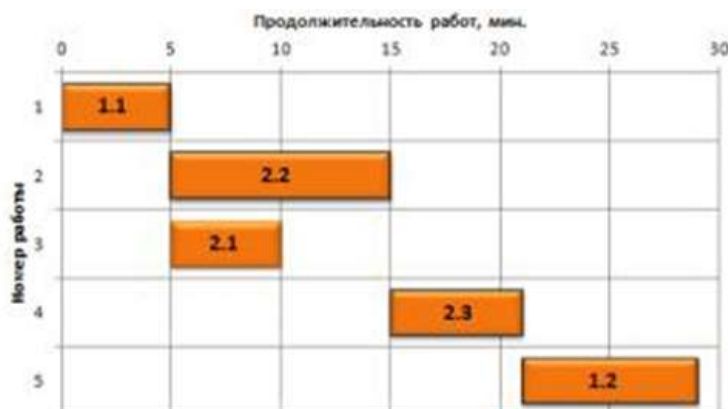


Рис. 5. Диаграмма Ганта.

После построения линейного графика технического обслуживания автомобиля перенумеруем работы.

Лабораторная работа «Элементы теории массового обслуживания»

Цель работы: приобретение навыков нахождения основных параметров систем массового обслуживания, изучение математического аппарата теории.

Содержание лабораторной работы

Вариант 1.

Основные понятия теории систем массового обслуживания

Системами массового обслуживания (СМО) называются системы, предназначенные для многократного использования при решении однотипных задач. Примерами систем массового обслуживания являются магазины, ателье, телефонные станции, билетные кассы, ремонтные мастерские и т.д.

Каждая СМО может состоять из одной или нескольких обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания.

По числу каналов системы массового обслуживания подразделяются на *одноканальные* и *многоканальные*.

Каждое обращение клиента в СМО называется *заявкой*. Как правило, в систему заявки поступают массового обслуживания случайным образом, формируя случайный поток заявок. Продолжительность обслуживания заявки в канале СМО также носит случайный характер. В конечном счете, система массового обслуживания по времени оказывается загруженной неравномерно. В периоды времени, когда мало заявок, СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Если же поступает большое число заявок, то часть из них либо покидают систему необслуженными, либо становятся в очередь. По этому признаку СМО подразделяются на два основных класса:

1. *Система массового обслуживания с отказами*, в которой заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему.

2. *Система массового обслуживания с ожиданием (с очередью)*, в которой в случае занятости всех каналов заявка становится в очередь на обслуживание. При этом способ отбора для обслуживания заявок из очереди называется *дисциплиной обслуживания*.

Различают следующие виды дисциплин обслуживания заявок:

- первой пришла – первой обслужена;
- последней пришла – первой обслужена;
- обслуживание с приоритетом – в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки;
- обслуживание с ограниченной длиной очереди;
- обслуживание с ограниченным временем пребывания в очереди и т.д.

Показатели эффективности функционирования систем массового обслуживания характеризуют ее способность справляться с потоком заявок.

К числу показателей эффективности СМО с отказами относятся:

Абсолютная пропускная способность (A) определяет среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени.

Относительная пропускная способность (Q) – это отношение абсолютной пропускной способности к числу заявок, приходящих в единицу времени.

Вероятность отказа в обслуживании (Ротк) определяется ситуацией занятости всех каналов СМО и всех мест в очереди.

Среднее число занятых каналов (Sk) – среднее число каналов, занятых обслуживанием.

Среднее число свободных каналов (Scв) – среднее количество простаивающих каналов.

Коэффициент простоя каналов – отношение среднего числа свободных каналов к общему количеству каналов обслуживания.

Коэффициент занятости каналов – отношение среднего числа занятых каналов к общему количеству каналов обслуживания.

Средняя длина очереди (Lоч) – число ждущих, но не обслуживаемых заявок.

Среднее число заявок в системе (Lсист) складывается из средних значений занятости каналов и длины очереди.

Среднее время ожидания обслуживания (Тсист) отражает среднее время пребывания заявки в очереди плюс время обслуживания.

Задание.

На строительном участке в инструментальной мастерской работают два мастера. Если рабочий заходит в мастерскую, когда оба мастера заняты обслуживанием ранее обратившихся работников, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания.

Статистика показала, что среднее число рабочих, обращающихся в мастерскую в течение часа, равно 18; среднее время, которое затрачивает мастер на заточку или ремонт инструмента, равно 10 мин.

Сколько мастеров должно работать в мастерской, чтобы вероятность обслуживания рабочих была выше 85%?

Оценить основные характеристики работы данной мастерской по выбранным каналам обслуживания.

Решение:

Для решения воспользуемся расчетными формулами для многоканальной СМО с отказами, и все вычисления выполним в MS Excel. Модель с формулами на языке Excel приведена на рисунке 1. Результат решения приведен на рисунках 2-3.

	A	B	C	D
1	Интенсивность			
2	потока заявок	18	заяв/час	
3	обслуживания	=B2/B3	заяв/час	
4	Нагрузка на систему	=B2/B3		
5	Число каналов	$\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}$	вероятность P0	вероятность Pn
6	1	=1+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A6)/ФАКТР(A6)	=1/B6	=C6*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A6)/ФАКТР(A6)
7	2	=B6+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A7)/ФАКТР(A7)	=1/B7	=C7*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A7)/ФАКТР(A7)
8	3	=B7+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A8)/ФАКТР(A8)	=1/B8	=C8*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A8)/ФАКТР(A8)
9	4	=B8+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A9)/ФАКТР(A9)	=1/B9	=C9*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A9)/ФАКТР(A9)
10	5	=B9+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A10)/ФАКТР(A10)	=1/B10	=C10*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A10)/ФАКТР(A10)
11	6	=B10+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A11)/ФАКТР(A11)	=1/B11	=C11*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A11)/ФАКТР(A11)
12	7	=B11+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A12)/ФАКТР(A12)	=1/B12	=C12*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A12)/ФАКТР(A12)
13	8	=B12+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A13)/ФАКТР(A13)	=1/B13	=C13*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A13)/ФАКТР(A13)
14	9	=B13+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A14)/ФАКТР(A14)	=1/B14	=C14*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A14)/ФАКТР(A14)
15	10	=B14+СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A15)/ФАКТР(A15)	=1/B15	=C15*СТЕПЕНЬ(\$B\$4;A15)/ФАКТР(A15)
16				
17	Характеристики СМО с отказами			
18				
19	число каналов	Относительная пропускная способность	Абсолютная пропускная способность	Среднее число занятых каналов
20	2	=1-D7	=B\$12*B20	=C20/B\$13
21	3	=1-D8	=B\$12*B21	=C21/B\$13
22	4	=1-D9	=B\$12*B22	=C22/B\$13
23	5	=1-D10	=B\$12*B23	=C23/B\$13

Рис. 1. Модель решения задачи.

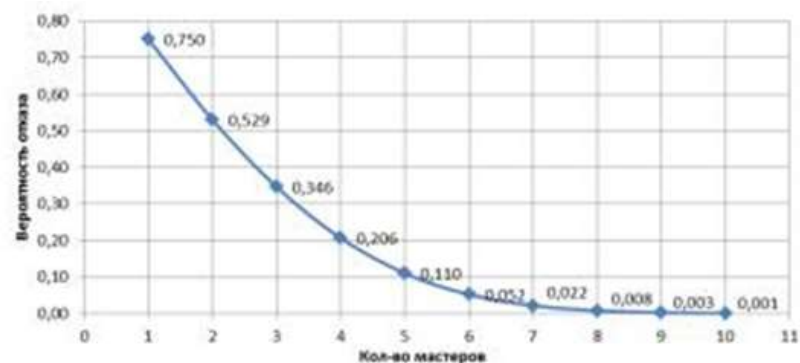


Рис. 2. График вероятности отказа в обслуживании.

	A	B	C	D
1	Интенсивность			
2	потока заявок	18 заяв/час		
3	обслуживания	6 заяв/час		
4	Нагрузка на систему	3		
5	Число каналов	$\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}$	вероятность P0	вероятность Pn
6	1	4,000	0,250	0,750
7	2	8,500	0,118	0,529
8	3	13,000	0,077	0,346
9	4	16,375	0,061	0,206
10	5	18,400	0,054	0,110
11	6	19,413	0,052	0,052
12	7	19,846	0,050	0,022
13	8	20,009	0,050	0,008
14	9	20,063	0,050	0,003
15	10	20,080	0,050	0,001
16				
17	Характеристики СМО с отказами			
18				
19	число каналов	Относительная пропускная способность	Абсолютная пропускная способность	Среднее число занятых каналов
20	2	0,471	8,471	1,412
21	3	0,654	11,769	1,962
22	4	0,794	14,290	2,382
23	5	0,890	16,019	2,670

Рис. 3. Результат решения задачи.

Из графика на рисунке 2 (Мастер диаграмм Excel/Точечная) видно, что минимальное число каналов обслуживания (мастеров), при котором вероятность обслуживания работника будет выше 85% (вероятность отказа должна быть меньше 0,15), равно 5.

Видно, что СМО в значительной мере перегружена: из двух мастеров занято в среднем 1,4 (ячейка D20, рисунок 3), а из обращающихся в мастерскую рабочих около 53% (ячейка D7, рисунок 3) остаются необслуженными.

Лабораторная работа «Модели управления запасами»

Цель работы: приобретение навыков расчета оптимального размер заказа, формирование плана заказов, расчета издержек.

Содержание лабораторной работы

Вариант 1.

Задание.

Машиностроительный завод покупает болты с гайками для сборочного участка, годовая потребность в которых составляет 50 тыс. штук в год. На данный момент имеется два предложения от разных поставщиков, условия которых приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Поставщик А		Поставщик В	
Количество	Цена за шт., руб.	Количество	Цена за шт., руб.
до 5000	5	до 9999	4,8
5000 – 19999	4,6	10000 – 29999	4,5
от 20000	4,4	от 30000	4,3

Стоимость хранения для завода можно оценить в 38% от стоимости единицы хранения в год. Стоимость оформления одного заказа – 1000 руб. Спрос в течение года на данные болты равномерный.

Каков оптимальный размер заказа с учетом скидок каждого из поставщиков? Какого поставщика следует предпочесть?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

Решение:

Спрос на болты по условию задачи известный и постоянный, следовательно, мы можем без ограничений использовать модель экономического размера заказа *QOPT*. При этом все издержки будут определяться полными издержками хранения и заказа за год. Однако имеется система скидок на базовые цены, а это значит, что отклонение от экономического размера заказа может оказаться выгодным, если полученные скидки превышают рост издержек хранения. Значит к сумме издержек хранения и заказа нужно добавить общие затраты на покупку болтов, чтобы иметь возможность корректно сравнивать разные предложения.

Так как в данной задаче нам необходимо рассчитать оптимальный заказ для шести цен и количественных диапазонов (2 поставщика и 3 диапазона действия цен у каждого). Модель решения представлена на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Стоимость хранения единицы (h)	Стоимость заказа (K)	Годовая потребность (M)				
2	38%	1000	50000				
3	Поставщик	Поставщик А		Поставщик В			
4	Объем поставки						
5	максимальный	4999	19999	100000	9999	29999	100000
6	минимальный	1	5000	20000	1	10000	30000
7	Цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4,3
8	Оптимальный размер заказа	=КОРЕНЬ((2*5852*5052)/(87*452))					
9	Реальный размер заказа	=ОКРУГЛ(ЕСЛИ(И(B8>=B6;B8<=B5);B8;ЕСЛИ(B8>B6;B6;B5));0)					
10	Издержки хранения	=B9/2*B7*452					
11	Издержки заказа	=5852*5052/B9					
12	Общие издержки хранения	=B10+B11					
13	Совокупные издержки заказа	=5052*B7+B12					

Рис. 1. Модель решения.

В верхних ячейках A2:C2 запишем общие данные: издержки хранения, издержки заказа и годовую потребность. В строках B5:G5 и B6:G6 запишем верхние и нижние границы диапазонов скидок. Число 1 млн. в ячейках D5 и G5 заменяет бесконечную границу диапазона и выбрано произвольно, для упрощения формул.

Для расчета экономичного размера заказа используем стандартную формулу:

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$$

В нашей задаче величина h непостоянна, так как она зависит от цены товара, а цена может быть разной. Поэтому в расчетах вместо самой величины h будем использовать ее выражение через цену и издержку хранения в процентах. С этой поправкой формула для Q и записана в ячейке B8. После применения автозаполнения получаем результат, представленный в таблице 2.

Таблица 2.

	Поставщик А			Поставщик В		
Объем поставки максимальный	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
минимальный	1	5000	20000	1	10000	30000
Цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4.3
Оптимальный размер заказа	7254,76	7563,61	7733,60	7404,36	7647,19	7823,01

Если сравнить полученные значения Q с диапазонами количеств закупаемых болтов, для которых действуют те цены, по которым мы считали Q , то обнаружим несколько несоответствий. Например, при покупке болтов у поставщика А по цене 5 руб. за штуку оптимальная величина заказа равна примерно 7255 штук. Но такая цена действует только при покупке менее 5000 штук. Если мы будем закупать болты партиями по 7255 штук, то их цена будет только 4,6 руб. Это конечно неплохо, но мы ведь хотели выяснить, какую партию болтов лучше всего выбрать, если покупать их по цене 5 руб.

Ясно, что выбирать размер партии мы должны только внутри диапазона от 1 до 5000 штук. Какой же размер выбрать? Здесь нужно вспомнить, как выглядит график зависимости суммы издержек хранения и заказа от размера заказа. А именно, график этот показывает гладкую функцию без перегибов с одним минимумом. Это значит, что чем ближе размер заказа к Q , тем меньше издержки и наоборот. Следовательно, в тех случаях, когда мы не можем выбрать размер заказа равным Q , мы должны взять реально возможную величину заказа, наиболее близкую к экономичному размеру заказа.

В случае с покупкой болтов по цене 5 руб. – это верхняя граница диапазона, т.е. 4999 штук. Поэтому в модель кроме строки для расчета Q («Оптимальный размер заказа») добавлена строка «Реальный размер заказа». В этой строке необходимо записывать тот размер заказа, который выбирается на самом деле. Конечно, можно выбирать реальный размер заказа отличным от теоретически оптимального не только из-за диапазонов действия цен. Скажем, во втором столбце значение Q равно 7563,6 и оно попадает в диапазон действия цены 4,6 руб. – от 5000 до 114 19999. Но не можем же мы заказать дробное число болтов. Значит, как минимум надо выбрать реальный размер заказа, как округленное до целых значений Q .

Кроме того, часто бывает, что штучный товар фасуется в стандартную тару. В этом случае нужно заказывать партию так, чтобы получалось целое число коробок или ящиков и т.п. Могут быть и другие причины, заставляющие отклоняться от теоретической величины оптимального заказа. Поэтому не существует никакой стандартной формулы для реального Q .

В сложных случаях реальный размер Q можно проставить вручную с учетом известных вам условий. А в нашей задаче можно написать и формулу, так как выбор достаточно прост. Такая формула и записана в ячейке B9.

Формулы для расчета издержек хранения, издержек заказа и общих издержек хранения приведены в ячейках B10, B11, B12 соответственно.

Полная величина издержек поставки включает в себя не только затраты на хранение, но и сумму, истраченную на покупку годового запаса болтов. Годовой запас здесь взят потому, что издержки хранения и заказа тоже вычислены в расчете на год.

В результате расчетов получаем таблицу поставок (таблица 3).

Таблица 3. Таблица поставок.

	Поставщик А			Поставщик В		
Объем поставки максимальный	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
минимальный	1	5000	20000	1	10000	30000
Цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4.3
Оптимальный размер заказа	7254,76	7563,61	7733,60	7404,36	7647,19	7823,01
Реальный размер заказа	4999	7564	20000	7404	10000	30000
Издержки хранения	4749,05	6610,94	16720,00	6752,45	8550,00	24510,00
Издержки заказа	10002,00	6610,26	2500,00	6753,11	5000,00	1666,67
Общие издержки хранения	14751,05	13221,20	19220,00	13505,55	13550,00	26176,67
Совокупные издержки заказа	264751,05	243221,20	239220,00	253505,55	238550,00	241176,67

В последней строке таблицы выведены наименьшие возможные издержки при покупке болтов по каждой из шести предложенных цен.

Из этих шести значений издержек наименьшей оказывается 238550 руб., которая получается при покупке болтов у поставщика В партиями по 10 тыс. штук по цене 4,5 руб. за штуку.

Из таблицы видно, что покупка болтов по меньшей цене, но более крупными партиями по 20-30 тыс. штук оказывается чуть дороже, так как предлагаемые скидки полностью съедаются потерями от замораживания капитала при такой политике закупок.

Чтобы построить график реализуем модель, представленную на рисунке 2. Диапазон изменения Q выберем от 0 до 12000.

	A	B	C	D
стоимость хранения				
17 единицы	=F7*A2			
18 Потребность	=C2			
19 Стоимость заказа	=B2			
20				
21 Q		0	2000	4000
22 Издержки хранения	=B\$17*B21/2			
23 Издержки заказа	=B\$18*B\$19/B21			
24 Полные издержки хра	=B22+B23			

Рис. 2. Модель решения.

Выделим диапазон ячеек A21:H24 и построим точечную диаграмму (рисунок 3).

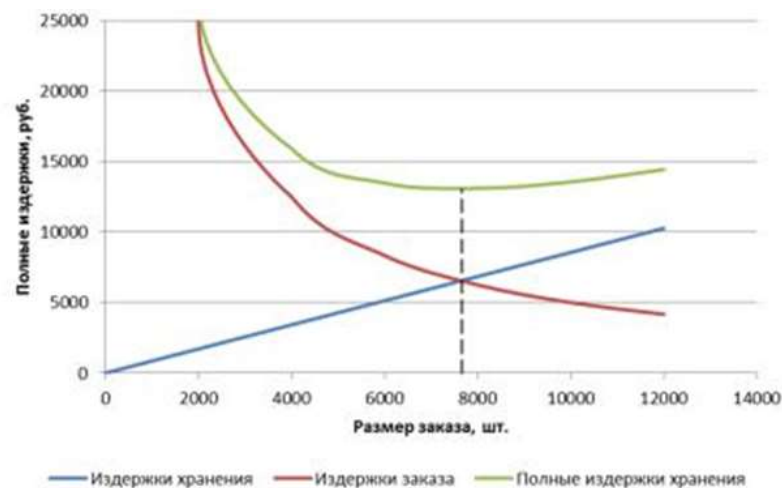


Рис. 3. Зависимость полных издержек от размера заказа.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

- отчеты по лабораторным работам
- закрытые (тестовые) задания
- открытые задания.

При выставлении итоговой оценки по дисциплине также учитываются результаты прохождения текущих аттестаций – выполнение контрольной работы и практико-ориентированного задания.

20.2.1 Примеры тестовых заданий закрытого типа:

1. *Модель – это*

1. аналог (образ) оригинала, но построенный средствами и методами отличными от оригинала
2. подобие оригинала
3. копия оригинала

Ответ: 1.

2. *Экономико-математическая модель – это*

1. математическое представление экономической системы (объектов, задачи, явлений, процессов и т. п.)
2. качественный анализ и интуитивное представление объектов, задач, явлений, процессов экономической системы и ее параметров
3. эвристическое описание экономической системы (объектов, задачи, явлений, процессов и т. п.)

Ответ: 1.

3. *Метод – это*

1. подходы, пути и способы постановки и решения той или иной задачи в различных областях человеческой деятельности
2. описание особенностей задачи (проблемы) и условий ее решения
3. требования к условиям решения той или иной задачи

Ответ: 1.

4. *Выберите неверное утверждение*

1. ЭММ позволяют сделать вывод о поведении объекта в будущем
2. ЭММ позволяют управлять объектом
3. ЭММ позволяют выявить оптимальный способ действия
4. ЭММ позволяют выявить и формально описать связи между переменными, которые характеризуют исследования

Ответ: 2.

5. *Найти экстремум функции $f(x)$ при выполнении ограничений $R_i(x) = a_i$, $\varphi(x) \leq b_j$, наложенных на параметры функции – это задача*

1. условной оптимизации
2. линейного программирования
3. безусловной оптимизации
4. нелинейного программирования
5. динамического программирования

Ответ: 1.

6. *Задача, включающая целевую функцию f и функции Φ , входящие в ограничения, является задачей линейного программирования, если*

1. все Φ являются линейными функциями относительно своих аргументов, а функция f – нелинейна
2. все Φ и f являются линейными функциями относительно своих аргументов
3. функция f является линейной относительно своих аргументов, а функции Φ – нелинейны
4. только часть функций Φ и функция f являются линейными относительно своих аргументов

Ответ: 2.

7. *Множество всех допустимых решений системы задачи линейного программирования*

1. является
2. выпуклым

- 3. вогнутым
- 4. одновременно выпуклым и вогнутым

Ответ: 2.

8. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то целевая функция достигает нужного экстремального значения в одной из:

- 1. точек многоугольника (многогранника) допустимых решений
- 2. внутренних точек многоугольника (многогранника) допустимых решений
- 3. вершин многоугольника (многогранника) допустимых решений.

Ответ: 3.

9. В задачах линейного программирования решаемых симплекс-методом искомые переменные должны быть

- 1. любыми
- 2. положительными
- 3. свободными от ограничений
- 4. неотрицательными

Ответ: 4.

10. Симплексный метод решения задач линейного программирования включает:

- 1. определение одного из допустимых базисных решений поставленной задачи (опорного плана)
- 2. определение правила перехода к не худшему решению
- 3. проверку оптимальности найденного решения
- 4. определение одного из допустимых базисных решений поставленной задачи (опорного плана), определение правила перехода к не худшему решению, проверка оптимальности найденного решения.

Ответ: 4.

11. Задача линейного программирования не имеет конечного оптимума, если

- 1. в точке A области допустимых значений достигается максимум целевой функции F
- 2. в точке A области допустимых значений достигается минимум целевой функции F
- 3. система ограничений задачи несовместна
- 4. целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений.

Ответ: 3.

12. Если ресурс образует «узкое место производства», то это означает

- 1. ресурс избыточен
- 2. ресурс использован полностью
- 3. двойственная оценка ресурса равна нулю

Ответ: 2.

13. Задача линейного программирования может достигать максимального значения

- 1. только в одной точке
- 2. в двух точках
- 3. во множестве точек
- 4. в одной или двух точках

Ответ: 3.

14. Если в прямой задаче, какое либо ограничение является неравенством, то в двойственной задаче соответствующая переменная

- 1. неотрицательна
- 2. положительна
- 3. свободна от ограничений
- 4. отрицательна

Ответ: 1.

15. Задача о назначениях является дискретным случаем:

- 1. Транспортной задачи линейного программирования
- 2. Задачи коммивояжера
- 3. Задачи о кратчайшем расстоянии на заданной сети

Ответ: 1.

16. Задача оптимального раскроя относится к типу задач:

- 1. Линейного программирования
- 2. Линейного дискретного программирования
- 3. Нелинейного программирования
- 4. Динамического программирования.

Ответ: 2.

16. *Диаграмма Ганта отображает следующие параметры проекта (два ответа):*

1. состав используемых ресурсов и их распределение между работами
2. календарные даты, к которым привязываются моменты начала и завершения работ
3. недогрузка критической работы ресурсами
4. структуру работ, полученную на основе сетевого графика

Ответ: 2, 4.

17. *Работа в сетевом планировании – это:*

1. итог того или иного процесса
2. промежуточный или окончательный результат выполнения события
3. трудовой процесс или действие не требующее ни затрат времени ни ресурсов
4. любой трудовой процесс, сопровождающийся затратой времени и приводящий к нужным результатам.

Ответ: 4.

18. *Событие в сетевом планировании – это:*

1. трудовой процесс или действие, сопровождающееся затратами времени и ресурсов
2. промежуточный или окончательный результат выполнения работы
3. итог того или иного процесса промежуточный или окончательный результат выполнения работы
4. момент начала или завершения одной или нескольких работ.

Ответ: 4.

19. *Путь в сетевом планировании – это:*

1. последовательность событий
2. когда начало последующей работы обусловлено окончанием предыдущей
3. результат выполнения предшествующих работ от начала выполнения проекта до конечной цели
4. любая последовательность работ, соединяющая каких-либо два события.

Ответ: 4.

20. Выберите основные элементы, из которых состоит одноканальная система массового обслуживания с отказами:

1. входной поток заявок, очередь, поток отказов, узел (канал) обслуживания, поток обслуженных заявок
2. входной поток заявок, поток отказов, несколько узлов (каналов) обслуживания, поток обслуженных заявок
3. входной поток заявок, очередь, узел обслуживания, поток обслуженных заявок
4. входной поток заявок, поток отказов, узел обслуживания, поток обслуженных заявок

Ответ: 4.

20.2.2 Примеры тестовых заданий открытого типа:

1. *Транспортная задача является задачей программирования*

Ответ: линейного.

2. *Если в транспортной задаче объем спроса равен объему предложения, то такая задача называется*

Ответ: закрытой.

3. *Если в транспортной задаче объем запасов превышает объем потребностей, в рассмотрение вводят ...*

Ответ: фиктивный пункт потребления.

4. *Все точки, удовлетворяющие уравнению системы ограничений задачи линейного программирования с двумя переменными, образуют на плоскости...*

Ответ: прямую.

5. *Какая переменная выходит из базиса при преобразовании симплексной таблицы?*

Ответ: та базисная переменная, которая соответствовала разрешающему ограничению.

6. *Если в разрешающем столбце симплексной таблицы нет положительных коэффициентов, это означает, что ...*

Ответ: целевая функция задачи не ограничена.

7. *Что показывают «теневые цены» (основные переменные двойственной задачи) в линейной задаче производственного планирования?*

Ответ: изменение оптимальной выручки при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу.

8. В чем заключается критерий оптимальности симплексной таблицы?

Ответ: все коэффициенты в критериальном ограничении должны быть неотрицательными (или неположительными).

9. Если при попытке решить задачу линейного программирования симплекс-методом не обнаружено необходимого числа базисных переменных, ...

Ответ: для решения задачи симплекс-методом необходимо ввести искусственный базис.

10. Какие работы не имеют запаса времени?

Ответ: критические.

11. На основании диаграммы Ганта может быть построен график ... ресурсов.

Ответ: загрузки.

12. Критическим называется путь ...:

Ответ: максимальной продолжительности, соединяющий исходное и конечное событие через последовательность работ.

13. Перечислите основные параметры сетевого технологического графика:

Ответ: ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени наступления событий.

14. Ранний срок свершения события – это ...

Ответ: максимальная продолжительность времени выполнения всех работ от исходного события до рассматриваемого события.

15. Поздний срок свершения события – это ...

Ответ: максимальный допустимый срок наступления рассматриваемого события, не приводящий к увеличению критического пути.

16. Что понимается под оптимизацией технологического графика?

Ответ: его улучшение с целью уменьшения времени выполнения комплекса работ при заданном количестве сил и средств.

17. Определите тип системы массового обслуживания:

СМО представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока $\lambda = 0,95$ вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора $t = 1$ мин.

Ответ: одноканальная СМО с отказами.

18. Определите тип системы массового обслуживания:

В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda = 10$ задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты.

Ответ: многоканальная СМО с отказами.

19. Определите тип системы массового обслуживания:

На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности $\lambda = 4$ машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин., в очереди может находиться не более 5 автомобилей.

Ответ: одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди.

20. Интенсивность потока обслуженных заявок в узле обслуживания СМО составляет 5 заявок в час. Определите среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл}$:

Ответ: 12 минут.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме зачета с оценкой.

Контрольно-измерительные материалы зачета с оценкой включают в себя 7 закрытых (тестовых заданий) и 7 открытых заданий. Примеры заданий приведены в разделах 20.2.1. и 20.2.2. Решение указанных заданий оценивается по следующей шкале:

Количество правильно выполненных заданий (в %)	Оценка
100–90	отлично (5 баллов)
89– 80	хорошо (4 балла)
79– 70	удовлетворительно (3 балла)
69–...	неудовлетворительно (2 балла)

Итоговая оценка обучающегося по дисциплине учитывает результаты текущих аттестаций и рассчитывается по следующей формуле:

Итоговая оценка = $(0,3 * \text{Результаты решения закрытых (тестовых) и открытых заданий в ходе зачета}) + (0,7 * \text{Результаты текущих аттестаций})$

При выставлении итоговой оценки используется арифметическое округление.

В случае получения обучающимся неудовлетворительной оценки (2 балла) по результатам решения закрытых (тестовых) и открытых заданий на зачете и/или текущих аттестаций, итоговая оценка по дисциплине – "неудовлетворительно".